Министерство образования республики Беларусь
Учреждение образования
«Могилевский государственный университет продовольствия»

РАЗНОСТНЫЕ УРАВНЕНИЯ.
Z-ПРЕОБРАЗОВАНИЕ И ЕГО ПРИМЕНЕНИЯ

Учебно-методическое пособие
для обеспечения управляемой самостоятельной работы
студентов специальности
1–53 01 01 Автоматизация технологических процессов и производств

Могилёв 2014

УДК 519.21 517
ББК 22.161.1
Г 65

Рецензенты: д.ф.-м.н., зав. кафедры высшей математики УО МГУП *А.М. Гальмак*, к.т.н., доцент кафедры АТПП УО МГУП *Е.Л. Волынская*

Рекомендовано кафедрой высшей математики УО МГУП, научно-методическим советом УО МГУП

Составители:

С.В. Подолян
И.В. Юрченко

Разностные уравнения. Z-преобразование и его применения: учебно-методическое пособие / сост. С.В. Подолян, И.В. Юрченко. – Могилев: МГУП, 2014. – 24 с.

ISBN

В учебно-методическом пособии изложены теоретические сведения по теме «Разностные уравнения. Z-преобразование и его применения» учебной программы по дисциплине «Высшая математика» для студентов специальности 1–53 01 01 Автоматизация технологических процессов и производств. Приведены примеры, иллюстрирующие основные методы решения разностных уравнений и осуществления прямого и обратного Z-преобразования. Рассмотрено применение Z-преобразования к анализу выходных процессов линейных дискретных стационарных динамических систем. Включены практические задания для самостоятельного выполнения и ответы к ним. Пособие предназначается для студентов специальности 1–53 01 01 в качестве методического обеспечения УСРС.

УДК 519.21 517
ББК 22.161.1

ISBN

Содержание

§ 1 Решетчатые функции

1.1 Понятие решетчатой функции

Рассмотрим функцию $f(t)$, которая определена в отдельных изолированных точках (дискретных) t_1, t_2, …, t_n, … некоторого промежутка T. Следует обратить внимание, что переменная величина t не является непрерывно изменяющейся на промежутке T, а принимает на нем только отдельные изолированные значения.

Например, функция $f(t) = t^3$, где переменная величина t принимает на промежутке [– 2; 2] значения: t = – 2; – 1,5; – 1; 0; 1; 1,5; 2. Изобразим на рисунке 1.1 график этой функции (значения функции отметим точками).

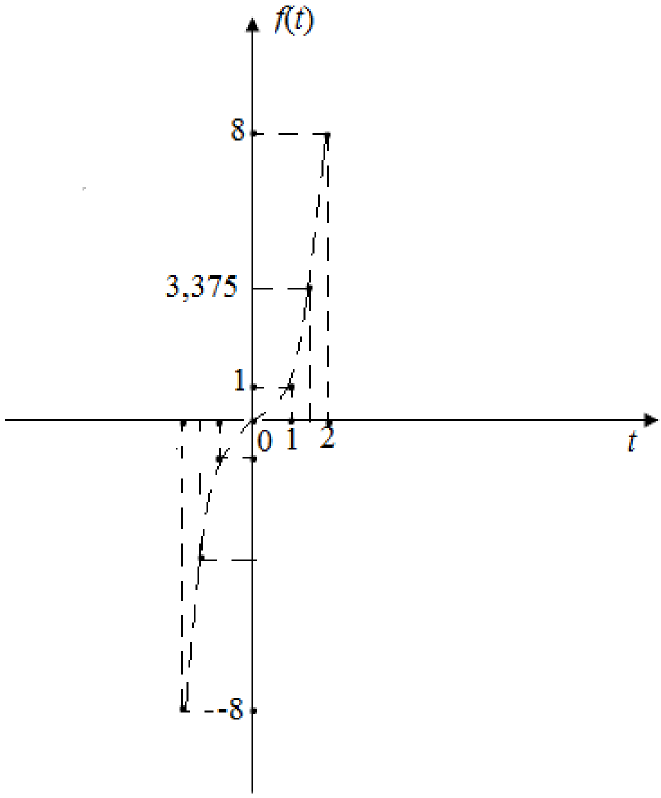

Рисунок 1.1 – График функции $f(t)$

Для дальнейшего рассмотрения обозначим $f(t_n) = f_n$, где f_n – последовательность чисел, значений функции $f(t)$ при $t = t_1, t_2, \dots, t_n, t_{n+1}, \dots$; $t_{n+1} > t_n$.

Функции $f(t_n)$, у которых аргумент t_n является целым числом, $t_n \in \mathrm{Z}$, целесообразно обозначить через $f(n)$. Такие функции называются *решетчатыми функциями*.

Предлагается самостоятельно построить графики следующих решетчатых функций:

а) $f(n) = C = \mathrm{const}$, $n \in \mathrm{Z}$;

б) $f(n) = 2^n$, $n \in \mathrm{Z}$;

с) $f(n) = \ln n$, $n \in \mathrm{N}$.

1.2 Конечные разности решетчатых функций

Пусть дана решетчатая функция $f(n)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$. Функция

$$\Delta f(n) = f(n + 1) - f(n) \tag{1.2.1}$$

называется *конечной разностью первого порядка* или *первой (конечной) разностью*.

Функция $\Delta^2 f(n) = \Delta(\Delta f(n))$ называется *конечной разностью второго порядка* или *второй (конечной) разностью*.

Вторая (конечная) разность определяется следующим выражением:

$$\Delta^2 f(n) = \Delta f(n + 1) - \Delta f(n) = f(n + 2) - f(n + 1) - (f(n + 1) - f(n)) =$$
$$= f(n + 2) - 2f(n + 1) + f(n). \tag{1.2.2}$$

Рекуррентно n-я (конечная) разность определяется следующим образом:

$$\Delta^k f(n) = \Delta^{k-1} f(n + 1) - \Delta^{k-1} f(n) = f(n + k) - C_k^1 f(n + k - 1) + C_k^2 f(n + k - 2) -$$
$$- \ldots + (-1)^i C_k^i f(n + k - i) + \ldots + (-1)^k f(n), \tag{1.2.3}$$

где $C_k^i = \dfrac{k!}{i!(k-i)!}$ – биномиальные коэффициенты,

$\Delta^0 f(n) = f(n)$.

Формулы (1.2.1) – (1.2.3) выражают разности решетчатой функции через значения этой функции в целочисленных точках. Рассмотрим, как можно выразить значения самой решетчатой функции $f(n)$ через ее разности различных порядков.

Из (1.2.1) получим

$$f(n + 1) = f(n) + \Delta f(n).$$

На основе полученного равенства и равенства (1.2.2) находим

$$\Delta^2 f(n) = f(n + 2) - f(n) - 2\Delta f(n),$$

откуда

$$f(n + 2) = f(n) + 2\Delta f(n) + \Delta^2 f(n).$$

По индукции находим

$$f(n + k) = f(n) + C_k^1 \Delta f(n) + C_k^2 \Delta^2 f(n) + \ldots + \Delta^k f(n). \tag{1.2.4}$$

Если положить в (1.2.4) $n = 0$,получим

$$f(k) = f(0) + C_k^1 \Delta f(0) + C_k^2 \Delta^2 f(0) + \ldots + \Delta^k f(0). \tag{1.2.5}$$

Формулы (1.2.4), (1.2.5) определяют значения решетчатой функции через ее конечные разности до порядка k включительно и представляют собой дискретный аналог формул Тейлора для непрерывной функции.

Пример 1.2.1. Вычислить разности $\Delta^k f(n)$, $n = 1, 2, \ldots$, если $f(n) = e^{2n}$.

Решение. Последовательно находим:

$\Delta f(n) = e^{2(n+1)} - e^{2n} = e^{2n}(e^2 - 1)$;

$\Delta^2 f(n) = e^{2(n+1)}(e^2 - 1) - e^{2n}(e^2 - 1) = (e^2 - 1)\cdot e^{2n}\cdot(e^2 - 1) = e^{2n}\cdot(e^2 - 1)^2$.

По индукции находим

$$\Delta^k f(n) = e^{2n}(e^2 - 1)^k,\ k = 1, 2, \ldots .$$

1.3 Разностные уравнения

1.3.1 Основные понятия о разностных уравнениях

Разностным уравнением k-го порядка называют любое соотношение, связывающее неизвестную решетчатую функцию $f(n)$ и ее разности до порядка k включительно. *Разностное уравнение k-го порядка* записывают в виде

$$F(n, f(n), \Delta f(n), \Delta^2 f(n), \ldots, \Delta^k f(n)) = 0 \qquad (1.3.1)$$

или в силу формулы (1.2.3)

$$F(n, f(n), f(n+1), f(n+2), \ldots, f(n+k)) = 0. \qquad (1.3.2)$$

Заметим, что при необходимости неизвестную решетчатую функцию можно обозначать через $x(n)$, $y(n)$, $z(n)$, ….

По аналогии с теорией обыкновенных дифференциальных уравнений под решением уравнений (1.3.1) или (1.3.2) понимают всякую решетчатую функцию $f(n)$, которая при подстановке ее в уравнение приводит к верному равенству для $n = 0, 1, 2, \ldots$.

1.3.2 Линейные разностные уравнения

Целесообразно рассмотреть подробнее линейные разностные уравнения, которыми описываются линейные дискретные системы (системы с дискретным воздействием).

Линейное разностное уравнение k-го порядка с постоянными коэффициентами имеет вид

$$C_0\Delta^k x(n) + C_1\Delta^{k-1}x(n) + \ldots + C_k x(n) = \varphi(n), \qquad (1.3.3)$$

где $C_i = \text{const}$ (вещественные), $i = 0, 1, \ldots, k$; $C_0 \neq 0$, $x(n)$ – неизвестная решетчатая функция.

Уравнение (1.3.3) можно записать в виде

$$a_0 x(n+k) + a_1 x(n+k-1) + \ldots + a_k x(n) = \varphi(n), \qquad (1.3.4)$$

где $a_i = \text{const}$, $i = 0, 1, \ldots$; $a_0 \neq 0$, $a_k \neq 0$.

Если решетчатая функция $\varphi(n) \equiv 0$, то уравнения (1.3.3), (1.3.4) называются однородными; в противном случае – неоднородными.

Для уравнений (1.3.3), (1.3.4) по аналогии с обыкновенными дифференциальными уравнениями может быть сформулирована *задача Коши*:

найти решетчатую функцию $x(n)$, удовлетворяющую уравнению (1.3.4) и условиям

$$x(n_0) = x_0,\ x(n_0 + 1) = x_1,\ \ldots,\ x(n_0 + k - 1) = x_{k-1}, \qquad (1.3.5)$$

где n_0 – некоторое начальное значение аргумента n; x_0, x_1, …, x_{k-1}, – заданные числа.

Условия (1.3.5) называются начальными условиями. Если $x_i \equiv 0$, $i = 0, 1, \ldots, k - 1$, то условия называют нулевыми.

Заметим, что в случае записи разностного уравнения в виде (1.3.3), начальные условия задаются в виде

$$\Delta^i(n_0) = \alpha_i,\ \alpha_i = \mathrm{const},\ i = 0, 1, \ldots, k - 1.$$

По аналогии с теорией обыкновенных дифференциальных уравнений имеют место следующие в пункте 1.4 утверждения.

1.4 Решение линейных однородных разностных уравнений

Рассмотрим линейное однородное разностное уравнение k-го порядка с постоянными коэффициентами

$$a_0x(n + k) + a_1x(n + k - 1) + \ldots + a_{k-1}x(n + 1) + a_kx(n) = 0, \qquad (1.4.1)$$

где $a_0 \neq 0$, $a_k \neq 0$.

Разностное уравнение (1.4.1) имеет ровно k линейно независимых частных решений $x_1(n)$, $x_2(n)$, …, $x_k(n)$. Общее решение уравнения (1.4.1) имеет вид

$$x^0(n) = C_1x_1(n) + C_2x_2(n) + \ldots + C_kx_k(n),$$

где C_1, C_2, …, C_k – const.

Линейно независимые частные решения этого уравнения будем искать в виде $x(n) = \lambda^n$, где $\lambda \neq 0$ – некоторое неизвестное число. Непосредственной подстановкой предполагаемого решения в уравнение (1.4.1) убеждаемся, что это число λ удовлетворяет равенству

$$a_0\lambda^k + a_1\lambda^{k-1} + \ldots + a_{k-1}\lambda + a_k = 0, \qquad (1.4.2)$$

которое называется *характеристическим уравнением* для разностного уравнения (1.4.1)

Итак, решетчатая функция $x(n) = \lambda^n$ является решением разностного уравнения (1.4.1), если число λ – корень характеристического уравнения (1.4.2). При этом возможны три случая:

1) характеристическое уравнение (1.4.2) имеет ровно k различных действительных корней;

2) корни характеристического уравнения различны, но среди них имеются комплексные;

3) среди корней характеристического уравнения имеются кратные.

Рассмотрим эти случаи.

1. Пусть $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ – действительные и различные корни характеристического уравнения (1.4.2). Им отвечают k следующих линейно независимых частных решений (фундаментальная система решений):

$$x_1(n) = \lambda_1^n,\ x_2(n) = \lambda_2^n,\ \ldots,\ x_k(n) = \lambda_k^n. \qquad (1.4.3)$$

В этом случае общее решение линейного разностного уравнения (1.4.1) записывается в виде линейной комбинации фундаментальной системы решений:

$$x^0(n) = C_1\lambda_1^n + C_2\lambda_2^n + \ldots + C_k\lambda_k^n, \qquad (1.4.4)$$

$C_i = \text{const},\ i = 1, 2, \ldots, k$.

Пример 1.4.1. Решить разностное уравнение второго порядка

$$x(n + 2) - 5x(n + 1) + 6x(n) = 0.$$

Решение. Характеристическое уравнение $\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$ имеет корни $\lambda_1 = 2$ и $\lambda_2 = 3$. Тогда, согласно равенствам (1.4.3), частными линейно независимыми решениями уравнения являются функции $x_1(n) = 2^n$ и $x_2(n) = 3^n$, а общим решением – решетчатая функция

$$x^0(n) = C_1 \cdot 2^n + C_2 \cdot 3^n,\ C_1,\ C_2 - \text{const}.$$

2. Пусть среди различных корней характеристического уравнения (1.4.2) имеются комплексно-сопряженный корень вида $\lambda = \alpha \pm \beta i$.

Как и в теории линейных дифференциальных уравнений, можно показать, что если комплекснозначная функция $x(n) = U(n) + iV(n)$ является решением линейного однородного разностного уравнения, то функции $U(n)$ и $V(n)$ – также решения этого уравнения. Далее нетрудно доказать, что решетчатые функции

$$x_1(n) = r^n \cos n\varphi;\ x_2(n) = r^n \sin n\varphi \qquad (1.4.5)$$

являются линейно независимыми решениями линейного однородного разностного уравнения (1.4.1), отвечающими комплексно-сопряженному корню $\alpha \pm \beta i$ характеристического уравнения (1.4.2). Общее решение записывается в виде их линейной комбинации.

Пример 1.4.2. Решить разностное уравнение третьего порядка

$$x(n + 3) - 4x(n + 2) + 6x(n + 1) - 4x(n) = 0.$$

Решение. Характеристическое уравнение

$$\lambda^3 - 4\lambda^2 + 6\lambda - 4 = (\lambda - 2)(\lambda^2 - 2\lambda + 2) = 0$$

имеет корни $\lambda_1 = 2$ и $\lambda_{2,3} = -1 \pm i$. Так как

$$\lambda = -1 + i = \sqrt{2}\, e^{\frac{3\pi}{4} i} = \sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right),$$

то согласно формулам (1.4.5) числам $\lambda_{2,3}$ отвечают действительные решения

$$x_2(n) = 2^{\frac{n}{2}}\cos\frac{3\pi n}{4} \text{ и } x_3(n) = 2^{\frac{n}{2}}\sin\frac{3\pi n}{4}.$$

Числу $\lambda_1 = 2$ отвечает решение $x_1(n) = 2^n$.

Итак, общее решение исходного уравнения имеет вид

$$x^0(n) = C_1 2^n + 2^{\frac{n}{2}}\left(C_2\cos\frac{3\pi n}{4} + C_3\sin\frac{3\pi n}{4}\right),\ n = 0, 1, \ldots.$$

3. Пусть λ – корень кратности m характеристического уравнения (1.4.2). Тогда ему отвечает m следующих линейно независимых решений:

$$x_1(n) = \lambda^n,\ x_2(n) = \lambda^n n,\ x_3(n) = \lambda^n n^2,\ \ldots,\ x_m(n) = \lambda^n n^{m-1}. \qquad (1.4.6)$$

Общее решение записывают в виде их линейной комбинации.

Пример 1.4.3. Найти решение разностного уравнения третьего порядка

$$x(n+3) - 3x(n+2) + 3x(n+1) + x(n) = 0.$$

Решение. Характеристическое уравнение

$$\lambda^3 + 3\lambda^2 + 3\lambda + 1 = (\lambda + 1)^3$$

имеет трехкратный корень $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = -1$. Тогда с учетом формулы (1.4.6) получим общее решение исходного разностного уравнения в виде

$$x^0(n) = (C_1 + C_2 n + C_3 n^2)(-1)^n.$$

Пример 1.4.4. Решить начальную задачу:

$$x(n+2) - 2x(n+1) - 3x(n) = 0;\ x(0) = 1;\ x(1) = 1.$$

Решение. Характеристическое уравнение

$$\lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0$$

имеет корни $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 3$. Тогда общее решение исходного уравнения имеет вид

$$x(n) = C_1(-1)^n + C_2 3^n.$$

Так как

$x(0) = C_1(-1)^0 + C_2 3^0 = C_1 + C_2$,

$x(1) = C_1(-1)^1 + C_2 3^1 = -C_1 + 3C_2$,

то, исходя из начальных условий, получаем систему

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 1, \\ -C_1 + 3C_2 = 1, \end{cases}$$

из которой $C_1 = \frac{1}{2}$, $C_2 = \frac{1}{2}$.

Тогда искомым частным решением будет решетчатая функция

$$x(n) = \frac{1}{2}\cdot(-1)^n + \frac{1}{2}\cdot 3^n.$$

§ 2 Z-преобразование

2.1 Понятие о Z-преобразовании

Пусть $\{f(n), n = 0, 1, 2,\ldots\}$ – последовательность чисел (решетчатая функция), удовлетворяющая условиям:

$f(n) \equiv 0$ при $n < 0$,

$|f(n)| < Me^{\alpha n}$, где M и α – положительные числа.

По аналогии с преобразованием Лапласа будем называть такую решётчатую функцию $f(n)$ *оригиналом*.

Изображение последовательности $\{f(n)\}$ – функция $F(z)$ комплексного переменного z, определяемая равенством

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f(n)z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{f(n)}{z^n} \qquad (2.1.1)$$

называется ее Z-*преобразованием* (*преобразованием Лорана*).

Доказано, что ряд в правой части равенства (2.1,1) будет сходиться равномерно к $F(z)$ в области $|z| \geq R_1 > R$, где $R = \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|f(n)|}$. В указанной области функция $F(z)$ является аналитической.

Для обозначения Z-преобразования решётчатой функции $f(n)$ часто используется символ $Z\{f(n)\}$.

Если функция комплексного переменного $F(z)$ является Z-преобразованием решётчатой функции $f(n)$, то символически можно записать и так:

$$F(z) \risingdotseq f(n).$$

Оригинал – решётчатая функция $f(n)$ по ее изображению $F(z)$ находится с помощью обратного Z-преобразования по формуле:

$$f(n) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C F(z)\cdot z^{n-1}dz,\ n = 0, 1, \ldots,$$

где C – любая окружность радиуса $|z| = R_1 > R$, обходимая против часовой стрелки.

Найдем Z-преобразования некоторых решётчатых функций, основываясь на определении.

Пример 2.1.1. Пусть $f(n) = 1(n) = 1$.

По формуле (2.1.1)

$$Z\{1\} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^n} = \frac{1}{1-\frac{1}{z}} = \frac{z}{z-1},$$

если $\left|\frac{1}{z}\right| < 1$, то есть $|z| > 1$.

Итак, $1 \risingdotseq \dfrac{z}{z-1}$.

Здесь воспользовались фактом, что при $|z| > 1$ сумма $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{z^n}$ является убывающей геометрической прогрессией.

Сумма членов убывающей геометрической прогрессии

$$b_1 + b_1q + b_1q^2 + b_1q^3 + \ldots, \text{ где } |q| < 1,$$

находится по формуле

$$S = \frac{b_1}{1-q}.$$

Пример 2.1.2. Пусть $f(n) = a^n e^{\alpha n}$.

Тогда

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{a^n e^{\alpha n}}{z^n} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{ae^{\alpha}}{z}\right)^n = \frac{1}{1-\dfrac{ae^{\alpha}}{z}} = \frac{z}{z-ae^{\alpha}},$$

если $|z| > |ae^{\alpha}| > |a|e^{\alpha}$.

Итак,

$$a^n e^{\alpha n} \risingdotseq \frac{z}{z-ae^{\alpha}}.$$

В частности, если $a = 1$, получим

$$e^{\alpha n} \risingdotseq \frac{z}{z-e^{\alpha}};$$

а при $\alpha = 0$:

$$a^n \risingdotseq \frac{z}{z-a}.$$

Пример 2.1.3. Пусть $f(n) = \dfrac{a^n}{n!}$, тогда

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{a^n}{n!z^n} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(\dfrac{a}{z}\right)^n}{n!} = e^{\frac{\alpha}{z}}.$$

(Использовали формулу $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^n}{n!} = e^x$).

Итак,

$$\frac{a^n}{n!} \risingdotseq e^{\frac{\alpha}{z}},$$

если $|z| > |a|$.

2.2 Основные свойства Z-преобразования

Рассмотрим лишь основные свойства, которые будут использованы при решении задач.

1. Свойство линейности

Пусть $f_i(n) \risingdotseq F_i(z)$, $i = 1, 2, \ldots, k$; $c_i = \mathrm{const}$, $i = 1, 2, \ldots, k$.

Тогда $\sum_{i=1}^{k} c_i f_i(n) \risingdotseq \sum_{i=1}^{k} c_i F_i(z)$.

2. Свойство запаздывания (смещения)

Пусть $f(n) \risingdotseq F(z)$, тогда

$$f(n-1) \risingdotseq z^{-1}F(z),$$
$$f(n-2) \risingdotseq z^{-2}F(z),$$
$$\ldots$$
$$f(n-k) \risingdotseq z^{-k}F(z),\ k = 1, 2, \ldots, \qquad (2.2.1)$$

где $f(n-k) = 0$ при $n - k < 0$.

3. Свойство опережения

Если $f(n) \risingdotseq F(z)$, то

$$f(n+k) \risingdotseq z^k F(z) - z^k f(0) - z^{k-1} f(1) - \ldots - zf(k-1). \qquad (2.2.2)$$

4. Свойство дифференцирования изображения

В п. 2.1 было указано, что Z-преобразование $F(z)$ решётчатой функции $f(n)$ является аналитической функцией, то есть дифференцируемой в области $|z| > R$.

Если $f(n) \risingdotseq F(z)$, то

$$nf(n) \risingdotseq -z\,\frac{dF(z)}{dz}.$$

Свойства Z-преобразования: умножение изображений, свертка оригиналов, теорема о предельных значениях можно найти в литературе (см., например, [2] гл. 5, п. 5.3.2).

2.3 Нахождение оригинала по изображению

В простейших случаях восстановить решётчатую функцию по ее изображению можно используя таблицу основных Z-преобразований и его свойства.

Рассмотрим способы нахождения оригинала по его изображению для некоторых простейших случаев.

Вспомогательные утверждения:

1) точки, в которых нарушается аналитичность функции $F(z)$, называются *особыми точками*;

2) особые точки, для каждой из которых существует такая ее окрестность, в которой нет других особых точек функции $F(z)$, называются *изолированными особыми точками*;

3) изолированная особая точка z_0 (z_0 – комплексное число), функции $F(z)$ называется *полюсом*, если $\lim\limits_{z\to z_0} F(z) = \infty$;

4) если $F(z) = \dfrac{P(z)}{Q(z)}$, где $P(z)$ и $Q(z)$ – многочлены, то особыми точками являются нули знаменателя, то есть корни многочлена $Q(z)$. Простому (не кратному) корню соответствует *простой полюс*, кратному – *кратный полюс*.

Первый способ

Пусть $z_1, z_2, \dots, z_k$ – особые точки функции $F(z)$, лежащие внутри круга $|z| = R_1$. Тогда решётчатая функция $f(n)$ может быть найдена по формуле

$$f(n) = \sum_{i=1}^{k} \operatorname*{Res}_{z=z_i}(F(z)\cdot z^{n-1}), \qquad (2.3.1)$$

где $\operatorname*{Res}\limits_{z=z_i}(F(z)\cdot z^{n-1}) = \lim\limits_{z\to z_i}[(z-z_i)F(z)z^{n-1}]$, если z_i, $i = 1, 2, \dots, k$, простые полюсы.

Если $F(z)$ имеет полюс z_0 кратности m, то

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0}(F(z)\cdot z^{n-1}) = \frac{1}{(m-1)!}\lim_{z\to z_0}\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}[(z-z_0)^m F(z)\cdot z^{n-1}]. \qquad (2.3.2)$$

Пример 2.3.1. Найти решётчатую функцию $f(n)$, если ее Z-преобразование $F(z) = \dfrac{z+2}{(z-2)(z+3)(z-1)}$.

Решение. Функция $F(z)$ имеет простые полюсы $z_1 = -3$, $z_2 = 1$, $z_3 = 2$. Значит, на основании формулы (2.3.1) имеем:

$$f(n) = \operatorname*{Res}_{z=z_1}(F(z)\cdot z^{n-1}) + \operatorname*{Res}_{z=z_2}(F(z)\cdot z^{n-1}) + \operatorname*{Res}_{z=z_3}(F(z)\cdot z^{n-1}) =$$

$$= \lim_{z\to -3}[(z+3)F(z)\cdot z^{n-1}] + \lim_{z\to 1}[(z-1)F(z)\cdot z^{n-1}] + \lim_{z\to 2}[(z-2)F(z)\cdot z^{n-1}] =$$

$$= \lim_{z\to -3}\frac{z+2}{(z-2)(z-1)}\cdot z^{n-1} + \lim_{z\to 1}\frac{z+2}{(z-2)(z+3)}\cdot z^{n-1} + \lim_{z\to 2}\frac{z+2}{(z+3)(z-1)}\cdot z^{n-1} \fallingdotseq$$

$$\fallingdotseq -\frac{1}{20}\cdot(-3)^{n-1} - \frac{3}{4} + \frac{2}{5}\cdot 2^n.$$

Итак,

$$f(n) = -\frac{1}{20}\cdot(-3)^{n-1} + \frac{2}{5}\cdot 2^n - \frac{3}{4}.$$

Пример 2.3.2. Найти решётчатую функцию $f(n)$, если ее Z-преобразование $F(z) = \dfrac{z+3}{(z-2)^3}$.

Решение. Точка $z = 2$ – полюс третьего порядка для функции $F(z)$. С учетом формулы (2.3.2) получим

$$f(n) = \frac{1}{2}\lim_{z\to 2}\left[(z-2)^3\frac{z+3}{(z-2)^3}z^{n-1}\right]'' = \frac{1}{2}\left[(z+3)\cdot z^{n-1}\right]''_{z=2} =$$

$$= \frac{1}{2}\left[n\cdot z^{n-1} + 3(n-1)z^{n-2}\right]'_{z=2} = \frac{1}{2}\left[n(n-1)z^{n-2} + 3(n-1)(n-2)z^{n-3}\right]_{z=2} =$$

$$= \frac{n(n-1)}{2}\cdot 2^{n-2} + \frac{3n(n-1)(n-2)}{2}\cdot 2^{n-3} = (5n^2 - 11n + 6)\cdot 2^{n-4}.$$

Итак,

$$f(n) = 5(n-1)\,(n - \frac{5}{6})\cdot 2^{n-4}.$$

Второй способ

Пусть $F(z) = \dfrac{P(z)}{Q(z)}$, $P(z)$ и $Q(z)$ – многочлены, степень числителя меньше степени знаменателя, корни знаменателя простые.

Тогда, разложив $F(z)$ на сумму простых дробей, например, методом неопределенных коэффициентов, найдем решётчатые функции для каждого слагаемого и воспользуемся свойством линейности Z-преобразования.

Пример 2.3.3. Найти решётчатую функцию $f(n)$ по известному ее Z-преобразованию $F(z) = \dfrac{z-1}{z^2+3z+2}$.

Решение. Так как $z^2 + 3z + 2 = (z + 1)(z + 2)$, то функция $F(z)$ имеет простые полюсы $z_1 = -2$, $z_2 = -1$.

Разложим $F(z)$ на сумму простых дробей:

$$\frac{z-1}{z^2+3z+2} = \frac{A}{z+1} + \frac{B}{z+2}.$$

Методом неопределенных коэффициентов находим $A = -2$, $B = 3$. Тогда

$$F(z) = -2\cdot\frac{1}{z+1} + 3\cdot\frac{1}{z+2}.$$

Для нахождения оригинала $f(n)$ воспользуемся таблицей, свойствами смещения и линейности.

Так как $a^n \risingdotseq \dfrac{z}{z-a}$, $a \in R$, то как $a^{n-1} \risingdotseq \dfrac{1}{z}\cdot\dfrac{z}{z-a} = \dfrac{1}{z-a}$ (свойство запаздывания).

Значит,

$$\frac{1}{z+1} = \frac{1}{z}\cdot\frac{z}{z+1} \risingdotseq (-1)^{n-1};$$

$$\frac{1}{z+2} = \frac{1}{z}\cdot\frac{z}{z+2} \risingdotseq (-2)^{n-1}.$$

Таким образом,

$$F(z) = -2\cdot\frac{1}{z+1} + 3\cdot\frac{1}{z+2} \risingdotseq -2\cdot(-1)^{n-1} + 3\cdot(-2)^{n-1},$$

$$f(n) = -2\cdot(-1)^{n-1} + 3\cdot(-2)^{n-1}.$$

Третий способ

Пусть $F(z) = \dfrac{P(z)}{Q(z)}$ – правильная дробь и корни знаменателя $z_1, z_2, \ldots, z_k$ – простые. Тогда решётчатая функция $f(n)$ может быть найдена по формуле

$$f(n) = \sum_{i=1}^{k}\frac{P(z_i)}{Q'(z_i)}z_i^{\,n-1}. \qquad (2.3.3)$$

Пример 2.3.4. Найти решётчатую функцию $f(n)$, если $F(z) = \dfrac{z+2}{z^3-7z+6}$.

Решение. Обозначим $P(z) = z + 2$, $Q(z) = z^3 - 7z + 6 = (z + 3)(z - 1)(z - 2)$, $Q'(z) = 3z^2 - 7$.

Так как корни знаменателя простые (у функции $F(z)$ простые полюсы), то

$$f(n) = \left.\frac{z+2}{3z^2-7}\right|_{z=-3}\cdot(-3)^{n-1} + \left.\frac{z+2}{3z^2-7}\right|_{z=1}\cdot 1^{n-1} + \left.\frac{z+2}{3z^2-7}\right|_{z=2}\cdot 2^{n-1} =$$

$$= -\frac{1}{20}(-3)^{n-1} - \frac{3}{4}\cdot 1^{n-1} + \frac{4}{5}\cdot 2^{n-1} = -\frac{1}{20}(-3)^{n-1} + \frac{4}{5}\cdot 2^{n-1} - \frac{3}{4}.$$

Итак,

$$f(n) = -\frac{1}{20}(-3)^{n-1} + \frac{2}{5}\cdot 2^{n} - \frac{3}{4}.$$

§ 3 Применения Z-преобразования

3.1 Решение линейных разностных уравнений с постоянными коэффициентами и их систем

Рассмотрим задачу Коши для линейного разностного уравнения k-го порядка с постоянными коэффициентами:

$$a_0x(n+k) + a_1x(n+k-1) + \ldots + a_{k-1}x(n+1) + a_kx(n) = f(n), \qquad (3.1.1)$$

$$x(0) = x_0,\ x(1) = x_1,\ \ldots,\ x(k-1) = x_{k-1}, \qquad (3.1.2)$$

где a_i. $i = 0, 1, \ldots, k$ постоянные коэффициенты, $f(n)$ – заданная решётчатая функция.

Требуется найти решение уравнения (3.1.1) – решётчатую функцию $x(n)$, удовлетворяющую условиям (3.1.2).

Будем предполагать, что входящие в уравнение (3.1.1) решётчатые функции имеют Z-преобразования. Построение решения задачи (3.1.1), (3.1.2) проведем по схеме применения преобразования Лапласа к решению задачи Коши для линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами.

Алгоритм решения задачи

1. Применяем Z-преобразование с учетом его свойств к обеим частям уравнения (3.1.1), обозначив $x(n) \fallingdotseq X(z)$.

2. Решаем полученное алгебраическое уравнение (операторное) относительно изображения $X(z)$.

3. Применяем к $X(z)$ обратное Z-преобразование, находим оригинал – решётчатую функцию $x(n)$.

Замечание. Задача Коши для системы линейных разностных уравнений формулируется и решается аналогично.

Пример 3.1.1. Найти решение задачи Коши:

$$x(n+2) - 4x(n+1) + 4x(n) = n\cdot 2^n,\ x(0)=1,\ x(1) = \frac{23}{6}.$$

Решение. Задано уравнение второго порядка.

Пусть $x(n) \fallingdotseq X(z)$, $n\cdot 2^n \fallingdotseq 2\cdot\dfrac{z}{(z-2)^2}$ (из таблиц).

По свойству опережения найдем

$x(n+1) \fallingdotseq zX(z) - zx(0) = zX(z) - z$;

$x(n+2) \fallingdotseq z^2X(z) - z^2x(0) - zx(1) = z^2X(z) - z^2 - \dfrac{23}{6}z.$

На основании свойства линейности получим операторное уравнение относительно функции $X(z)$:

$$z^2X(z) - z^2 - \frac{23}{6}z - 4zX(z) + 4z + 4X(z) = 2\cdot\frac{z}{(z-2)^2}.$$

Решим операторное уравнение относительно изображения $X(z)$:

$$X(z)(z^2 - 4z + 4) = 2\cdot\frac{z}{(z-2)^2} + z^2 - \frac{1}{6}z,$$

$$X(z) = \frac{2z}{(z-2)^4} + \frac{z^2}{(z-2)^2} - \frac{z}{6(z-2)^2}.$$

Найдем оригинал (решётчатую функцию) соответствующую $X(z)$:

$$\frac{2z}{(z-2)^4} \fallingdotseq \frac{1}{4}\cdot\frac{(n-2)(n-1)n}{6}\cdot 2^n.$$

(Использовали формулу таблицы $\dfrac{a^m z}{(z-a)^{m+1}} \fallingdotseq C_n^m a^n$, $a = 2$, $m = 3$).

$$\frac{z^2}{(z-2)^2} \fallingdotseq (n+1)\cdot 2^n \text{ (формула 8 таблицы);}$$

$$\frac{1}{6}\cdot\frac{z}{(z-2)^2} \fallingdotseq \frac{1}{6}n\cdot 2^{n-1} \text{ (формула 7 таблицы).}$$

Итак,

$$x(n) = \frac{(n-2)(n-1)n}{24}\cdot 2^n + (n+1)\cdot 2^n - \frac{1}{6}n\cdot 2^{n-1} = (n+1)\cdot 2^n + n^2\left(\frac{n}{24} - \frac{1}{8}\right)\cdot 2^n.$$

Пример 3.1.2. Найти решение задачи Коши для системы линейных разностных уравнений первого порядка:

$$5x(n+1) = 12x(n) + y(n),$$
$$5y(n+2) = 6x(n) + 13y(n),$$
$$x(0) = 2,\ y(0) = 1.$$

Решение. Пусть

$$x(n) \risingdotseq X(z),\ y(n) \risingdotseq Y(z).$$
$$x(n+1) \risingdotseq zX(z) - 2z,$$
$$y(n+1) \risingdotseq zY(z) - z.$$

Построим систему операторных уравнений:

$$5zX(z) - 10z = 12X(z) + Y(z),$$
$$5zY(z) - 5z = 6X(z) + 13Y(z),$$

или

$$(5z-12)X(z) - Y(z) = 10z,$$
$$-6X(z) + (5z-13)Y(z) = 5z.$$

Решая систему алгебраических уравнений относительно $X(z)$ и $Y(z)$, получим:

$$X(z) = \frac{2}{z-2} + \frac{3}{z-3},\ Y(z) = \frac{z^2}{(z-2)(z-3)}.$$

Найдем оригиналы

$$\frac{2}{z-2} \fallingdotseq 2\cdot 2^{n-1},$$

$$\frac{3}{z-3} \fallingdotseq 3\cdot 3^{n-1} = 3^n;$$ (воспользовались формулой $a^{n-k} \risingdotseq \dfrac{1}{z^{k-1}(z-a)}$);

$$\frac{z^2}{(z-2)(z-3)} \fallingdotseq -4\cdot 2^{n-1} + 9\cdot 3^{n-1} = -2^{n+1} + 3^{n+1}$$

(воспользовались формулой $f(n) = \sum\limits_{i=1}^{k}\dfrac{P(z_i)}{Q'(z_i)}z_i^{\,n-1}$, где $P(z) = z^2$;

$Q(z) = (z-2)(z-3)$).

Итак,

$$x(n) = 2^n + 3^n,$$
$$y(n) = -2^{n+1} + 3^{n+1}.$$

3.2 Применение Z-преобразования к анализу выходных процессов линейных дискретных стационарных динамических систем

Одной из задач теории автоматического регулирования и управления является задача изучения реакции динамической системы на входной сигнал, то есть нахождение выходного сигнала.

В зависимости от формы, в которой описывается математическая модель динамической системы, выделяют динамические системы:

- непрерывные, которые описываются дифференциальными уравнениями;
- дискретные – описываются разностными уравнениями;
- линейные и нелинейные – описываются линейными и нелинейными уравнениями;
- стационарные и нестационарные – описываются уравнениями с постоянными или переменными коэффициентами;
- одномерные и многомерные – у многомерных суммарное число входов и выходов больше двух.

Для решения задач анализа линейных непрерывных одномерных и многомерных стационарных динамических систем применяется преобразование Лапласа (изучено нами ранее, см. [3], [4]).

Рассмотрим применение Z-преобразования для решения задач анализа линейных *дискретных* одномерных стационарных динамических систем.

Постановка задачи:

1) задан входной сигнал $g(n)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$;

2) задана одномерная линейная дискретная стационарная динамическая система, поведение которой описывается в общем случае разностным уравнением вида

$$a_k x(n+k) + a_{k-1}x(n+k-1) + \ldots + a_0 x(n) = \\ = b_m g(n+m) + b_{m-1} g(n+m-1) + \ldots + b_0 g(n); \qquad (3.2.1)$$

3) заданы начальные условия

$$x(0) = x_0,\ x(1) = x_1,\ \ldots,\ x(k-1) = x_{k-1}, \qquad (3.2.2)$$

здесь $a_0, a_1, \ldots, a_k$; $b_0, b_1, \ldots, b_m$ – числа, заданные коэффициенты, $k \geq m$.

Требуется найти выходной сигнал $x(n)$.

Будем предполагать, что входной сигнал $g(n)$ и выходной сигнал $x(n)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, являются оригиналами. Применим Z-преобразование к обеим частям уравнения (3.2.1) с учетом свойств линейности и опережения. Получим операторное уравнение

$$(a_k z^k + \ldots + a_0)X(z) - x_0(a_k z^k + a_{k-1}z^{k-1} + \ldots + a_1 z) - x_1(a_k z^{k-1} + \ldots + a_2 z) - \\ \ldots - x_{k-1}a_k z = (b_m z^m + \ldots + b_0)G(z) - g(0)(b_m z^m + \ldots + b_1 z) - \ldots - \\ - g(m-1)b_m z, \qquad (3.2.3)$$

где $x(n) \risingdotseq X(z)$, $g(n) \risingdotseq G(z)$.

Обозначим

$$D(z) = a_k z^k + \ldots + a_0,\ M(z) = b_m z^m + \ldots + b_0,$$

$$D_H(z) = x_0(a_k z^k + \ldots + a_1 z) + x_1(a_k z^{k-1} + \ldots + a_2 z) + \ldots + x_{k-1}a_k z;$$

$$D_g(z) = g(0)(b_m z^m + \ldots + b_1 z) + g(1)(b_m z^{m-1} + \ldots + b_2 z) + \ldots + \\ + g(m-1)b_m z.$$

Тогда уравнение (3.2.3) может быть записано в виде

$$D(z)X(z) = M(z)G(z) + D_H(z) – D_g(z).$$

Из последнего уравнения находим Z-преобразование выходного сигнала:

$$X(z) = \frac{D_H(z)}{D(z)} + W(z)\,G(z) - \frac{D_g(z)}{D(z)}, \qquad (3.2.4)$$

где функция

$$W(z) = \frac{M(z)}{D(z)} = \frac{b_m z^m + \ldots + b_0}{a_k z^k + \ldots + a_0} \qquad (3.2.5)$$

является *передаточной функцией*.

Выходной сигнал $x(n)$ определяем из уравнения (3.2.4) с помощью обратного Z-преобразования.

Замечание 3.2.1 В уравнении (3.2.4) первое слагаемое описывает движение под действием ненулевых начальных условий и нулевом входном сигнале (свободное движение); второе и третье слагаемые – движение под действием входного сигнала при нулевых начальных условиях (вынужденное движение).

Если начальные условия нулевые, выходной сигнал определяется вынужденным движением.

Если $m = 0$, функция $D_g(z) = 0$,

$$X(z) = \frac{D_M(z)}{D(z)} + W(z)\cdot G(z).$$

Если $m = 0$ и начальные условия нулевые

$$X(z) = W(z)\cdot G(z).$$

Замечание 3.2.2. Если при решении задачи нет необходимости в анализе, прозвучавшем в замечании 3.2.1, то Z-преобразование выходного сигнала можно найти непосредственным разрешением уравнения (3.2.3) относительно $X(z)$.

Итак, при решении задач *анализа* выходных процессов следует придерживаться следующего алгоритма:

1) найти Z-преобразование входного сигнала

$$G(z) = Z\{g(n)\};$$

2) определить передаточную функцию $W(z)$;

3) определить функции $D(z)$, $D_H(z)$, $D_g(z)$;

4) найти Z-преобразование выходного сигнала по формуле (3.2.4);

5) найти выходной сигнал $x(n)$, применяя обратное Z-преобразование к $X(z)$.

Пример 3.2.1. Найти реакцию дискретной динамической системы, описываемой уравнением

$$x(n + 1) – 4x(n) = 4g(n),$$

на входной сигнал $g(n) = n$ при нулевых начальных условиях $x(0) = x_0 = 0$.

Решение. Предполагаем, что $x(n) \risingdotseq X(z)$.

1. Найдем Z-преобразование входного сигнала:

$$n \risingdotseq G(z) = \frac{z}{(z-1)^2}.$$

2. Построим передаточную функцию $W(z)$.

Так как $k = 1$, $m = 0$, $a_1 = 1$, $a_0 = -4$, $b_0 = 4$, то $M(z) = 4$, $D(z) = z - 4$, то

$$W(z) = \frac{4}{z-4}.$$

3. Так как $x_0 = 0$, $m = 0$, то $D_H(z) = 0$, $D_g(z) = 0$, то

$$X(z) = W(z)G(z) = \frac{4}{z-4}\cdot\frac{z}{(z-1)^2}.$$

Найдем выходной сигнал, применяя обратное Z-преобразование к построенному изображению $X(z)$. Для этого представим $X(z)$ в виде суммы простых дробей:

$$X(z) = 4z\cdot\frac{1}{z-4}\cdot\frac{1}{(z-1)^2} = \frac{4}{9}\left(\frac{z}{z-4} - 3\frac{z}{(z-1)^2} - \frac{z}{z-1}\right).$$

Используя свойства линейности и таблицу, находим

$$x(n) = \frac{4}{9}(4^n - 3n - 1).$$

Ответ: $x(n) = \frac{4}{9}(4^n - 3n - 1)$, $n = 0, 2, \ldots$

Пример 3.2.2. Найти реакцию дискретной динамической системы, описываемой уравнением

$$x(n+2) - 5x(n+1) + 6x(n) = g(n+2) - 3g(n+1) + 2g(n),$$

на входной сигнал $g(n) = 1$ при начальных условиях $x(0) = 1$, $x(1) = 2$.

Решение. Очевидно, $k = 2$, $m = 2$, $a_2 = 1$, $a_1 = -5$, $a_0 = 6$, $b_2 = 1$, $b_1 = -3$, $b_0 = 2$.

1. Найдем Z-преобразование входного сигнала:

$$G(z) = Z\{1\} = \frac{z}{z-1}.$$

2. Построим передаточную функцию $W(z)$:

$$W(z) = \frac{b_2z^2 + b_1z + b_0}{a_2z^2 + a_1z + a_0} = \frac{z^2 - 3z + 2}{z^2 - 5z + 6} = \frac{(z-1)(z-2)}{(z-2)(z-3)} = \frac{z-1}{z-3}.$$

Определим

$D_H(z) = z^2 - 3z$, $D(z) = z^2 - 5z + 6$,

$D_g(z) = g(0)(b_2z^2 + b_1z) + g(1)b_2z = z^2 - 3z + z = z^2 - 2z$, $g(0) = g(1) = 1$.

3. Найдем Z-преобразование выходного сигнала по формуле (3.2.4):

$$X(z) = \frac{z^2 - 3z}{z^2 - 5z + 6} + \frac{z-1}{z-3}\cdot\frac{z}{z-1} - \frac{z^2 - 2z}{z^2 - 5z + 6} = \frac{z}{z-2}$$

(выполнили действия над дробями в правой части соотношения).

4. Найдем выходной сигнал:

$$\frac{z}{z-2} \risingdotseq 2^n.$$

Ответ: $x(n) = 2^n$, $n = 0, 2, \ldots$

Задачи для самостоятельного решения

Применяя Z-преобразование, найти решение задач.

1. $x(n + 2) - 3x(n + 1) + 2x(n) = 0$,
$x(0) = 2$, $x(1) = 3$.

2. $x(n + 2) - 5x(n + 1) + 6x(n) = 0$,
$x(0) = 1$, $x(1) = 2$.

3. $x(n + 3) - 5x(n + 2) + 8x(n + 1) - 4x(n) = 0$,
$x(0) = 0$, $x(1) = 2$, $x(2) = 1$.

4. $x(n + 2) - 5x(n + 1) + 6x(n) = g(n)$, $g(n) = 1$,
$x(0) = 0$, $x(1) = 0$.

5. $\begin{cases} x(n+1) = -x(n) - 2y(n), \\ y(n+1) = 3x(n) + 4y(n), \end{cases}$
$x(0) = 3$, $y(0) = -4$.

6. $\begin{cases} x(n+1) = x(n) - 3y(n), \\ y(n+1) = x(n) + y(n), \end{cases}$
$x(0) = \sqrt{3}$, $y(0) = 1$.

7. $\begin{cases} x(n+1) + y(n) = 1, \\ y(n+1) + 4x(n) = 0, \end{cases}$
$x(0) = y(0) = 0$.

8. $x(n + 2) - 5x(n + 1) + 6x(n) = g(n + 1) - 3g(n)$, $g(n) = 1$,
$x(0) = 1$, $x(1) = 2$.

Решить задачу анализа выходных процессов.

9. $\begin{cases} x(n+1) = 4x(n) - y(n) + g(n), g(n) = 1, \\ y(n+1) = x(n) + 2y(n), \end{cases}$
$x(0) = \frac{7}{4}$, $y(0) = \frac{13}{4}$.

10. $\begin{cases} x(n+1) - x(n) + y(n) = 3^n, \\ y(n+1) + 2x(n) = -3^n, \end{cases}$
$x(0) = 3$, $y(0) = 0$.

Ответы:

1. $x(n) = 1 + 2^n$;

2. $x(n) = 2^n$;

3. $x(n) = -7 + 7\cdot 2^n - \frac{5}{2} n\cdot 2^n$;

4. $x(n) = \frac{1}{2} - 2^n + \frac{1}{2} 3^n$;

5. $x(n) = 1 + 2^{n+1}$, $y(n) = -1 - 3 \cdot 2^{n+1}$;

6. $x(n) = -\sqrt{3} \cdot 2^n \cdot \sin\frac{\pi n}{3} + \sqrt{3} \cdot 2^n \cdot \cos\frac{\pi n}{3}$,

$y(k) = 2^n \cdot \cos\frac{\pi n}{3} + 2^n \cdot \sin\frac{\pi n}{3}$.

7. $x(n) = -\frac{1}{3} + \frac{1}{12}(-2)^{n+1} + 2^{n-1}$,

$y(n) = \frac{4}{3} - \frac{1}{3}(-2)^n - 2^n$.

8. $x(n) = 3 \cdot 2^n - 1 - 3^n$;

9. $x(n) = 2 \cdot 3^n - \frac{1}{3} n \cdot 3^n - \frac{1}{4}$, $y(n) = 3^{n+1} - \frac{1}{3} n \cdot 3^n + \frac{1}{4}$.

10. $x(n) = 3^n + 2^n + (-1)^n$, $y(n) = (-2)^n + 2 \cdot (-1)^n - 3^n$, $n = 0, 1, \ldots$

Список литературы

1 Жевняк Р.М., Карпук А.А. Высшая математика: учебн. пособие для втузов. Ч. 4 – Минск: Выш. шк., 1988. – 253 с.

2. Пантелеев А.В., Якимова А.С. Теория функции комплексного переменного и операционное исчисление в примерах и задачах: учебн. пособие. – М.: Высшая школа 2001. – 445 с.

3. Араманович И.Г., Лунц Г.Л., Эльсгольц Л.Э. Функции комплексного переменного. Операционное исчисление. Теория устойчивости. – М.: Наука, 1969.

4. Деч Г. Руководство к практическому применению преобразования Лапласа и Z-преобразования. – М.: Наука, 1971.

Приложение А

Таблица А1 – Основные *Z*-преобразования

№	$f(n)$	$F(z)$
1	1	$\dfrac{z}{z-1}$
2	$(-1)^n$	$\dfrac{z}{z+1}$
3	$e^{\alpha n}$	$\dfrac{z}{z-e^{\alpha}}$
4	a^n	$\dfrac{z}{z-a}$
5	$a^n e^{\alpha n}$	$\dfrac{z}{z-ae^{\alpha}}$
6	$\dfrac{a^n}{n!}$	$e^{\frac{a}{z}}$
7	na^{n-1}	$\dfrac{z}{(z-a)^2}$
8	$(n+1)a^n$	$\dfrac{z^2}{(z-a)^2}$
9	$a^n \sin \beta n$	$\dfrac{az\sin\beta}{z^2-2a\cos\beta+a^2}$
10	$a^n \cos \beta n$	$\dfrac{z(z-a\cos\beta)}{z^2-2a\cos\beta+a^2}$
11	n	$\dfrac{z}{(z-1)^2}$
12	n^2	$\dfrac{z(z+1)}{(z-1)^2}$
13	$\sum\limits_{k=0}^{n} f(k)$	$\dfrac{z}{(z-1)}F(z)$
14	$C_n^k,\ k=1,2,\ldots$	$\dfrac{z}{(z-1)^{k+1}}$
15	$C_n^k a^n$	$\dfrac{a^m z}{(z-a)^{m+1}}$
16	$f(n-k)$	$\dfrac{F(z)}{z^k}$

Продолжение таблицы А1

№	$f(n)$	$F(z)$
17	$f(n+k)$	$z^k F(z) - \sum_{i=0}^{k-1} f(i) z^{k-i}$
18	$nf(n)$	$-zF'(z)$
19	$a^{-n}f(n)$	$F(az)$
20	$f(n)*g(n)$	$F(z)G(z)$

Учебное издание

РАЗНОСТНЫЕ УРАВНЕНИЯ.
Z-ПРЕОБРАЗОВАНИЕ И ЕГО ПРИМЕНЕНИЯ

Учебно-методическое пособие

Составители:
Подолян Светлана Владимировна
Юрченко Ирина Викторовна

Редактор *А.А. Щербакова*
Технический редактор *Т.В. Багуцкая*

Подписано в печать . 2012. Формат 60×84 1/16.
Бумага офсетная. Гарнитура Таймс. Ризография.
Усл.печ.л. .   Уч.-изд. .
Тираж экз.   Заказ .

Учреждение образования
«Могилевский государственный университет продовольствия».
ЛИ № 02330/630 от 31.01.2012.
Пр-т Шмидта, 3, 212027, Могилев.

Отпечатано в учреждении образования
«Могилевский государственный университет продовольствия».
Пр-т Шмидта, 3, 212027, Могилев.