Министерство образования Республики Беларусь

Учреждение образования
«Могилевский государственный университет продовольствия»

Кафедра высшей математики

# ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

# ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ. СЛУЧАЙНЫЕ СОБЫТИЯ

Практикум по решению задач
для студентов всех форм обучения и специальностей

Могилев
МГУП
2016

УДК 519.21
ББК 22.1

Рассмотрено и рекомендовано к изданию
на заседании кафедры высшей математики
Протокол № 8 от 09.02.2016 г.

Составители:
старший преподаватель Лох С. В.
старший преподаватель Юрченко И. В.
ассистент Гребенцов Ю. М.

Рецензент
к.ф.-м. н., доцент Подолян С. В.

**УДК 51**
**ББК 22.1**

## Содержание

# 1 ЭЛЕМЕНТЫ КОМБИНАТОРИКИ

## Краткая теория

Многие задачи классической теории вероятностей решаются с использованием **комбинаторики** – раздела математики, в котором изучаются различные соединения (комбинации) элементов конечных множеств.

Общим термином *«соединения»* будем называть три вида комбинаций, составляемых из некоторого числа *различных* элементов, принадлежащих одному и тому же множеству (например, буквы алфавита, книги в библиотеке, машины на стоянке и т.д.).

**Правило умножения:** ***если объект А может быть выбран $k$ способами, а объект В может быть выбран $l$ способами, то пара объектов А и В может быть выбрана $k \cdot l$ способами.***

**Правило сложения:** ***если объект А может быть выбран $k$ способами, а объект В может быть выбран $l$ способами, причем первые и вторые способы не пересекаются, то любой из пары объектов А или В может быть выбран $k + l$ способами.***

**1 Перестановки без повторений.** Возьмём ***n*** различных элементов: $a_1$, $a_2$, $a_3$, …, $a_n$. Будем переставлять их всеми возможными способами, сохраняя их количество и меняя лишь порядок их расположения. Каждая из полученных таким образом комбинаций называется *перестановкой*. Общее количество *перестановок из **n** элементов* равно произведению первых ***n*** натуральных чисел, обозначается $P_n$ и находится по формуле

$$P_n = 1 \cdot 2 \cdot \mathbf{K} \cdot (n-1) \cdot n = n!.$$

Символ $n!$ (читается «*эн факториал*»), при этом полагают, что

$$\mathbf{0! = 1} \text{ и } \mathbf{1! = 1}.$$

**2 Размещения без повторений.** Будем составлять комбинации из ***m*** различных элементов, взятых из множества, состоящего из ***n*** элементов, располагая их в различном порядке. Полученные комбинации называются *размещениями из $n$ элементов по $m$ без повторений*, обозначаются $A_n^m$, и их количество находится по формуле

$$A_n^m = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \mathbf{K} \cdot [n-(m-1)] = \frac{n!}{(n-m)!}.$$

**3 Сочетания без повторений.** Будем составлять комбинации из $m$ различных элементов, взятых из множества, состоящего из $n$ элементов, *не принимая во внимание порядок расположения этих* $m$ *элементов*. Полученные комбинации называются *сочетаниями из* $n$ *элементов по* $m$ *без повторений*, обозначаются $C_n^m$, и их количество находится по формуле

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!},\ 0 < m \le n.$$

**Пример 1.** Сколькими способами можно рассадить 5 человек за праздничным столом?

**Решение.** Так как при рассадке за столом количество людей сохраняется и меняется лишь порядок их расположения, то каждая из полученных таким образом комбинаций является *перестановкой*. Число таких перестановок находится по формуле

$$P_n = n!,$$

где $n = 5$.

Получаем: $P_5 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$.

**Ответ:** 120 способами.

**Пример 2.** Сколькими способами 3 медали (за 1-е, 2-е и 3-е места) могут быть распределены между 10 участниками?

**Решение.** Так как каждый участник соревнований может получить не более одной награды и «призовые тройки» отличаются друг от друга либо составом, либо порядком их следования, то эти комбинации являются размещениями из $n$ элементов по $m$ элементов, где $n = 10$, а $m = 3$. Число таких комбинаций находим по формуле

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}.$$

Получаем: $A_{10}^3 = \frac{10!}{(10-3)!} = \frac{10!}{7!} = 8 \cdot 9 \cdot 10 = 720$.

**Ответ:** 720 способами.

**Пример 3.** Группу из 20 студентов нужно разделить на 3 бригады, причем в первую бригаду должны входить 3 человека, во вторую – 5 и в третью – 12. Сколькими способами это можно сделать?

**Решение.** Формируя первую бригаду, отбирают 3 человека из 20, формируя вторую – 5 из оставшихся 17, формируя третью – 12 из оставшихся 12. Для выборок важен только состав (роли членов бригады не различаются).

Эти комбинации являются сочетаниями из $\boldsymbol{n}$ элементов по $\boldsymbol{m}$ элементов, их число:

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}.$$

По условию задачи выборка сложная (из трех бригад), поэтому воспользуемся правилом умножения.

Тогда получаем:

$$N = C_{20}^3 \cdot C_{17}^5 \cdot C_{12}^{12} = \frac{20!}{3!(20-3)!} \cdot \frac{17!}{5!(17-5)!} \cdot \frac{12!}{12!(12-12)!} =$$

$$= \frac{20!}{3!\cdot 17!} \cdot \frac{17!}{5!\cdot 12!} \cdot \frac{12!}{12!\cdot 0!} = \frac{18\cdot 19\cdot 20}{1\cdot 2\cdot 3} \cdot \frac{13\cdot 14\cdot 15\cdot 16\cdot 17}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} \cdot \frac{1}{1} =$$

$$= \frac{13\cdot 14\cdot 15\cdot 16\cdot 17\cdot 18\cdot 19\cdot 20}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} = 7054320.$$

**Ответ:** 7054320 способами.

**Задачи для самостоятельного решения**

1.1 Сколькими способами студент может выбрать в библиотеке три книги из пяти ему предложенных?

1.2 В профком избрано 9 человек. Из них надо выбрать председателя, заместителя и секретаря. Сколькими способами это можно сделать?

1.3 На кафедре 8 преподавателей. Сколькими способами можно составить расписание консультаций на 8 дней, если каждый преподаватель дает консультацию один раз ?

1.4 Из 12 разведчиков в разведку необходимо отправить троих. Сколькими способами можно сделать выбор?

1.5 Рассыльному поручено разнести 6 телеграмм по шести различным адресам. Сколько различных маршрутов он может выбрать?

1.6 Студенты данного курса изучают 7 учебных дисциплин. В расписание занятий можно поставить 3 различные дисциплины в день. Сколько существует способов составления расписания на этот день?

1.7 Каждая из букв П, 0, Л, А, К, Н написана на одной из шести карточек, которые перемешиваются и наудачу раскладываются в ряд. Сколькими способами можно их разложить?

1.8 Сколько различных делегаций по четыре человека можно составить из группы в 15 человек?

1.9 В хозяйстве 4 бригады. Сколькими способами можно распределить по бригадам 4 бригадиров?

1.10 Студент пришел на экзамен, зная лишь 35 из 40 вопросов программы. Сколько существует способов задать студенту 3 вопроса, которых он не знает?

1.11 В коробке находятся 15 семян ржи и 10 семян пшеницы. Наудачу берут 2 зерна. Сколько существует способов взять: а) только семена ржи; б) только семена пшеницы; в) одно зерно ржи, одно пшеницы?

1.12 Из 20 человек нужно выделить 7 для полевых работ. Сколькими способами это можно сделать?

1.13 Сколько различных четырехзначных чисел можно написать при помощи цифр 1, 2, 3, 4, если каждая цифра входит в изображение числа только один раз?

1.14 В спортклубе 10 лыжников и 8 лыжниц. Сколькими способами можно сформировать команду из 4 лыжников и 3 лыжниц?

1.15 Сколькими способами можно составить трехцветный полосатый флаг, если имеется материал 7 различных цветов?

1.16 Сколькими способами можно расположить на книжной полке 8 различных книг?

1.17 В полуфинале первенства по шахматам участвуют 20 человек, а в финал выходят лишь трое. Каково число возможных партий полуфинала?

1.18 Дано 20 точек, никакие три из них не лежат на одной прямой. Сколько прямых можно провести, соединяя точки попарно?

1.19 Студенту необходимо сдать 4 экзамена на протяжении 16 дней. Сколькими способами можно составить расписание сессии?

1.20 В партии имеется 8 изделий обычного качества и 4 высшего. Сколькими способами из партии можно выбрать 6 изделий так, чтобы 3 из них были высшего качества?

1.21 Для производственной практики студентов предоставлено 10 мест в Минскую область, 5 – в Гомельскую, 8 – в Витебскую, 9 – в Могилевскую, 7 – в Брестскую и 11 – в Гродненскую. Сколько имеется случаев, что три определенных студента попадут на практику в одну область?

1.22 Сколько словарей надо издать, чтобы можно было непосредственно выполнять переводы с любого из пяти языков – русского, английского, французского, немецкого, испанского – на любой другой из этих пяти языков?

1.23 На окружности отмечено 8 различных точек. Сколько различных треугольников с вершинами в данных точках можно построить?

1.24 Из 5 лучших в хозяйстве свиноматок надо выбрать трех для выставки. Сколькими способами можно сделать выбор?

1.25 Сколькими способами можно разместить 4 больных в четырехместной палате?

1.26 Найти число случаев распределения 5 пригласительных билетов среди 25 студентов.

1.27 Встретились 10 выпускников и обменялись рукопожатиями. Сколько было сделано всего рукопожатий?

1.28 Девять студентов решили обменяться фотографиями друг с другом. Сколько фотографий надо было для этого напечатать?

1.29 Агрохимик проверяет 6 видов минеральных удобрений. Ему нужно провести несколько опытов по изучению совместного влияния любой тройки удобрений. Для каждого опыта берется участок 0,25 га. На какой площади проводится все исследование?

1.30 Из цифр 1, 2, 3, 4, 5 составлены всевозможные пятизначные числа без повторения цифр. Сколько среди них таких чисел, которые начинаются цифрой 4?

1.31 Сколькими способами можно распределить первые три премии на конкурсе, в котором принимает участие 23 человека?

1.32 Для передачи сигналов вывешиваются одно под другим три разноцветных полотнища. Сколько разных сигналов можно передать при наличии белого, желтого, красного, зеленого, черного и синего полотнищ?

**Дополнительные задачи**

1.33 Сколько человек участвовало в шахматном турнире, если известно, что каждый участник сыграл с остальными по одной партии, а всего было сыграно 210 партий?

1.34 Имеется 12 различных конфет. Сколькими способами можно из них составить набор, если в наборе должно быть четное число конфет?

1.35 Сколькими способами группу из 15 человек можно разделить на две группы так, чтобы в одной было 4 человека, а в другой 11 ?

1.36 На собрании должно выступить 5 человек А, Б, В, Г и Д. Сколькими способами можно расположить их в списке ораторов при условии, что А должен выступить непосредственно перед Б?

1.37 Сколько существует различных пятизначных чисел с неповторяющимися цифрами?

## 2 КЛАССИЧЕСКОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТИ

### Краткая теория

### Виды событий

Событие $A$ называется ***случайным событием***, если при осуществлении совокупности условий оно может либо произойти, либо не произойти.

Случайные события $A_1, A_2, \ldots, A_n$ называются ***независимыми в совокупности***, если вероятность появления любого из них не зависит от того, произошли ли какие-либо другие из этих рассматриваемых событий или нет.

События $A_1, A_2, \ldots, A_n$ называются ***попарно несовместными***, если в одном и том же опыте никакие два из них не могут произойти вместе.

События $A_1, A_2, \ldots, A_n$ образуют ***полную группу***, если в результате испытания появится хотя бы одно из них.

Вероятность – одно из основных понятий теории вероятностей. Это безразмерная величина, выражающая объективную возможность наступления некоторого события и обозначается числом. Существуют несколько определений вероятности. Приведем определение, которое называют *классическим*.

***Вероятностью случайного события A*** называют отношение числа благоприятствующих этому событию исходов $\boldsymbol{m}$ к общему числу всех равновозможных несовместных элементарных исходов $\boldsymbol{n}$, образующих полную группу, т.е.:

$$P(A) = \frac{m}{n}.$$

***Свойства вероятности***

1 ***Вероятность достоверного события $\Omega$ равна единице, т.е.*** $P(\Omega) = 1$***;***

2 ***Вероятность невозможного события Ø равна нулю, т.е.*** $P(\varnothing) = 0$;

3 ***Вероятность случайного события A – есть положительное число, заключенное между нулем и единицей, т.е.:***

$$0 \le P(A) \le 1.$$

***Относительной частотой события A*** называют отношение числа испытаний, в которых событие появилось к общему числу фактически произведенных испытаний, т.е.:

$$W(A) = \frac{m}{n},$$

где $m$ – число испытаний, в которых событие $A$ наступило; $n$ – общее число произведенных испытаний.

**Пример 4.** В кабинете работают 6 мужчин и 4 женщины. Для переезда наудачу отобраны 7 человек. Найти вероятность того, что среди отобранных лиц три женщины.

**Решение.** Пусть $A$ – событие «Среди отобранных лиц три женщины».

Общее число возможных исходов равно числу способов, которыми можно отобрать 7 человек из 10, т.е.

$$n = C_{10}^{7} = \frac{10!}{7!(10-7)!} = \frac{720}{6} = 120.$$

Найдем число исходов, благоприятствующих интересующему нас событию $A$: трех женщин можно выбрать из четырех $C_4^3 = \frac{4!}{3!(4-3)!} = 4$ способами; при этом остальные четыре человека должны быть мужчинами, их можно отобрать $C_6^4 = \frac{6!}{4!(6-4)!} = 15$ способами. Следовательно, число благоприятствующих исходов равно $m = C_4^3 \cdot C_6^4 = 4 \cdot 15 = 60$.

Тогда искомая вероятность события $A$

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{60}{120} = \frac{1}{2}.$$

**Ответ:** $P(A) = \frac{1}{2}$.

**Задачи для самостоятельного решения**

2.1 Определить вероятность того , что во взятом наудачу трехзначном числе все цифры окажутся одинаковыми.

2.2 Брошены две игральные кости. Какова вероятность того, что цифра 6 появится хотя бы на одной грани?

2.3 Из тщательно перемешанных 28 косточек домино наудачу берется одна. Какова вероятность того, что сумма очков на ней будет не менее девяти?

2.4 В урне четыре белых и пять черных шаров. Наугад вынимают два шара. Найти вероятности событий: а) оба шара белые; б) оба шара черные; в) один белый.

2.5 Из букв разрезной азбуки составлено слово «бухгалтер». Перемешаем карточки, затем, вытаскивая их наудачу, кладем в порядке вытаскивания три из них. Какова вероятность того, что при этом получится слово «луг»?

2.6 В студенческой группе 12 дружинников, среди них 5 девушек. Путем жеребьевки должны быть избраны 4 человека на дежурство. Чему равна вероятность того, что среди них окажутся все юноши?

2.7 Бросаются две игральные кости. Какова вероятность того, что сумма выпавших очков: а) не больше пяти; б) не меньше 9?

2.8 В ящике 30 яблок. Из них пять поражены болезнью в скрытой форме. Наугад берут 3 яблока. Вычислить вероятности событий: а) 3 яблока поражены болезнью; б) только одно яблоко поражено болезнью.

2.9 В группе из 30 студентов на контрольной работе получили: оценку «отлично» – 8 студентов, оценку «хорошо» – 10 студентов, оценку «удовлетворительно» – 9 студентов, оценку «неудовлетворительно» – 3 студента. Какова вероятность того, что три студента, вызванные к доске, справились с контрольной работой?

2.10 В хозяйстве имеется 6 гусеничных и 4 колесных трактора. Для выполнения некоторой работы произвольно выбираются два трактора. Найти вероятность того, что это будут: а) гусеничные тракторы; б) колесные тракторы; в) один гусеничный, один колесный трактор.

2.11 Из разрезной азбуки, в которой имеется 33 карточки с различными буквами алфавита, вынимаются 5 карточек. Какова вероятность того, что 5 букв, расположенные в порядке появления, составят слово «рынок»?

2.12 В мастерскую для ремонта поступило 10 механических часов. Известно, что 6 из них нуждается в общей чистке механизма. Мастер берет первые попавшиеся двое часов. Найти вероятность того, что взятые часы не нуждаются в общей чистке механизма.

2.13 В хозяйстве 5 участков земли, которые необходимо занять под 5 культур. Какова вероятность того, что произвольное закрепление культур за участками совпадает с запланированным?

2.14 На тепловой электростанции 14 сменных инженеров, из них три – женщины. В смену занято три человека. Найти вероятность того, что в случайно выбранную смену окажутся: а) все мужчины; б) все женщины.

2.15 На восьми одинаковых карточках написаны соответственно числа: 2, 4, 6, 7, 8, 11, 12, 13. Карточки перемешиваются, а затем наугад берутся две из них. Найти вероятность того, что дробь, образованная из двух взятых чисел, будет сократимой.

2.16 В партии, состоящей из 10 изделий, 4 бракованных. Для контроля берутся 2 изделия. Найти вероятность того, что: а) оба они бракованные; б) среди них одно бракованное.

2.17 Из 10 билетов лотереи 2 выигрышных. Определить вероятность того, что среди взятых наудачу трех билетов: а) нет ни одного выигрышного; б) один выигрышный.

2.18 На экзамене студенту предлагается билет, состоящий из 3 вопросов. Из 60 вопросов программы студент знает 50. Какова вероятность того, что взятый студентом билет будет состоять: а) из известных ему вопросов; б) из невыученных вопросов.

2.19 Среди 10 студентов, сидящих в первом ряду, трое не подготовлены к занятиям. Найти вероятность того, что среди 7 опрошенных студентов двое не готовы к занятиям.

2.20 Из колоды в 36 карт берутся наудачу 3 карты. Вычислить вероятность того, что среди вынутых карт будет один туз.

2.21 Библиотечка состоит из 10 различных книг, причем пять книг стоят по 40 тыс. рублей каждая, три книги – по 10 тыс. рублей и две книги – по 30 тыс. рублей. Найти вероятность того, что взятые наудачу две книги стоят 50 тыс. рублей.

2.22 Для производственной практики на 30 студентов предоставлено 15 мест в Могилевскую область, 8 – в Гомельскую и 7 – в Витебскую. Какова вероятность того, что два определенных студента попадут в одну область?

2.23 На десяти карточках напечатаны цифры от 0 до 9. Найти вероятность того, что три наудачу взятые и поставленные в ряд карточки составят число 197.

2.24 В мешочке 5 одинаковых кубиков, на гранях каждого из которых одна из букв: о, е, р, н, з. Найти вероятность того, что на вынутых по одному и расположенных в одну линию кубиках можно будет прочесть слово «зерно».

2.25 В урне 5 белых и 3 черных шара. Из нее наудачу извлечены 4 шара. Какова вероятность того, что среди них окажутся 2 белых шара?

2.26 В ящике содержится 100 жетонов с номерами от 1 до 100. Определить вероятность того, что номер взятого наудачу жетона не будет делиться ни на 2, ни на 3.

2.27 В бассейне находятся 10 лещей и 15 карпов. Какова вероятность того, что три выловленные наудачу рыбы окажутся карпами?

2.28 Преподаватель вызвал через старосту на обязательную консультацию трех студентов из шести отстающих. Староста забыл фамилии вызванных студентов и послал наудачу трех отстающих студентов. Какова вероятность того, что посланы вызванные студенты?

2.29 В группе из 8 спортсменов шесть мастеров спорта. Найти вероятность того, что из двух случайным образом отобранных спортсменов хотя бы один мастер спорта.

2.30 Из пяти букв разрезной азбуки составлено слово «песня». Затем буквы перемешаны и собраны в произвольном порядке. Найти вероятность того, что снова получится слово «песня».

2.31 Из восьми книг две художественные. Найти вероятность того, что среди взятых наугад четырех книг хотя бы одна художественная.

2.32 В магазине из 100 пар зимних сапог одного фасона 10 коричневого цвета, а остальные – черного. Произвольно отбирают 5 пар сапог. Найти вероятность того, что все выбранные сапоги – черного цвета.

**Дополнительные задачи**

2.33 Изготовлено 50 изделий, из которых 20 % – изделия высшего сорта. Проверяются 5 изделий. Определить вероятность того, что среди них изделия высшего сорта будут составлять также 20 %.

2.34 На карточках написаны цифры 1, 2, 3, 5, 6, 7. Какова вероятность того, что при извлечении двух карточек сумма цифр будет четной?

2.35 В ящике лежат 10 заклепок, отличающихся друг от друга только материалом: 5 железных, 3 латунных и 2 медных. Наугад берутся 2 заклепки. Какова вероятность того, что они будут из разного материала?

2.36 Десять книг расставлены на полке наудачу. Определить вероятность того, что три определенные книги окажутся поставленными вместе.

2.37 При игре в покер из колоды в 52 карты выбирают 5 карт. Найти вероятность того, что при этом получится набор карт «десятка, валет, дама, король и туз» одной масти.

## 3 ТЕОРЕМЫ СЛОЖЕНИЯ И УМНОЖЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

### Краткая теория

Рассмотрим $n$ случайных событий $A_1, A_2, \ldots, A_n$.

***Суммой (объединением) событий $A_1, A_2, \ldots, A_n$*** называется событие

$$B = A_1 + A_2 + \ldots + A_n = \sum_{i=1}^{n} A_i, \quad \left( B = \bigcup_{i=1}^{n} A_i \right),$$

состоящее в появлении хотя бы одного из рассматриваемых событий.

***Произведением (совмещением) событий $A_1, A_2, \ldots, A_n$*** называется событие

$$C = A_1 \cdot A_2 \cdot \ldots \cdot A_n = \prod_{i=1}^{n} A_i,$$

обозначающее появление всех перечисленных событий.

**Теорема.** *Вероятность суммы попарно несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий:*

$$P(A_1 + A_2 + \ldots + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n).$$

События $A$ и $\overline{A}$ называются ***противоположными***, если это два единственно возможных события в данном испытании. Событие $\overline{A}$ состоит в ненаступлении события $A$. Очевидно, события $A$ и $\overline{A}$ несовместны, поэтому $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.

**Теорема.** *Вероятность произведения случайных событий* $A_1, A_2, \ldots, A_n$, *независимых в совокупности, равна произведению их вероятностей:*

$$P(A_1 \cdot A_2 \cdot \ldots \cdot A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot \ldots \cdot P(A_n).$$

**Теорема.** *Вероятность совместного появления двух зависимых событий равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого, вычисленную в предположении, что первое событие уже наступило:*

$$P(A_1 \cdot A_2) = P(A_1) \cdot P_{A_1}(A_2).$$

**Пример 5.** Вероятности попадания в цель каждым из четырёх независимо друг от друга стреляющих стрелков соответственно равны: 0,9; 0,8; 0,6; 0,7. Стрелки выстрелили в цель одновременно. Найти вероятность того, что произойдёт:

а) хотя бы одно попадание;

б) не более двух попаданий.

**Решение.** Пусть $A_i$, $i$ = 1, 2, 3, 4 – события, означающие попадания в цель каждым из четырёх стрелков соответственно, которые являются независимыми в совокупности. Тогда $P(A_1) = 0{,}8$, $P(A_2) = 0{,}9$, $P(A_3) = 0{,}6$, $P(A_4) = 0{,}7$. Обозначим $\overline{A_i}$, $i$ = 1, 2, 3, 4 – события, означающие непопадания в цель каждым из четырёх стрелков.

$P(\overline{A_1}) = 1 - 0{,}8 = 0{,}2$; $P(\overline{A_2}) = 1 - 0{,}9 = 0{,}1$; $P(\overline{A_3}) = 1 - 0{,}6 = 0{,}4$;

$P(\overline{A_4}) = 1 - 0{,}7 = 0{,}3$.

а) Событие, состоящее в попадании в цель хотя бы одним стрелком, есть сумма событий $A_1 + A_2 + A_3 + A_4$. Противоположным для этого события является событие, состоящее в том, что ни один из стрелков не попадёт в цель. Оно может быть представлено в виде произведения независимых в совокупности событий: $\overline{A_1} \cdot \overline{A_2} \cdot \overline{A_3} \cdot \overline{A_4}$. По теореме о вероятности произведения независимых в совокупности событий, имеем:

$$P(A_1 + A_2 + A_3 + A_4) = 1 - P(\overline{A_1 + A_2 + A_3 + A_4}) = 1 - P(\overline{A_1} \cdot \overline{A_2} \cdot \overline{A_3} \cdot \overline{A_4}) =$$
$$= 1 - P(\overline{A_1}) \cdot P(\overline{A_2}) \cdot P(\overline{A_3}) \cdot P(\overline{A_4}) = 1 - 0{,}2 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}3 = 0{,}9976.$$

б) Событие $A$, состоящее в том, что будет не более двух попаданий, есть сумма несовместных событий, означающих, что попаданий будет или ровно 2, или только 1, или вообще не будет попаданий. В символьной записи имеем:

$$A = (A_1 \cdot A_2 \cdot \overline{A_3} \cdot \overline{A_4} + A_1 \cdot \overline{A_2} \cdot A_3 \cdot \overline{A_4} + A_1 \cdot \overline{A_2} \cdot \overline{A_3} \cdot A_4 + \overline{A_1} \cdot A_2 \cdot A_3 \cdot \overline{A_4} +$$
$$+ \overline{A_1} \cdot A_2 \cdot \overline{A_3} \cdot A_4 + \overline{A_1} \cdot \overline{A_2} \cdot A_3 \cdot A_4) + (A_1 \cdot \overline{A_2} \cdot \overline{A_3} \cdot \overline{A_4} + \overline{A_1} \cdot A_2 \cdot \overline{A_3} \cdot \overline{A_4} +$$

$$+\ \overline{A_1}\cdot\overline{A_2}\cdot A_3\cdot\overline{A_4}\ +\ \overline{A_1}\cdot\overline{A_2}\cdot\overline{A_3}\cdot A_4)+\ \overline{A_1}\cdot\overline{A_2}\cdot\overline{A_3}\cdot\overline{A_4}\ .$$

Применяя теорему о вероятности суммы несовместных событий и теорему о вероятности произведения независимых событий, получим:

$$P(A) = P(A_1\cdot A_2\cdot\overline{A_3}\cdot\overline{A_4}) + P(A_1\cdot\overline{A_2}\cdot A_3\cdot\overline{A_4}) + P(A_1\cdot\overline{A_2}\cdot\overline{A_3}\cdot A_4) + P(\overline{A_1}\cdot A_2\cdot A_3\cdot\overline{A_4}) +$$

$$+ P(\overline{A_1}\cdot A_2\cdot\overline{A_3}\cdot A_4)+ P(\overline{A_1}\cdot\overline{A_2}\cdot A_3\cdot A_4) + P(A_1\cdot\overline{A_2}\cdot\overline{A_3}\cdot\overline{A_4}) + P(\overline{A_1}\cdot A_2\cdot\overline{A_3}\cdot\overline{A_4}) +$$

$$+ P(\overline{A_1}\cdot\overline{A_2}\cdot A_3\cdot\overline{A_4}) + P(\overline{A_1}\cdot\overline{A_2}\cdot\overline{A_3}\cdot A_4) + P(\overline{A_1}\cdot\overline{A_2}\cdot\overline{A_3}\cdot\overline{A_4}) =$$

$$= P(A_1)\cdot P(A_2)\cdot P(\overline{A_3})\cdot P(\overline{A_4}) + P(A_1)\cdot P(\overline{A_2})\cdot P(A_3)\cdot P(\overline{A_4}) +$$

$$+ P(A_1)\cdot P(\overline{A_2})\cdot P(\overline{A_3})\cdot P(A_4) + P(\overline{A_1})\cdot P(A_2)\cdot P(A_3)\cdot P(\overline{A_4}) +$$

$$+ P(\overline{A_1})\cdot P(A_2)\cdot P(\overline{A_3})\cdot P(A_4)+P(\overline{A_1})\cdot P(\overline{A_2})\cdot P(A_3)\cdot P(A_4) +$$

$$+ P(A_1)\cdot P(\overline{A_2})\cdot P(\overline{A_3})\cdot P(\overline{A_4}) + P(\overline{A_1})\cdot P(A_2)\cdot P(\overline{A_3})\cdot P(\overline{A_4}) +$$

$$+ P(\overline{A_1})\cdot P(\overline{A_2})\cdot P(A_3)\cdot P(\overline{A_4}) + P(\overline{A_1})\cdot P(\overline{A_2})\cdot P(\overline{A_3})\cdot P(A_4) +$$

$$+ P(\overline{A_1})\cdot P(\overline{A_2})\cdot P(\overline{A_3})\cdot P(\overline{A_4}) = 0{,}8\cdot 0{,}9\cdot 0{,}4\cdot 0{,}3 + 0{,}8\cdot 0{,}1\cdot 0{,}6\cdot 0{,}3 + 0{,}8\cdot 0{,}1\cdot 0{,}4\cdot 0{,}7 +$$

$$+ 0{,}2\cdot 0{,}9\cdot 0{,}6\cdot 0{,}3 + 0{,}2\cdot 0{,}9\cdot 0{,}4\cdot 0{,}7 + 0{,}2\cdot 0{,}1\cdot 0{,}6\cdot 0{,}7 + 0{,}8\cdot 0{,}1\cdot 0{,}4\cdot 0{,}3 +$$

$$+ 0{,}2\cdot 0{,}9\cdot 0{,}4\cdot 0{,}3 + 0{,}2\cdot 0{,}1\cdot 0{,}6\cdot 0{,}3 + 0{,}2\cdot 0{,}1\cdot 0{,}4\cdot 0{,}7 + 0{,}2\cdot 0{,}1\cdot 0{,}4\cdot 0{,}3 = 0{,}2572.$$

**Ответ:** а) 0,9976; б) 0,2572.

**Пример 6.** У сборщика имеется 4 конусных и 9 эллиптических валиков. Сборщик взял один валик, а затем второй. Найти вероятность того, что первый из взятых валиков – конусный, а второй – эллиптический.

**Решение.** Вероятность того, что первый валик окажется конусным (событие $A$), равна

$$P(A) = \frac{4}{13}.$$

Вероятность того, что второй валик окажется эллиптическим (событие $B$), вычисленная в предположении, что первый валик – конусный, т.е. условная вероятность, равна

$$P_A(B) = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}.$$

Тогда по теореме умножения зависимых событий

$$P(AB) = P(A)\cdot P_A(B) = \frac{4}{13}\cdot\frac{3}{4} = \frac{3}{13}.$$

**Ответ:** $P(AB) = \dfrac{3}{13}$.

**Задачи для самостоятельного решения**

3.1 В двух отсеках зернохранилища находится посевной материал (пшеница). Семена первого отсека имеют всхожесть 80 %, второго — 85 %. Отбирается по одному зерну из каждого отсека. Найти вероятность того, что: а) оба зерна дадут всходы; б) одно зерно взойдет; в) хотя бы одно зерно взойдет.

3.2 В урне 10 красных, 7 синих и 3 белых шара. Найти вероятность того, что два наугад извлеченных шара одного цвета.

3.3 В читальном зале имеется 6 учебников по теории вероятностей, из которых три в переплете. Библиотекарь наудачу взял два учебника. Найти вероятность того, что хотя бы один из них в переплете.

3.4 Заводом послана автомашина за различными материалами на четыре базы. Вероятность наличия нужного материала на первой базе равна 0,9, на второй – 0,95, на третьей – 0,8 и на четвертой – 0,6. Найти вероятность того, что нужного материала не окажется: а) на двух базах; б) хотя бы на одной базе.

3.5 В ящике 30 яблок. Из них 3 поражены болезнью в скрытой форме. Из ящика извлекают 2 плода. Вычислить вероятность того, что поражены болезнью: а) два плода; б) один плод; в) хотя бы один плод.

3.6 Один стрелок дает 80 % попаданий в цель, а другой – 70 %. Найти вероятность поражения цели, если оба стрелка делают по одному выстрелу. Цель считается пораженной при попадании в нее хотя бы одной из двух пуль.

3.7 Экзаменационный билет содержит три вопроса. Вероятность того, что студент ответит на первый, второй вопросы, равна 0,9, на третий 0,8. Найти вероятность того, что студент сдаст экзамен, если для этого необходимо ответить хотя на два вопроса билета.

3.8 Три спортсмена должны выполнить норму мастера спорта. Вероятность того, что первый спортсмен выполнит норму, равна 0,9, второй – 0,8, третий – 0,7. Найти вероятность того, что норма мастера спорта будет выполнена: а) двумя спортсменами; б) хотя бы двумя спортсменами.

3.9 Радист трижды вызывает корреспондента. Вероятность того, что будет принят первый вызов, равна 0,2, второй вызов – 0,3, третий – 0,4. По условиям приема события, состоящие в том, что данный вызов будет, независимы. Найти вероятность того, что: 1) будет принят только один вызов; 2) корреспондент вообще услышит вызов.

3.10 Завод изготовляет изделия, каждое из которых должно подвергаться четырем видам испытаний. Первое испытание изделие проходит благополучно с вероятностью 0,9, второе – 0,95, третье – 0,8 и четвертое – 0,85. Найти вероятность того, что изделие пройдет благополучно не менее двух испытаний.

3.11 На некотором предприятии 96 % изделий признаются пригодными. Из каждой сотни годных изделий в среднем 75 оказываются первого сорта. Найти вероятность того, что изделие, изготовленное на этом предприятии, окажется первого сорта.

3.12 Деталь проходит три операции обработки. Вероятность того, что она окажется бракованной после первой операции, равна 0,02, после второй – 0,03, после третьей – 0,15. Найти вероятность того, что деталь будет: а) небракованной после трех операций; б) бракованной после трех операций, предполагая, что появление брака на отдельных операциях – независимые события.

3.13 В ящике 10 красных и 6 синих пуговиц. Вынимаются наудачу пуговицы. Какова вероятность того, что пуговицы будут одноцветными?

3.14 В поле работают 4 комбайна. Вероятность того, что в течение смены не будет поломки в первом комбайне, равна 0,9, во втором – 0,6, третьем – 0,7, и четвертом – 0,8. Найти вероятность того, что в течение смены поломка произойдет: 1) только в одном комбайне; 2) хотя бы в одном комбайне.

3.15 Достаточным условием сдачи студентом коллоквиума является ответ на один из двух вопросов, предлагаемых преподавателем. Студент не знает ответов на восемь вопросов из тех сорока, которые могут быть предложены. Какова вероятность сдачи коллоквиума?

3.16 В партии из 10 деталей 8 стандартных. Какова вероятность того, что среди наудачу извлеченных двух деталей есть хотя бы одна стандартная?

3.17 Многолетними наблюдениями установлено, что в данном районе в сентябре 10 дней бывают дождливыми. Совхоз должен в течение первых пяти дней сентября выполнить определенную работу. Определить вероятность того, что ни один из этих дней не будет дождливым.

3.18 Процесс обработки рыбы состоит из трех последовательных операций, на каждой из которых вероятность получения бракованной продукции равна 0,02. Определить вероятность: 1) получения бракованной продукции в результате обработки рыбы; 2) неполучения бракованной продукции.

3.19 Вероятность установления в данной местности устойчивого снежного покрова с октября равна 0,1. Определить вероятность того, что в ближайшие три года в этой местности устойчивый снежный покров с октября установится: а) один раз; б) хотя бы один раз.

3.20 Какова вероятность того, что два носка, взятых наудачу из ящика (в нем шесть красных и четыре синих носка), будут одного цвета?

3.21 На переэкзаменовку пришли 7 студентов экономического факультета, 9 – механического, 6 – технологического и 4 студента заочного факультета. Какова вероятность того, что 3 первых студента, взявшие билеты, окажутся студентами экономического факультета?

3.22 В коробке имеется 30 косынок, из них 17 светлых, остальные темные. Продавец наудачу извлекает одну за другой две косынки. Какова вероятность того, что: а) одна из косынок оказалась темной, б) обе косынки светлые?

3.23 На обувной фабрике в отдельных цехах производятся подметки, каблуки и верхи ботинок. Дефектными оказываются 0,5 % каблуков, 2 % подметок и 4 % верхов. Произведенные каблуки, подметки и верхи случайно комбинируются в цехе, где шьются ботинки. Найти вероятность того, что изготовленная пара ботинок будет содержать дефекты.

3.24 При одном цикле обзора трех радиолокационных станций, следящих за космическим кораблем, вероятности его обнаружения соответственно равны: 0,7; 0,8; 0,9. Найти вероятность обнаружения корабля при одном цикле: а) тремя станциями; б) не менее чем двумя станциями; в) хотя бы одной станцией.

3.25 Вычислительная машина состоит из четырех блоков. Вероятность безотказной работы в течение времени T первого блока равна 0,4; второго – 0,5; третьего – 0,6; четвертого – 0,3. Найти вероятность безотказной работы в течение времени T: а) всех блоков; б) не менее трех блоков; в) хотя бы одного блока.

3.26 При некоторых определенных условиях вероятность сбить самолет противника из первого зенитного орудия равна 0,4; из второго – 0,5. Сделано по одному выстрелу. Найти вероятность того, что: а) самолет уничтожен двумя снарядами; б) самолет поражен хотя бы одним снарядом; в) ни один снаряд не попал в цель.

3.27 Бросаются три монеты. Найти вероятность появления герба: а) два раза; б) не менее двух раз.

3.28 Вероятность того, что студент сдаст первый экзамен, равна 0,9; второй – 0,9; третий – 0,8. Вычислить вероятность того, что студент сдаст: а) все экзамены; б) хотя бы 2 экзамена.

3.29 В телестудии три телевизионные камеры. Вероятности того, что в данный момент камера включена, соответственно равны: 0,9; 0,8; 0,7. Найти вероятность того, что в данный момент включены: а) две камеры; б) не более одной камеры; в) хотя бы одна камера.

3.30 На железобетонном заводе изготовляют панели, 90 % из которых – высшего сорта. Какова вероятность того, что из трех наугад выбранных панелей высшего сорта будут: а) три панели; б) хотя бы одна панель; в) не более одной панели?

3.31 На участке кросса для мотоциклиста-гонщика имеется три препятствия. Вероятность успешного прохождения первого препятствия равна 0,4; второго – 0,5; третьего – 0,6. Найти вероятность успешного преодоления: а) двух препятствий; б) не менее двух препятствий; в) хотя бы одного препятствия.

3.32 Эффективность некоторой вакцины в формировании иммунитета составляет 75 %. Вакцинировалось два животных. Найти вероятность того, что иммунитет приобретен: а) двумя животными; б) одним животным; в) хотя бы одним животным.

**Дополнительные задачи**

3.33 Четыре охотника договорились стрелять по дичи в определенной последовательности. Следующий охотник производит выстрел лишь в случае промаха предыдущего. Вероятности попадания в цель при одном выстреле у охотников равны соответственно: 0,8; 0,9; 0,7; 0,9. Найти вероятность того, что будет произведено: а) один; б) два; в) три; г) четыре выстрела.

3.34 Стрелок $A_1$ поражает мишень при некоторых условиях стрельбы с вероятностью 0,6; стрелок $A_2$ – с вероятностью 0,5 и стрелок $A_3$ – с вероятностью 0,4. Стрелки дали залп по мишени и две пули попали в цель. Что вероятнее: попал стрелок $A_3$ в мишень или нет?

3.35 В урне находится 50 белых, 30 черных и 20 красных шаров. Определить вероятность того, что три извлеченных шара одинакового цвета, если: 1) извлеченный шар возвращается в урну; 2) шар в урну не возвращается; 3) шары извлекаются одновременно.

3.36 10 % рабочих не выполняют норму выработки, 50 % рабочих выполняют норму до 120 %; 40 % рабочих выполняют норму более чем на 120 %. Определить вероятность того, что: а) взятый наудачу рабочий выполняет или перевыполняет норму выработки; б) два наудачу взятых рабочих выполняют или перевыполняют норму выработки; в) хоты бы один из двух рабочих не выполняет норму выработки.

3.37 Какое наименьшее число раз нужно бросить пару игральных костей, чтобы с вероятностью, не меньшей 0,5, утверждать, что хотя бы один раз появится 12 очков?

# 4 ФОРМУЛА ПОЛНОЙ ВЕРОЯТНОСТИ. ФОРМУЛЫ БАЙЕСА

**Краткая теория**

Вероятность события $A$, которое может наступить лишь при условии появления одного из несовместных событий $B_1$, $B_2$, …, $B_n$ (которые принято называть гипотезами), образующих полную группу, равна сумме произведений вероятностей каждого из этих событий на соответствующую условную вероятность события $A$:

$$P(A) = P(B_1)P_{B_1}(A) + P(B_2)P_{B_2}(A) + \ldots + P(B_n)P_{B_n}(A) = \sum_{i=1}^{n} P(B_i)P_{B_i}(A).$$

Эту формулу называют ***формулой полной вероятности***.

Пусть событие $A$ произошло. Тогда вероятности гипотез $B_1$, $B_2$, …, $B_n$ при условии, что событие $A$ произошло, вычисляются по формулам (пересчет вероятностей гипотез):

$$P_A(B_i) = \frac{P(B_i)P_{B_i}(A)}{\sum_{i=1}^{n} P(B_i)P_{B_i}(A)}, \ i = \overline{1,\, n}.$$

Эти формулы называются ***формулами Байеса*** или ***формулами вероятностей гипотез***.

**Пример 7.** В цехе работают три станка-автомата, которые штампуют однотипные детали. Производительности станков относятся как 2 : 3 : 5. Вероятность брака для первого станка равна 0,05, для второго – 0,03, для третьего – 0,02. Изготовленные детали складывают в один ящик. Найти вероятность того, что:

1) взятая наугад из ящика деталь будет бракованной;

2) наугад взятая бракованная деталь изготовлена на втором станке.

**Решение.** Пусть $A$ – событие состоящее в том, что взятая наугад из ящика деталь будет бракованной. Можно сделать три предположения:

$B_1$ – взятая деталь изготовлена первым станком;

$B_2$ – взятая деталь изготовлена вторым станком;

$B_3$ – взятая деталь изготовлена третьим станком.

Исходя из того, что производительности станков относятся как 2 : 3 : 5, найдем вероятности этих событий:

$$P(B_1) = \frac{2}{10} = 0{,}2;\ P(B_2) = \frac{3}{10} = 0{,}3;\ P(B_3) = \frac{5}{10} = 0{,}5.$$

По условию задачи $P_{B_1}(A) = 0{,}05; P_{B_2}(A) = 0{,}3; P_{B_3}(A) = 0{,}02.$

1) Вероятность события $A$ определяем по формуле полной вероятности:

$$P(A) = P(B_1)P_{B_1}(A) + P(B_2)P_{B_2}(A) + P(B_3)P_{B_3}(A) =$$
$$= 0,2 \cdot 0,05 + 0,3 \cdot 0,03 + 0,5 \cdot 0,02 = 0,029.$$

2) Искомую вероятность $P_A(B_2)$ определяем по формуле Байеса:

$$P_A(B_2) = \frac{P(B_2)P_{B_2}(A)}{P(A)} = \frac{0{,}3 \cdot 0{,}03}{0{,}029} = 0{,}31.$$

**Ответ:** 1) 0,029; 2) 0,31.

**Задачи для самостоятельного решения**

4.1 В трех корзинах находится картофель. В первой 10 % поврежденных клубней, во второй – 15 %, в третьей – 10 %. Из наудачу выбранной корзины берут один клубень. Какова вероятность того, что клубень не поврежден?

4.2 Для участия в студенческих спортивных соревнованиях выделено из первой группы 5 студентов, из второй и третьей – соответственно 6 и 10 студентов. Вероятности выполнить норму мастера спорта соответственно равны: для студентов первой группы – 0,3; второй – 0,4; третьей – 0,2. Наугад взятый студент выполнил норму мастера спорта. Найти вероятность того, что он учится во второй группе.

4.3 В дисплейном классе имеется 10 персональных компьютеров первого типа и 15 второго типа. Вероятность того, что за время работы на компьютере первого типа не произойдет сбоя, равна 0,9, а на компьютере второго типа – 0,7.

Найти вероятность того, что на случайно выбранном компьютере за время работы не произойдет сбоя.

4.4 Один из трех стрелков вызывается на линию огня и производит выстрел. Цель поражена. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле для первого стрелка равна 0,3; для второго – 0,5; для третьего – 0,8. Найти вероятность того, что выстрел произведен вторым стрелком.

4.5 На наблюдательной станции установлены четыре радиолокатора различных конструкций. Вероятность обнаружения цели с помощью первого локатора равна 0,8; второго – 0,9; третьего – 0,95 и четвертого – 0,85. Цель обнаружена наугад включенным локатором. Найти вероятность того, что цель обнаружена вторым локатором.

4.6 Сборщик получил 3 коробки деталей, изготовленных заводом № 1 и 2 коробки деталей, изготовленных заводом № 2. Вероятность того, что деталь завода № 1 стандартная, равна 0,7; а завода № 2 – 0,9. Сборщик наудачу извлекает деталь из наудачу взятой коробки. Найти вероятность того, что извлечена нестандартная деталь.

4.7 Электролампы изготавливаются на трех заводах. Первый завод производит 45 % общего количества электроламп, второй – 40 %, третий – 15 %. Продукция первого завода содержит 70 % стандартных ламп, второго – 80 %, третьего – 81 %. В магазины поступает продукция всех трех заводов. Купленная в магазине электролампа оказалась стандартной. Найти вероятность того, что она изготовлена на третьем заводе.

4.8 В стройотряде 60 % первокурсников и 40 % студентов второго курса. Среди первокурсников 15 % девушек, а среди студентов второго курса – 10 %

девушек. Все девушки по очереди дежурят на кухне. Найти вероятность того, что в случайно выбранный день на кухне дежурит первокурсница.

4.9 В телевизионном ателье имеется 4 кинескопа. Вероятности того, что кинескоп выдержит гарантийный срок службы, соответственно равны 0,8; 0,85; 0,9; 0,95, Взятый наудачу кинескоп выдержал гарантийный срок. Что вероятнее – был взят второй или четвертый кинескоп?

4.10 В двух корзинах находятся яблоки. В первой 20 шт., из них 5 поврежденных, во второй – 30 шт., из них 6 поврежденных. Из наудачу выбранной корзины взято одно яблоко, которое оказалось неповрежденным. Найти вероятность того, что яблоко взято из первой корзины.

4.11 Азотное удобрение поступает на склад хозяйства из пункта 1 и пункта 2 , причем из 1-го пункта в 2 раза больше, чем из 2-го. Вероятность того, что удобрение первого пункта удовлетворяет стандарту, равна 0,9, второго – 0,7. Взятое для пробы на складе хозяйства удобрение соответствует стандарту. Найти вероятность того, что удобрение, взятое для пробы, поступило из пункта 2.

4.12 При передаче сообщения сигналами «точка» и «тире» эти сигналы встречаются в отношении 5:3. Статистические свойства помех таковы, что искажаются в среднем 2/5 сообщений «точка» и 1/3 сообщений "тире". Найти вероятность того, что произвольный из принятых сигналов не искажен.

4.13 Партия состоит из вентиляторов рижского и московского заводов. В партии 70 % вентиляторов московского завода, для которых вероятность безотказной работы за время $t$ равна 0,95, рижского – 0,92. Прибор испытывался в течение времени t и работал безотказно. Найти вероятность того, что это вентилятор рижского завода.

4.14 Имеются два одинаковых ящика с шарами. В первом ящике 2 белых и 1 черный шар, во втором – 1 белый и 4 черных шара. Наудачу выбирают ящик и вынимают из него шар. Какова вероятность того, что вынутый шар окажется белым?

4.15 В группе спортсменов 20 лыжников, 6 велосипедистов и 4 бегуна. Вероятность выполнить квалификационную норму такова: для лыжника – 0,9, для велосипедиста – 0,8 и для бегуна – 0,75. Найти вероятность того, что спортсмен, выбранный наудачу, выполнит квалификационную норму.

4.16 Имеются электролампочки четырех партий, количество которых находится в отношении 3 : 4 : 1 : 2. Вероятности того, что взятая лампочка может гореть положенное число часов для этих партий, соответственно равны: 0,22; 0,15; 0,46; 0,38. Найти вероятность того, что взятая лампочка сможет гореть положенное число часов.

4.17 Имеются три урны. В первой находятся 5 белых и 3 четных шара, во второй – 4 белых и 4 черных, в третьей – 8 белых шаров. Наугад выбирается одна урна и из нее наугад извлекается шар. Какова вероятность того, что он окажется черным?

4.18 Качество изготовленных деталей проверяется двумя контролерами, из которых первый проверяет 60 %,. второй – 40 % деталей. Вероятность считать деталь качественной для первого контролера равна 0,94, а для второго – 0,98. Готовая деталь признана качественной. Найти вероятность того, что эту деталь проверил первый контролер.

4.19 В лаборатории имеется 6 измерительных приборов I типа и 4 – II типа. Вероятность того, что во время опыта прибор I типа не выйдет из строя, равна 0,95; для прибора II типа эта вероятность равна 0,8. Найти вероятность того, что наудачу взятый измерительный прибор не выйдет из строя до окончания опыта.

4.20 В первом ящике содержится 20 деталей, из них 15 стандартных, во втором – 30 деталей, из них 24 стандартных, в третьем – 10 деталей, из них 6 стандартных. Найти вероятность того, что наудачу извлеченная деталь из наудачу взятого ящика – стандартная.

4.21 Два стрелка независимо один от другого стреляют по одной мишени, делая каждый по одному выстрелу. Вероятность попадания в мишень для первого стрелка – 0,8; для второго – 0,4. После стрельбы в мишень обнаружена одна пробоина. Найти вероятность того, что эта пробоина принадлежит первому стрелку.

4.22 На распределительной базе находятся электролампочки, произведенные двумя заводами. Среди них 70 % изготовлены первым заводом и 30 % – вторым. Известно, что из каждых 100 лампочек, произведенных первым заводом, 90 соответствуют стандарту, а из 100 лампочек, произведенных вторым заводом, стандарту соответствуют 80. Определить вероятность того, что взятая наудачу с базы лампочка будет отвечать требованиям стандарта.

4.23 На сборку поступило 3000 деталей, изготовленных на первом станке и 2000 – на втором. Первый станок дает 0,2 %, а второй – 0,3 % брака. Взятая деталь оказалась бракованной. Найти вероятность того, что она изготовлена на первом станке.

4.24 В канцелярии работают 4 секретарши, которые отправляют 40, 10, 30 и 20 % исходящих бумаг. Вероятность неверной адресации бумаг секретаршами равна 0,01; 0,04; 0,06 и 0,01 соответственно. Найти вероятность того, что документ, неверно адресованный, отправлен третьей секретаршей.

4.25 На двух станках обрабатываются однотипные детали. Вероятность брака для первого станка составляет 0,03, а для второго – 0,02. Обработанные детали складываются в одном месте, причем первый станок обрабатывает вдвое больше деталей, чем второй. Найти вероятность того, что взятая наудачу деталь не будет бракованной.

4.26 Два автомата производят детали, которые поступают на общий конвейер. Вероятность получения нестандартной детали на первом автомате равна 0,075, а на втором – 0,09. Производительность второго автомата в два раза больше, чем первого. Найти вероятность того, что наугад взятая с конвейера деталь нестандартная.

4.27 При проверке качества зерен пшеницы было установлено, что все зерна могут быть разделены на 4 группы. К зернам первой группы принадлежит 96 %, ко второй – 2 %, к третьей – 1 % и к четвертой 1 % всех зерен. Вероятность того, что из зерна вырастет колос, содержащий не менее 50 зерен, для семян первой группы равна 0,5, для второй группы – 0,2, для третьей – 0,18 и для четвертой – 0,02. Определить вероятность того, что из взятого наудачу зерна вырастет колос, содержащий не менее 50 зерен.

4.28 Имеются на вид два одинаковых ящика с картофелем. В первом ящике находятся 70 % сорта Явор и 30 % сорта Невский, во втором ящике – 5 % сорта Явор и 50 % сорта Невский. Некто берет наугад один клубень картофеля из наудачу взятого ящика. Какова вероятность того, что клубень окажется сорта Явор?

4.29 Среди поступающих на сборку деталей с первого станка 0,1 % бракованных, со второго – 0,2; с третьего – 0,25; с четвертого – 0,5 %. Производительность их относится как 4:3:2:1 соответственно. Взятая наудачу деталь оказалась стандартной. Найти вероятность того, что она изготовлена на четвертом станке.

4.30 Сборщик получил 3 ящика деталей: в первом ящике 40 деталей, из них 20 окрашенных, во втором – 50, из них 10 окрашенных, в третьем – 30, из них 15 окрашенных. Найти вероятность того, что наудачу извлеченная деталь из наудачу взятого ящика окажется окрашенной.

4.31 На фермах $A$ и $B$ произошла вспышка заболевания ящуром. Доли заражения скота составляют соответственно 1/6 и 1/4. Случайным образом отобранное из одной фермы животное оказалось заболевшим. Найти вероятность того, что животное выбрано из фермы $A$.

4.32 Три предприятия производят соответственно 25, 30 и 45 % запасных частей одного наименования к доильным аппаратам, которые поступают на центральную базу. Доля брака для них составляет соответственно 1,2 и 3 %. Взятая наугад запасная часть оказалась годной. Вычислить вероятность того, что она изготовлена на втором предприятии.

**Дополнительные задачи**

4.33 В первой урне 2 белых и 4 черных шара, а во второй – 3 белых и 1 черный шар. Из первой урны переложили во вторую два шара. Найти вероятность того, что шар, вынутый из второй урны после перекладывания, окажется белым.

4.34 В группе из 20 стрелков имеются 4 отличных, 10 хороших и 6 посредственных стрелков. Вероятность попадания в цель при одном выстреле для отличного стрелка равна 0,9; для хорошего – 0,7; для посредственного – 0,5. На линию огня вызываются наугад два стрелка. Они производят по одному выстрелу. Найти вероятность того, что стрелки попадут в цель.

4.35 Имеются три партии деталей по 20 в каждой. Число стандартных деталей в первой, второй и третьей партиях соответственно равно 20, 15, 10. Из наудачу выбранной партии наудачу извлечена деталь, оказавшаяся стандартной. Деталь возвращают в партию и вторично наудачу извлекают деталь, которая также оказывается стандартной. Найти вероятность того, что детали были извлечены из третьей партии.

4.36 Имеются 5 урн: две из них содержат по 2 белых и 3 черных шара, две – по 1 белому и 4 черных шара и одна урна – 4 белых и 1 черный. Из одной наудачу выбранной урны взяли шар. Он оказался белым. Чему равна вероятность того, что шар вынули из урны с 4 белыми и 1 черным шаром?

4.37 Вероятность выпадения осадков в течение двух дней подряд равна 0,5; а невыпадения – 0,3. Считая, что события $A$ (в первый день не будет осадков, а во второй будут) и $B$ (в первый день осадки будут, а во второй нет) равновероятны, найти безусловную вероятность того, что в течение дня осадки будут.

## 5 СХЕМА НЕЗАВИСИМЫХ ПОВТОРНЫХ ИСПЫТАНИЙ

### Краткая теория

Рассмотрим конечную последовательность $n$ независимых испытаний, в результате каждого из которых может произойти событие $A$ или ему противоположное $\overline{A}$ с вероятностями $p$ и $q=1-p$ соответственно. ***При этом будем считать, что вероятность p события A в каждом испытании одна и та же***. По условию результат любого испытания не зависит от его порядкового номера и от того, какие исходы были в предыдущих испытаниях. Такую последовательность испытаний принято называть ***схемой испытаний Бернулли (или схемой независимых повторных испытаний)***. Приняты следующие обозначения:

$P_n(m)$ – вероятность того, что событие $A$ произойдёт ровно $m$ раз в серии из $n$ испытаний;

$P_n(m \geq k) = P_n(k) + P_n(k+1) + \ldots + P_n(n)$ – вероятность того, что событие $A$ произойдёт не менее $k$ раз в серии из $n$ испытаний;

$P_n(m \leq k) = P_n(0) + P_n(1) + \ldots + P_n(k)$ – вероятность того, что событие $A$ произойдёт не более $k$ раз в серии из $n$ испытаний;

$P_n(m \geq 1) = 1 - P_n(0)$ – вероятность того, что событие $A$ произойдёт хотя бы один раз в серии из $n$ испытаний.

При нахождении нужной вероятности необходимо учитывать заданные значения $\boldsymbol{n}$ и $\boldsymbol{p}$. При выборе формулы для $P_n(m)$ надо руководствоваться следующими правилами:

1) если задано число испытаний $n$ и оно не больше 10, то для нахождения $P_n(m)$ надо пользоваться **формулой Бернулли**:

$$P_n(m) = C_n^m \cdot p^m q^{n-m};$$

2) если $n$ велико и $np > 10$, то для нахождения $P_n(m)$ надо воспользоваться **локальной теоремой Муавра-Лапласа**. По этой теореме

$$P_n(m) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \varphi(x), \text{ где } \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2p}} e^{\frac{-x^2}{2}}; \; x = \frac{m - np}{\sqrt{npq}};$$

Имеются табличные данные, соответствующие положительным значениям функции $\varphi(x)$ (приложение А, таблица А.1). Так как **функция $\varphi(x)$ чётная, то**

$$\varphi(-x) = \varphi(x).$$

И для $x > 4$ $\varphi(x) \approx 0$.

3) если требуется найти вероятность того, что в серии из $n$ независимых испытаний число наступлений события $A$ будет не менее $k_1$ и не более $k_2$ раз, то есть $P_n(k_1; k_2) = P_n(k_1 \leq m \leq k_2)$, то надо воспользоваться **интегральной теоремой Муавра-Лапласа**. По этой теореме

$$P_n(k_1; k_2) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1),$$

где $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2p}} \int_0^x e^{\frac{-t^2}{2}} dt$, $x_1 = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}$, $x_2 = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}$.

Функция **$\Phi(x)$ называется *функцией Лапласа***. Она **нечётная**, т.е.

$$\Phi(-x) = -\Phi(x).$$

Имеются таблицы для соответствующих положительных значений этой функции (приложение А, таблица А.2), и для $x > 5$ $\Phi(x) \approx 0{,}5$.

4) если вероятность $p$ наступления события $A$ мала, а $n$ велико и $\lambda = np < 10$, то для нахождения $P_n(m)$ надо воспользоваться **формулой Пуассона**:

$$P_n(m) \approx e^{-\lambda}\frac{\lambda^m}{m!},\ P_n(m \le k) \approx e^{-\lambda}\sum_{m=0}^{k}\frac{\lambda^m}{m!}.$$

Имеются таблицы для соответствующих значений функции Пуассона $e^{-\lambda}\frac{\lambda^m}{m!}$ (приложение А, таблица А.3).

Рассмотрим примеры применения этих формул.

**Пример 8.** Хлопок определённого сорта имеет 60 % коротких волокон. Определите вероятность того, что из 6 случайно взятых волокон будет:

а) хотя бы одно короткое волокно;
б) ровно 3 коротких волокна;
в) не более 3 коротких волокон.

**Решение.** Так как $n$ = 6 < 10, то надо воспользоваться формулой Бернулли. По условию короткие волокна составляют 60 %. Значит, вероятность того, что случайным образом взятое волокно будет коротким, равна $p$ = 0,6, следовательно, $q$ = 1 – 0,6 = 0,4.

а) Вероятность того, что хотя бы одно из 6 случайно взятых волокон будет коротким, вычисляется по формуле

$$P_6(m \ge 1) = 1 - P_6(0) = 1 - q^6 = 1 - 0{,}4^6 = 1 - 0{,}004096 = 0995904 \approx 0{,}996.$$

б) Вероятность того, что среди 6 случайно взятых волокон будет ровно 3 коротких, равна

$$P_6(3) = C_6^3 \cdot p^3 \cdot q^3 = \frac{6!}{3!\,3!}\cdot 0{,}6^3\cdot 0{,}6^3 = 20\cdot 0{,}013824 = 0{,}27448 \approx 0{,}28.$$

в) Вероятность того, что среди 6 случайно взятых волокон будет не более 3 коротких волокон, равна

$$P_6(m \le 3) = P_6(0) + P_6(1) + P_6(2) + P_6(3) = 0{,}4^6 + C_6^1 \cdot 0{,}6^1 \cdot 0{,}4^5 + C_6^2 \cdot 0{,}6^2 \cdot 0{,}4^4 +$$

$$+ C_6^3 \cdot 0{,}6^3 \cdot 0{,}4^3 = 0{,}004096 + 0{,}036864 + 0{,}13824 + 0{,}27648 = 0{,}45568 \approx 0{,}46.$$

**Ответ:** а) 0,996; б) 0,28; в) 0,46.

**Пример 9.** Коммерческая фирма рассылает по почте своим клиентам $n$ = 500 писем с проспектами новой продукции. Вероятность того, что при пересылке письмо потеряется, равна $p$ = 0,001. Найти вероятность того, что при пересылке по почте потеряется:

а) хотя бы одно письмо с проспектами;
б) ровно 3 письма с проспектами;
в) не более 3 писем с проспектами.

**Решение.** Количество посланных по почте писем $n$ = 500 велико, а вероятность того, что при пересылке по почте письмо потеряется $p$ = 0,001 мала и $\lambda = np$ = 0,5 < 10. Следовательно, надо воспользоваться формулой Пуассона:

$$P_n(m) \approx \frac{\lambda^m}{m!}e^{-\lambda}, \text{ где } \lambda = np = 0{,}5.$$

а) Найдём вероятность того, что при пересылке потеряется хотя бы одно письмо.

$$P_{500}(m \geq 1) = 1 - P_{500}(0) = 1 - \frac{0{,}5^0}{0!}e^{-0{,}5} = 1 - \frac{1}{\sqrt{e}} = 1 - 0{,}60653 \approx 0{,}40$$

(*по определению* 0! = 1).

б) Найдём вероятность того, что при пересылке по почте потеряется ровно 3 письма:

$$P_{500}(3) \approx \frac{0{,}5^3}{3!}e^{-0{,}5} = 0{,}125\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{\sqrt{e}} \approx 0{,}01.$$

в) Найдём вероятность того, что при пересылке по почте потеряется не более 3 писем:

$$P_{500}(m \leq 3) = P_{500}(0) + P_{500}(1) + P_{500}(2) + P_{500}(3) = 0{,}61 + \frac{0{,}5^1}{1!}e^{-0{,}5} + \frac{0{,}5^2}{2!}e^{-0{,}5} +$$

$$+ \frac{0{,}5^3}{3!}e^{-0{,}5} = 0{,}61 + 0{,}3 + 0{,}08 + 0{,}01 = 1.$$

**Ответ:** а) 0,40; б) 0,01; в) 1.

**Пример 10.** Пусть вероятность того, что покупателю необходимо купить обувь 27 размера, равна 0,2. Найти вероятность того, что из 400 покупателей, зашедших в магазин, потребуют обувь 27 размера:

а) хотя бы один покупатель;
б) ровно 90 покупателей;
в) не более 90 покупателей.

**Решение.** Так как $n$ = 400 велико, $p$ = 0,2 и $\lambda = np$ = 80 > 10, то для нахождения требуемых вероятностей необходимо воспользоваться локальной и интегральной теоремами Муавра–Лапласа. По условию задачи

$$\sqrt{npq} = \sqrt{400\cdot 0{,}2\cdot 0{,}8} = \sqrt{64} = 8.$$

а) Найдём вероятность того, что из 400 покупателей, зашедших в магазин, хотя бы одному потребуется обувь 27 размера:

$$P_{400}(m \geq 1) = 1 - P_{400}(0) = 1 - \frac{1}{\sqrt{npq}}\varphi\left(\frac{0 - np}{\sqrt{npq}}\right) = 1 - \frac{1}{8}\cdot\varphi\left(\frac{0 - 400\cdot 0{,}2}{8}\right) =$$

$$= 1 - \frac{1}{8}\cdot\varphi(-10) \approx 1 - 0 = 1.$$

б) Найдём вероятность того, что из 400 покупателей, зашедших в магазин, ровно для 90 покупателей потребуется обувь 27 размера:

$$P_{400}(90) = \frac{1}{\sqrt{400\cdot 0{,}2\cdot 0{,}8}}\cdot\varphi\left(\frac{90-400\cdot 0{,}2}{8}\right) = \frac{1}{8}\cdot\varphi\left(\frac{10}{8}\right) = \frac{1}{8}\cdot\varphi(1{,}25) =$$

$$= \frac{1}{8}\cdot 0{,}1826 \approx 0{,}0228.$$

в) Найдём вероятность того, что из 400 покупателей, зашедших в магазин, не более 90 потребуют обувь 27 размера. Здесь $k_1 = 0$, $k_2 = 90$. Тогда

$$P_{400}(0;\,90) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1),$$

где $x_1 = \dfrac{k_1 - np}{\sqrt{npq}} = \dfrac{0-80}{8} = -10$, $x_2 = \dfrac{k_2 - np}{\sqrt{npq}} = \dfrac{90-80}{8} = 1{,}25$.

По таблице значений функции Лапласа находим: $\Phi(x_2) = \Phi(1{,}25) = 0{,}3944$, $\Phi(x_1) = \Phi(-10) = -\Phi(10) = -0{,}5$. Поэтому

$$P_{400}(0;\,90) \approx 0{,}3944 - (-0{,}5) = 0{,}8944.$$

**Ответ:** а) 1; б) 0,0228; в) 0,8944.

## 5.1 ФОРМУЛА БЕРНУЛЛИ

### Задачи для самостоятельного решения

5.1.1 Всхожесть семян ржи составляет 90 %. Чему равна вероятность того, что из 7 посеянных семян взойдут: а) не менее пяти; б) хотя бы одно.

5.1.2 Среди заготовок, изготавливаемых рабочим, в среднем 4 % не соответствуют требованиям стандарта. Найти вероятность того, что среди 6 заготовок, взятых для контроля, не соответствуют требованиям стандарта: а) не менее четырех; б) не более пяти.

5.1.3 Вероятность успешной сдачи студентом каждого из пяти экзаменов оценивается в 70 %. Найти вероятность успешной сдачи: а) не менее двух экзаменов; б) хотя бы одного экзамена.

5.1.4 В телеателье имеется 7 телевизоров, 60 % из них в данный момент включены. Найти вероятность того, что в данный момент включено: а) не менее трех телевизоров; б) не более двух телевизоров.

5.1.5 Всхожесть семян лимона составляет 80 %. Найти вероятность того, что из 9 посеянных семян взойдут: а) не более семи; б) хотя бы два.

5.1.6 Наблюдениями установлено, что в некоторой местности в сентябре ***в*** среднем бывает 12 дождливых дней. Какова вероятность того, что из случайно взятых в этом месяце 8 дней окажутся недождливыми: а) не менее 5 дней; б) хотя бы один день.

5.1.7 У шести животных имеется заболевание, причем выздоровление наступает в 98 % случаев. Найти вероятность выздоровления: а) не менее 5 животных; б) хотя бы 2 животных.

5.1.8 Монету бросают 6 раз. Найти вероятность того, что герб выпадет: а) менее двух раз; б) не менее двух раз.

5.1.9 В мастерской имеется 8 моторов. При существующем режиме работы в данный момент с полной нагрузкой работают 70 % моторов. Найти вероятность того, что в данный момент с полной нагрузкой работают: а) не менее 6 моторов; б) хотя бы 3 мотора.

5.1.10 В 75 % расход электроэнергии в течение одних суток не превышает установленной нормы. Найти вероятность того, что в ближайшие 6 суток расход электроэнергии не превысит нормы: а) в течение не менее 4 суток; б) в течение не более 2 суток.

5.1.11 Приняв вероятности рождения мальчика и девочки одинаковыми, найти вероятность того, что среди 7 новорожденных будет: а) не более 4 девочек; б) хотя бы 2 девочки.

5.1.12 Вероятность попадания в цель при одном выстреле составляет 70%. Произведено 4 независимых выстрела. Найти вероятность попадания: а) не более двух раз; б) не менее 3 раз.

5.1.13 Прибор состоит из четырех узлов. Безотказная работа в течение смены каждого из них составляет 80%. Узлы выходят из строя независимо один от другого. Найти вероятность того, что за смену откажут: а) не менее двух узлов; б) не более одного узла.

5.1.14 В лотерее из каждых 7 билетов один выигрышный. Какова вероятность, имея 6 билетов, выиграть: а) не более чем по одному билету; б) не менее чем по двум билетам.

5.1.15 Для прядения смешаны белый и окрашенный хлопок, причем окрашенного в 2 раза больше. Найти вероятность того, что среди пяти взятых наугад волокон смеси окажутся окрашенных: а) менее двух волокон; б) не менее 4 волокон.

5.1.16 Что вероятнее: выиграть у равносильного противника в шахматы не менее трех партий из четырех или не менее пяти партий из восьми?

5.1.17 Для нормальной работы автобазы на линии должно быть не менее восьми машин, а имеется их десять. Количество невыхода автомашин на линию ежедневно составляет 10 %. Найти вероятность того, что: а) автобаза будет работать нормально в ближайший день; б) выход машин окажется не более двух.

5.1.18 Применяемый метод лечения приводит к выздоровлению в 95 % случаев. Найти вероятность того, что из пяти больных поправятся: а) не менее четырех; б) хотя бы один.

5.1.19 Статистика показывает, что 25 % покупателей необходима мужская обувь 41-го размера. Найти вероятность того, что из шести покупателей обувь 41-го размера необходима: а) хотя бы двум; б) не менее чем четырем.

5.1.20 В куче картофеля 15 % клубней, пораженных болезнью. Какова вероятность того, что среди семи взятых наугад клубней: а) окажется пораженных не более двух; б) будет поражен хотя бы один клубень?

5.1.21 В урне 10 белых и 5 черных шаров. Чему равна вероятность того, что вынув наудачу с возвращением 6 шаров, получим белых:

а) не менее трех; б) не более двух?

5.1.22 Из последовательности чисел 1,2,..., 100 выбирают наугад с возвращением 10. Чему равна вероятность того, что среди них кратных 7 будет: а) не более двух; б) хотя бы пять?

5.1.23 По данным ОТК, на каждую сотню металлических брусков, заготовленных для обработки, приходится 30 с зазубринами. Какова вероятность того, что из случайно взятых 8 брусков окажется без дефектов: а) не более двух; б) хотя бы семь?

5.1.24 В хлопке содержится 10 % коротких волокон. Определить вероятность того, что среди отобранных наудачу 6 волокон окажется коротких: а) не более двух; б) хотя бы четыре.

5.1.25 На каждые 10 собранных яблок в среднем приходится 7 стандартных. Наугад взято 6 яблок. Найти вероятность того, что среди них окажется стандартных: а) не менее трех; б) не более пяти.

5.1.26 Игральная кость подброшена 7 раз. Найти вероятность появления шестерки: а) не менее 5 раз; б) не более одного раза.

5.1.27 Установлено, что в среднем на каждую сотню изготовленных приборов 25 имеют дефекты. Найти вероятность того, что из взятых наудачу 6 приборов окажется: а) хотя бы один с дефектами; б) не более двух с дефектами.

5.1.28 В некотором водоеме карпы составляют 80 %. Найти вероятность того, что из 5 выловленных в этом водоеме рыб окажется: а) не менее 4 карпов; б) хотя бы один карп.

5.1.29 Приживаемость саженцев равна 70 %. Найти вероятность того, что из 5 саженцев не приживутся: а) не более двух; б) хотя бы один.

5.1.30 Известно, что некто купил у каждого из 4 предприятий по одной акции. Вероятность того, что владелец акции получит дивиденды за текущий месяц, равна 0,6. Найти вероятность получения дивидендов за текущий месяц: а) хотя бы по одной акции; б) не более чем по 3 акциям.

5.1.31 Из пяти яиц в среднем получается 4 живых цыпленка. Найти вероятность того, что из 10 яиц получится: а) не менее 8 живых цыплят; б) хотя бы один живой цыпленок.

5.1.32 В магазин вошли 8 покупателей. Установлено, что 30 % покупателей совершают покупку. Найти вероятность того, что из вошедших покупателей совершат покупку: а) не менее шести; б) не более двух.

**Дополнительные задачи**

5.1.33 В группе из 25 студентов 20 девушек. На каждый из трех вопросов, заданных преподавателем, ответило по одному студенту. Какова вероятность того, что среди ответивших были: а) хотя бы две девушки; б) не более одной девушки.

5.1.34 Три охотника одновременно выстрелили по волку. Вероятность попадания каждым из них одинакова и равна 0,4. Определить вероятность того, что волк будет убит, если известно, что при одном попадании охотники убивают волка с вероятностью 0,2, при двух – с вероятностью 0,5, а при трех – с вероятностью 0,8.

5.1.35 Экзаменационный билет состоит из пяти вопросов. На каждый вопрос даны три возможных ответа, среди которых необходимо выбрать один правильный. Какова вероятность того, что методом простого угадывания удается ответить по крайней мере на четыре вопроса?

5.1.36 Два шахматиста условились сыграть 10 результативных партий. Вероятность выигрыша каждой отдельной партии первым игроком равна 2/3, вторым – 1/3 ( ничьи не считаются). Чему равны вероятности выигрыша всей игры первым игроком, вторым игроком, общего ничейного результата?

5.1.37 В урне 9 белых и 1 красный шар. Какова вероятность того, что при 10 извлечениях ( с возвращением каждого вынутого шара) появится хотя бы один раз красный шар? Сколько раз нужно производить извлечения, чтобы вероятность получить хотя бы один раз красный шар была не меньше 0,9?

## 5.2 ЛОКАЛЬНАЯ И ИНТЕГРАЛЬНАЯ ТЕОРЕМЫ МУАВРА-ЛАПЛАСА

**Задачи для самостоятельного решения**

5.2.1 Средний процент нарушения работы кинескопа телевизора в течение гарантийного срока 10 %. Вычислить вероятность того, что из 20 наблюдаемых телевизоров более 18 выдержат гарантийный срок.

5.2.2 Установлено, что 75 % саженцев данной культуры приживаются. Вычислить вероятность того, что из 48 высаженных саженцев приживутся 30.

5.2.3 На склад поступило 30 ящиков стеклянных изделий. 90 % ящиков поступают с неразбитыми изделиями. Определить вероятность того, что на склад поступит не более 10 ящиков с разбитыми изделиями.

5.2.4 Вероятность поражения мишени стрелком при одном выстреле равна 0,8. Найти вероятность того, что при 100 выстрелах мишень будет поражена не менее 75 раз.

5.2.5 20 % деталей не проходят проверку ОТК. Найти вероятность того, что среди 400 случайно отобранных деталей непроверенными окажется 70.

5.2.6 Вероятность пройти через некоторый заболоченный участок, не промочив ноги, равна 0,6. Какова вероятность того, что из 220 человек, проходивших через заболоченный участок, не промочат ноги от 120 до 133 человек? (Предполагается, что проходившие не используют опыт друг друга).

5.2.7 В ОТК поступила партия изделий, среди которых стандартные составляют 90 %. Найти вероятность того, что из 100 проверенных изделий стандартных окажется 84.

5.2.8 Найти вероятность того, что переключение передач наступит 80 раз на 300-километровой трассе, если на каждом километре этой трассы вероятность переключения передач равна 0,25.

5.2.9 Вероятность выхода из строя за некоторое время одного конденсатора равна 0,2. Определить вероятность того, что за некоторое время из 100 конденсаторов выйдут из строя не менее 20.

5.2.10 Найти вероятность того, что в партии из 800 изделий число изделий высшего сорта заключено между 600 и 700, если изделия высшего сорта составляют 62 %.

5.2.11 Монета была подброшена 40 раз. Найти вероятность того, что герб выпадает в 25 случаях.

5.2.12 Найти вероятность одновременной остановки 30 машин из 100 работающих, если вероятность безостановочной работы для каждой машины равна 0,8.

5.2.13 При штамповке клемм 98 % соответствуют стандарту. Найти вероятность того, что в партии из 600 клемм не соответствуют стандарту от 70 до 80 клемм.

5.2.14 Изделия высшего сорта составляют 50 %. Найти вероятность того, что из 1000 изделий 500 – высшего сорта.

5.2.15 Всхожесть семян данного растения 90 %. Найти вероятность того, что из 900 высаженных семян не более 100 не взойдут.

5.2.16 Вероятность рождения мальчика равна 0,515. Найти вероятность того, что из 1000 рожденных детей будет не более 500 девочек.

5.2.17 Какова вероятность того, что в столбике из 100 наугад отобранных монет число монет, расположенных гербом вверх, будет от 45 до 55?

5.2.18 При массовом производстве шестерен брак составляет 20 %. Какова вероятность того, что из 400 наугад взятых шестерен 90 будут бракованными?

5.2.19 Детали высшего сорта, изготовленные на данном станке, составляют 40 %. Найти вероятность того, что среди наудачу взятых 26 деталей половина окажется высшего сорта.

5.2.20 Школа принимает в первые классы 200 детей. Определить вероятность того, что среди них окажется не более 100 девочек, если вероятность рождения мальчика равна 0,515.

5.2.21 Было посажено 400 деревьев. Найти вероятность того, что число прижившихся деревьев больше 250, если приживаемость деревьев равна 80 %.

5.2.22 Известно, что выпуск сверл повышенной хрупкости (брак) составляет 2 %. Сверла укладываются в коробки по 100 штук. Чему равна вероятность того, что в коробке число годных сверл окажется не менее 80?

5.2.23 Имеется 400 клубней картофеля, из которых 40 нового сорта. Производится выборка объемом 100 клубней. Определить вероятность того, что в этой выборке окажется 35 клубней нового сорта.

5.2.24 Всхожесть семян 80 %. Найти вероятность того, что из 400 высеянных семян ровно 70 не взойдет.

5.2.25 В результате проверки качества приготовленного для посева зерна было установлено, что 90 % зерен всхожи. Требуется определить вероятность того, что из отобранных и высаженных 1000 зерен прорастет не менее 880 и не более 920 зерен.

5.2.26 На бухгалтерском факультете данного вуза девушки составляют 85 %. Найти вероятность того, что из 700 студентов этого факультета юноши составляют не более 200 студентов.

5.2.27 90 % выпуска радиоламп бывает годными. Определить вероятность того, что в партии из 500 штук находится 15 бракованных ламп.

5.2.28 По данным длительной проверки качества выпускаемых запчастей брак составляет 13 %. Определить вероятность того, что в непроверенной партии из 150 запчастей пригодных будет не менее 125 и не более 135.

5.2.29 В денежно–вещевой лотерее на каждые 1000 билетов выигрывают 20. Определить вероятность того, что из 100 билетов выиграют не более 5.

5.2.30 На керамическом заводе 90 % тарелок выпускается продукцией первого сорта. ОТК завода должен проверить партию из 600 изготовленных тарелок. Найти вероятность того, что 540 из них окажется первосортных.

5.2.31 Посажено 600 семян кукурузы, имеющих всхожесть 90 %. Найти вероятность того, что 65 из них не взойдут.

5.2.32 Установлено, что 75 % передаваемых сигналов оказываются принятыми. Найти вероятность того, что из 100 передаваемых сигналов будет принято от 71 до 80.

**Дополнительные задачи**

5.2.33 Игральную кость подбрасывают 800 раз. Какова вероятность того, что число очков, кратное трем, выпадет не меньше 260 и не больше 274 раз?

5.2.34 Вероятность изготовления годной детали на токарном станке равна 0,9. Сколько нужно обработать деталей, чтобы с вероятностью 0,98 можно было ожидать, что не менее 150 деталей будут годными?

5.2.35 Вероятность появления события в каждом из независимых испытаний равна 0,8. Сколько нужно произвести испытаний, чтобы с вероятностью 0,9 можно было ожидать, что событие А появится не менее 75 раз?

5.2.36 В каждой из 1000 колод по 36 карт. Из каждой колоды вынимают наудачу две карты. Чему равна вероятность того, что число пар хотя бы с одним тузом заключено между 100 и 200?

5.2.37 В ящике 10 револьверов одной системы и одинаковых по виду, из них 4 непристрелянных. Вероятность попадания в цель из непристрелянного револьвера равна 0,3; а из пристрелянного – 0,9. Из взятого наудачу револьвера произведено 200 выстрелов по цели. Чему равна вероятность того, что число попаданий в цель заключено между 120 и 150?

## 5.3 ФОРМУЛА ПУАССОНА. ПРОСТЕЙШИЙ ПОТОК СОБЫТИЙ

### Задачи для самостоятельного решения

5.3.1 Среди семян пшеницы 0,6 % сорняков. Какова вероятность того, что при случайном отборе 1000 семян окажется не более 6 семян сорняков?

5.3.2 В течение года град приносит значительный ущерб примерно одному хозяйству из 50. Определить вероятность того, что из 400 хозяйств пострадает не более 6.

5.3.3 Прядильщица обслуживает 1000 веретен. 0,4 % составляет обрыв нити на одном веретене в течение одной минуты. Найти вероятность того, что в течение одной минуты обрыв нити будет не менее чем в 5 веретенах.

5.3.4 Завод отправил на базу 5000 доброкачественных изделий. 0,02 % изделий повреждается в пути. Найти вероятность того, что на базу поступит не более трех негодных изделий.

5.3.5 Вероятность попадания в цель при каждом выстреле равна 0,001. Найти вероятность того, что при 5000 выстрелов будет хотя бы два попадания в цель.

5.3.6 В среднем на 1 $м^2$ площади посева встречается 0,25 стебля сорняков. Определить вероятность того, что на 4 $м^2$: 1) не окажется ни одного сорняка; 2) окажется не более двух сорняков.

5.3.7 В магазин поступило 1000 бутылок минеральной воды. При перевозке оказывается разбитых 0,3 % бутылок. Найти вероятность того, что магазин получит не более трех разбитых бутылок.

5.3.8 В порт в течение суток прибывают три корабля. Какова вероятность того, что в течение пяти часов в порт прибудут хотя бы 4 корабля?

5.3.9 На каждую тысячу семян некоторой культуры приходится в среднем 8 семян сорняков. Какова вероятность того, что среди взятых 200 семян окажется не менее трех семян сорняков?

5.3.10 Некоторый аэропорт принимает в среднем в час 3 самолета. Какова вероятность того, что этот аэропорт в течение двух часов примет: а) более пяти самолетов; б) хотя бы один самолет?

5.3.11 Счетчик Гейгера регистрирует 0,01 % частиц, вылетающих из некоторого радиоактивного источника. Предположим, что за время наблюдения из источника вылетело 30000 частиц. Какова вероятность, что счетчик зарегистрирует: а) более 10 частиц; б) хотя бы одну частицу?

5.3.12 Установлено, что брак при производстве деталей составляет 0,8 %. Найти вероятность того, что из взятых на проверку 1000 деталей не более 10 бракованных.

5.3.13 Число машин, прибывающих в автопарк за 2 минуты, равно четырем. Найти вероятность того, что за 4 минуты прибудет не более семи машин.

5.3.14 Аппаратура состоит из 1000 элементов. Вероятность отказа одного элемента за время Т равна 0,002 и не зависит от работы других элементов. Найти вероятность того, что за время Т откажет не менее трех элементов.

5.3.15 Число вызовов, поступающих на АТС за 2 минуты, равно 4. Найти вероятность того, что за 3 минуты поступит не менее 6 вызовов.

5.3.16 Телевизионная установка содержит 2000 транзисторов, каждый из которых выходит из строя в 0,06 % случаев. Найти вероятность того, что из строя выйдут хотя бы 3 транзистора.

5.3.17 В аэропорт за 3 минуты прибывает 6 самолетов. Найти вероятность того, что за 4 минуты прибудет не менее 8 самолетов.

5.3.18 Телефонная станция обслуживает 400 абонентов. 1 % абонентов могут в течение часа позвонить на станцию. Найти вероятность того, что в течение часа на станцию позвонят не более 6 абонентов.

5.3.19 Среднее число вызовов, поступающих на АТС в одну минуту, равно 5. Найти вероятность того, что за 2 минуты поступит не менее четырех вызовов.

5.3.20 В 0,1 % случаев возможна опечатка на странице машинописного текста. Имеется рукопись объемом 1000 страниц машинописного текста. Найти вероятность того, что взятая наудачу страница содержит не более пяти опечаток.

5.3.21 Коммутатор учреждения обслуживает 500 абонентов. 0,2 % абонентов могут позвонить в течение одной минуты на коммутатор. Какое из событий вероятнее: в течение одной минуты позвонит четыре абонента или позвонят не более трех абонентов?

5.3.22 В течение рабочего дня (7 ч) в парикмахерскую в среднем обращаются 35 клиентов. Какова вероятность того, что в течение определенного часа в парикмахерскую обратятся не более шести клиентов?

5.3.23 Всхожесть семян кукурузы равна 95 %. Найти вероятность того, что при посеве 200 семян не взойдут не более пяти.

5.3.24 На склад сельхозтехники в среднем в течение года (250 рабочих дней) поступает 1500 заявок на получение запасных частей. Определить вероятность того, что в течение определенного рабочего дня на склад поступит не менее семи заявок.

5.3.25 При изготовлении тракторных деталей нестандартные составляют 0,4 %. Найти вероятность того, что в партии из 1000 деталей нестандартных окажется от пяти до восьми.

5.3.26 Среднее число сорняков среди семян некоторой культуры, высеваемых на 1 м$^2$, равно четырем. Определить вероятность того, что на площади 2 м$^2$, выбранной наудачу, число семян сорняков составит не более 7.

5.3.27 Зараженность семян вредителями равна 0,2 %. Найти вероятность того, что из 1000 зерен окажется зараженных вредителями от трех до шести семян.

5.3.28 Среднее число вызовов техпомощи в течение рабочей недели (5 рабочих дней) равно 20. Найти вероятность того, что в течение рабочего дня техпомощь будет вызываться не более пяти раз.

5.3.29 Известно, что на опытном поле у 2 % кустов картофеля стебли поражены фитофторой. Найти вероятность того, что из 300 кустов картофеля этого поля фитофторой будут поражены не более 4 кустов.

5.3.30 В радиоаппаратуре за 10 000 часов непрерывной работы происходит в среднем смена 10 ламп. Найти вероятность выхода из строя радиоаппаратуры (смена хотя бы одной лампы) за 200 часов непрерывной работы.

5.3.31 На каждую 1000 семян некоторой культуры приходится в среднем 10 семян сорняков. Найти вероятность того, что среди наудачу взятых 200 семян этой культуры окажется не более 5 семян сорняков.

5.3.32 3 % коров данной фермы имеют Среднегодовой удой свыше 5000 кг. Какова вероятность того, что из 300 коров фермы не менее 7 коров дадут за год более чем по 5000 кг молока?

**Дополнительные задачи**

5.3.33 Средняя плотность болезнетворных бактерий в 1 м$^3$ воздуха равна 100. Берется на пробу 2 дм$^3$ воздуха. Найти вероятность того, что в нем будет обнаружено хотя бы 5 бактерий.

5.3.34 Среднее число отказов радиоаппаратуры за 1000 часов работы равно 5. Определить вероятность хотя бы одного отказа радиоаппаратуры за 20 часов работы.

5.3.35 Найти среднее число опечаток на странице рукописи, если вероятность того, что страница рукописи содержит хотя бы одну опечатку, равна 0,95. Предполагается, что число опечаток распределено по закону Пуассона.

5.3.36 Проверкой качества изготовляемых на заводе часов установлено, что в среднем 98 % их отвечают предъявляемым требованиям, а 2 % нуждаются в дополнительной регулировке. Приемщик проверяет качество 300 изготовляемых часов. Если при этом среди них обнаружится 11 или более часов, нуждающихся в дополнительной регулировке, вся партия возвращается заводу для доработки. Найти вероятность того, что партия часов будет принята.

5.3.37 При обследовании двух групп мужчин и женщин по 300 человек было установлено, что среди мужчин 5 % дальтоников, а среди женщин – 0,25 %. Найти вероятность того, что выбранные наудачу три лица из наугад взятой группы страдают дальтонизмом.

## Список использованных источников

1 Гмурман, В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика / В.Е. Гмурман. – М.: Высшая школа, 1977 – 2003. – 479 с.

2 Гмурман, В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистики / В.Е. Гмурман. – М.: Высшая школа, 1975 – 2003. – 400 с.

3 Данко, П.Е. Высшая математика в упражнениях и задачах / П.Е. Данко, А.Г. Попов, Т.Я. Кожевникова. – М.: Высшая школа, 1980 г. – Ч.2 – 400 с.

4 Письменный, Д.Т. Конспект лекций по теории вероятностей и математической статистике / Д.Т. Письменный. – М.: Айрис-пресс, 2004. – 256 с.

5 Индивидуальные задания по высшей математике: Операционное исчисление. Элементы теории устойчивости. Теория вероятностей. Математическая статистика: учеб. пособие / А.П. Рябушко [и др.]; под общ. ред. А.П. Рябушко. – Минск: Выш.шк., 2006. – 336 с.

## Приложение А

Таблица А.1 – Значений функции $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$

| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0,0 | 0,3989 | 0,3989 | 0,3989 | 0,3988 | 0,3986 | 0,3984 | 0,3982 | 0,3980 | 0,3977 | 0,3973 |
| 0,1 | 0,3970 | 0,3965 | 0,3961 | 0,3956 | 0,3951 | 0,3945 | 0,3939 | 0,3932 | 0,3925 | 0,3918 |
| 0,2 | 0,3910 | 0,3902 | 0,3894 | 0,3885 | 0,3876 | 0,3867 | 0,3857 | 0,3847 | 0,3836 | 0,3825 |
| 0,3 | 0,3814 | 0,3802 | 0,3790 | 0,3778 | 0,3765 | 0,3752 | 0,3739 | 0,3725 | 0,3712 | 0,3697 |
| 0,4 | 0,3683 | 0,3668 | 0,3653 | 0,3637 | 0,3621 | 0,3605 | 0,3589 | 0,3572 | 0,3555 | 0,3538 |
| 0,5 | 0,3521 | 0,3503 | 0,3485 | 0,3467 | 0,3448 | 0,3429 | 0,3410 | 0,3391 | 0,3372 | 0,3352 |
| 0,6 | 0,3332 | 0,3312 | 0,3292 | 0,3271 | 0,3251 | 0,3230 | 0,3209 | 0,3187 | 0,3166 | 0,3144 |
| 0,7 | 0,3123 | 0,3101 | 0,3079 | 0,3056 | 0,3034 | 0,3011 | 0,2989 | 0,2966 | 0,2943 | 0,2920 |
| 0,8 | 0,2897 | 0,2874 | 0,2850 | 0,2827 | 0,2803 | 0,2780 | 0,2756 | 0,2732 | 0,2709 | 0,2685 |
| 0,9 | 0,2661 | 0,2637 | 0,2613 | 0,2589 | 0,2565 | 0,2541 | 0,2516 | 0,2492 | 0,2468 | 0,2444 |
| 1,0 | 0,2420 | 0,2396 | 0,2371 | 0,2347 | 0,2323 | 0,2299 | 0,2275 | 0,2251 | 0,2227 | 0,2203 |
| 1,1 | 0,2179 | 0,2155 | 0,2131 | 0,2107 | 0,2083 | 0,2059 | 0,2036 | 0,2012 | 0,1989 | 0,1965 |
| 1,2 | 0,1942 | 0,1919 | 0,1895 | 0,1872 | 0,1849 | 0,1826 | 0,1804 | 0,1781 | 0,1758 | 0,1736 |
| 1,3 | 0,1714 | 0,1691 | 0,1669 | 0,1647 | 0,1626 | 0,1604 | 0,1582 | 0,1561 | 0,1539 | 0,1518 |
| 1,4 | 0,1497 | 0,1476 | 0,1456 | 0,1435 | 0,1415 | 0,1394 | 0,1374 | 0,1354 | 0,1334 | 0,1315 |
| 1,5 | 0,1295 | 0,1276 | 0,1257 | 0,1238 | 0,1219 | 0,1200 | 0,1182 | 0,1163 | 0,1145 | 0,1127 |
| 1,6 | 0,1109 | 0,1092 | 0,1074 | 0,1057 | 0,1040 | 0,1023 | 0,1006 | 0,0989 | 0,0973 | 0,0957 |
| 1,7 | 0,0940 | 0,0925 | 0,0909 | 0,0893 | 0,0878 | 0,0863 | 0,0848 | 0,0833 | 0,0818 | 0,0804 |
| 1,8 | 0,0790 | 0,0775 | 0,0761 | 0,0748 | 0,0734 | 0,0721 | 0,0707 | 0,0694 | 0,0681 | 0,0669 |
| 1,9 | 0,0656 | 0,0644 | 0,0632 | 0,0620 | 0,0608 | 0,0596 | 0,0584 | 0,0573 | 0,0562 | 0,0551 |
| 2,0 | 0,0540 | 0,0529 | 0,0519 | 0,0508 | 0,0498 | 0,0488 | 0,0478 | 0,0468 | 0,0459 | 0,0449 |
| 2,1 | 0,0440 | 0,0431 | 0,0422 | 0,0413 | 0,0404 | 0,0396 | 0,0387 | 0,0379 | 0,0371 | 0,0363 |
| 2,2 | 0,0355 | 0,0347 | 0,0339 | 0,0332 | 0,0325 | 0,0317 | 0,0310 | 0,0303 | 0,0297 | 0,0290 |
| 2,3 | 0,0283 | 0,0277 | 0,0270 | 0,0264 | 0,0258 | 0,0252 | 0,0246 | 0,0241 | 0,0235 | 0,0229 |
| 2,4 | 0,0224 | 0,0219 | 0,0213 | 0,0208 | 0,0203 | 0,0198 | 0,0194 | 0,0189 | 0,0184 | 0,0180 |
| 2,5 | 0,0175 | 0,0171 | 0,0167 | 0,0163 | 0,0158 | 0,0154 | 0,0151 | 0,0147 | 0,0143 | 0,0139 |
| 2,6 | 0,0136 | 0,0132 | 0,0129 | 0,0126 | 0,0122 | 0,0119 | 0,0116 | 0,0113 | 0,0110 | 0,0107 |
| 2,7 | 0,0104 | 0,0101 | 0,0099 | 0,0096 | 0,0093 | 0,0091 | 0,0088 | 0,0086 | 0,0084 | 0,0081 |
| 2,8 | 0,0079 | 0,0077 | 0,0075 | 0,0073 | 0,0071 | 0,0069 | 0,0067 | 0,0065 | 0,0063 | 0,0061 |
| 2,9 | 0,0060 | 0,0058 | 0,0056 | 0,0055 | 0,0053 | 0,0051 | 0,0050 | 0,0048 | 0,0047 | 0,0046 |
| 3,0 | 0,0044 | 0,0043 | 0,0042 | 0,0040 | 0,0039 | 0,0038 | 0,0037 | 0,0036 | 0,0035 | 0,0034 |
| 3,1 | 0,0033 | 0,0032 | 0,0031 | 0,0030 | 0,0029 | 0,0028 | 0,0027 | 0,0026 | 0,0025 | 0,0025 |
| 3,2 | 0,0024 | 0,0023 | 0,0022 | 0,0022 | 0,0021 | 0,0020 | 0,0020 | 0,0019 | 0,0018 | 0,0018 |
| 3,3 | 0,0017 | 0,0017 | 0,0016 | 0,0016 | 0,0015 | 0,0015 | 0,0014 | 0,0014 | 0,0013 | 0,0013 |
| 3,4 | 0,0012 | 0,0012 | 0,0012 | 0,0011 | 0,0011 | 0,0010 | 0,0010 | 0,0010 | 0,0009 | 0,0009 |
| 3,5 | 0,0009 | 0,0008 | 0,0008 | 0,0008 | 0,0008 | 0,0007 | 0,0007 | 0,0007 | 0,0007 | 0,0006 |
| 3,6 | 0,0006 | 0,0006 | 0,0006 | 0,0005 | 0,0005 | 0,0005 | 0,0005 | 0,0005 | 0,0005 | 0,0004 |
| 3,7 | 0,0004 | 0,0004 | 0,0004 | 0,0004 | 0,0004 | 0,0004 | 0,0003 | 0,0003 | 0,0003 | 0,0003 |
| 3,8 | 0,0003 | 0,0003 | 0,0003 | 0,0003 | 0,0003 | 0,0002 | 0,0002 | 0,0002 | 0,0002 | 0,0002 |
| 3,9 | 0,0002 | 0,0002 | 0,0002 | 0,0002 | 0,0002 | 0,0002 | 0,0002 | 0,0002 | 0,0001 | 0,0001 |

## Продолжение приложения А

Таблица А.2 – Значения функции $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dz$

| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0,0000 | 0,0040 | 0,0080 | 0,0120 | 0,0160 | 0,0199 | 0,0239 | 0,0279 | 0,0319 | 0,035856 |
| 0,1 | 0,0398 | 0,0438 | 0,0478 | 0,0517 | 0,0557 | 0,0596 | 0,0636 | 0,0675 | 0,0714 | 0,075345 |
| 0,2 | 0,0793 | 0,0832 | 0,0871 | 0,0910 | 0,0948 | 0,0987 | 0,1026 | 0,1064 | 0,1103 | 0,114092 |
| 0,3 | 0,1179 | 0,1217 | 0,1255 | 0,1293 | 0,1331 | 0,1368 | 0,1406 | 0,1443 | 0,1480 | 0,151732 |
| 0,4 | 0,1554 | 0,1591 | 0,1628 | 0,1664 | 0,1700 | 0,1736 | 0,1772 | 0,1808 | 0,1844 | 0,187933 |
| 0,5 | 0,1915 | 0,1950 | 0,1985 | 0,2019 | 0,2054 | 0,2088 | 0,2123 | 0,2157 | 0,2190 | 0,222405 |
| 0,6 | 0,2257 | 0,2291 | 0,2324 | 0,2357 | 0,2389 | 0,2422 | 0,2454 | 0,2486 | 0,2517 | 0,254903 |
| 0,7 | 0,2580 | 0,2611 | 0,2642 | 0,2673 | 0,2704 | 0,2734 | 0,2764 | 0,2794 | 0,2823 | 0,285236 |
| 0,8 | 0,2881 | 0,2910 | 0,2939 | 0,2967 | 0,2995 | 0,3023 | 0,3051 | 0,3078 | 0,3106 | 0,313267 |
| 0,9 | 0,3159 | 0,3186 | 0,3212 | 0,3238 | 0,3264 | 0,3289 | 0,3315 | 0,3340 | 0,3365 | 0,338913 |
| 1 | 0,3413 | 0,3438 | 0,3461 | 0,3485 | 0,3508 | 0,3531 | 0,3554 | 0,3577 | 0,3599 | 0,362143 |
| 1,1 | 0,3643 | 0,3665 | 0,3686 | 0,3708 | 0,3729 | 0,3749 | 0,3770 | 0,3790 | 0,3810 | 0,382977 |
| 1,2 | 0,3849 | 0,3869 | 0,3888 | 0,3907 | 0,3925 | 0,3944 | 0,3962 | 0,3980 | 0,3997 | 0,401475 |
| 1,3 | 0,4032 | 0,4049 | 0,4066 | 0,4082 | 0,4099 | 0,4115 | 0,4131 | 0,4147 | 0,4162 | 0,417736 |
| 1,4 | 0,4192 | 0,4207 | 0,4222 | 0,4236 | 0,4251 | 0,4265 | 0,4279 | 0,4292 | 0,4306 | 0,431888 |
| 1,5 | 0,4332 | 0,4345 | 0,4357 | 0,4370 | 0,4382 | 0,4394 | 0,4406 | 0,4418 | 0,4429 | 0,444083 |
| 1,6 | 0,4452 | 0,4463 | 0,4474 | 0,4484 | 0,4495 | 0,4505 | 0,4515 | 0,4525 | 0,4535 | 0,454486 |
| 1,7 | 0,4554 | 0,4564 | 0,4573 | 0,4582 | 0,4591 | 0,4599 | 0,4608 | 0,4616 | 0,4625 | 0,463273 |
| 1,8 | 0,4641 | 0,4649 | 0,4656 | 0,4664 | 0,4671 | 0,4678 | 0,4686 | 0,4693 | 0,4699 | 0,470621 |
| 1,9 | 0,4713 | 0,4719 | 0,4726 | 0,4732 | 0,4738 | 0,4744 | 0,4750 | 0,4756 | 0,4761 | 0,476705 |
| 2 | 0,4772 | 0,4778 | 0,4783 | 0,4788 | 0,4793 | 0,4798 | 0,4803 | 0,4808 | 0,4812 | 0,481691 |
| 2,1 | 0,4821 | 0,4826 | 0,4830 | 0,4834 | 0,4838 | 0,4842 | 0,4846 | 0,4850 | 0,4854 | 0,485738 |
| 2,2 | 0,4861 | 0,4864 | 0,4868 | 0,4871 | 0,4875 | 0,4878 | 0,4881 | 0,4884 | 0,4887 | 0,488989 |
| 2,3 | 0,4893 | 0,4896 | 0,4898 | 0,4901 | 0,4904 | 0,4906 | 0,4909 | 0,4911 | 0,4913 | 0,491576 |
| 2,4 | 0,4918 | 0,4920 | 0,4922 | 0,4925 | 0,4927 | 0,4929 | 0,4931 | 0,4932 | 0,4934 | 0,493613 |
| 2,5 | 0,4938 | 0,4940 | 0,4941 | 0,4943 | 0,4945 | 0,4946 | 0,4948 | 0,4949 | 0,4951 | 0,495201 |
| 2,6 | 0,4953 | 0,4955 | 0,4956 | 0,4957 | 0,4959 | 0,4960 | 0,4961 | 0,4962 | 0,4963 | 0,496427 |
| 2,7 | 0,4965 | 0,4966 | 0,4967 | 0,4968 | 0,4969 | 0,4970 | 0,4971 | 0,4972 | 0,4973 | 0,497365 |
| 2,8 | 0,4974 | 0,4975 | 0,4976 | 0,4977 | 0,4977 | 0,4978 | 0,4979 | 0,4979 | 0,4980 | 0,498074 |
| 2,9 | 0,4981 | 0,4982 | 0,4982 | 0,4983 | 0,4984 | 0,4984 | 0,4985 | 0,4985 | 0,4986 | 0,498605 |
| 3 | 0,4987 | 0,4987 | 0,4987 | 0,4988 | 0,4988 | 0,4989 | 0,4989 | 0,4989 | 0,4990 | 0,498999 |
| 3,1 | 0,4990 | 0,4991 | 0,4991 | 0,4991 | 0,4992 | 0,4992 | 0,4992 | 0,4992 | 0,4993 | 0,499289 |
| 3,2 | 0,4993 | 0,4993 | 0,4994 | 0,4994 | 0,4994 | 0,4994 | 0,4994 | 0,4995 | 0,4995 | 0,499499 |
| 3,3 | 0,4995 | 0,4995 | 0,4995 | 0,4996 | 0,4996 | 0,4996 | 0,4996 | 0,4996 | 0,4996 | 0,499651 |
| 3,4 | 0,4997 | 0,4997 | 0,4997 | 0,4997 | 0,4997 | 0,4997 | 0,4997 | 0,4997 | 0,4997 | 0,499758 |
| 3,5 | 0,4998 | 0,4998 | 0,4998 | 0,4998 | 0,4998 | 0,4998 | 0,4998 | 0,4998 | 0,4998 | 0,499835 |
| 3,6 | 0,4998 | 0,4998 | 0,4999 | 0,4999 | 0,4999 | 0,4999 | 0,4999 | 0,4999 | 0,4999 | 0,499888 |
| 3,7 | 0,4999 | 0,4999 | 0,4999 | 0,4999 | 0,4999 | 0,4999 | 0,4999 | 0,4999 | 0,4999 | 0,499925 |
| 3,8 | 0,4999 | 0,4999 | 0,4999 | 0,4999 | 0,4999 | 0,4999 | 0,4999 | 0,4999 | 0,4999 | 0,49995 |
| 3,9 | 0,5000 | 0,5000 | 0,5000 | 0,5000 | 0,5000 | 0,5000 | 0,5000 | 0,5000 | 0,5000 | 0,499967 |
| 4 | 0,5000 | 0,5000 | 0,5000 | 0,5000 | 0,5000 | 0,5000 | 0,5000 | 0,5000 | 0,5000 | 0,499978 |
| 4,1 | 0,5000 | 0,5000 | 0,5000 | 0,5000 | 0,5000 | 0,5000 | 0,5000 | 0,5000 | 0,5000 | 0,499986 |
| 4,2 | 0,5000 | 0,5000 | 0,5000 | 0,5000 | 0,5000 | 0,5000 | 0,5000 | 0,5000 | 0,5000 | 0,499991 |

**Продолжение приложения А**

Продолжение таблицы А.2

| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 4,3 | 0,5000 | 0,5000 | 0,5000 | 0,5000 | 0,5000 | 0,5000 | 0,5000 | 0,5000 | 0,5000 | 0,499994 |
| 4,4 | 0,5000 | 0,5000 | 0,5000 | 0,5000 | 0,5000 | 0,5000 | 0,5000 | 0,5000 | 0,5000 | 0,499996 |
| 4,5 | 0,5000 | 0,5000 | 0,5000 | 0,5000 | 0,5000 | 0,5000 | 0,5000 | 0,5000 | 0,5000 | 0,499998 |
| 4,6 | 0,5000 | 0,5000 | 0,5000 | 0,5000 | 0,5000 | 0,5000 | 0,5000 | 0,5000 | 0,5000 | 0,499999 |
| 4,7 | 0,5000 | 0,5000 | 0,5000 | 0,5000 | 0,5000 | 0,5000 | 0,5000 | 0,5000 | 0,5000 | 0,499999 |
| 4,8 | 0,5000 | 0,5000 | 0,5000 | 0,5000 | 0,5000 | 0,5000 | 0,5000 | 0,5000 | 0,5000 | 0,499999 |
| 4,9 | 0,5000 | 0,5000 | 0,5000 | 0,5000 | 0,5000 | 0,5000 | 0,5000 | 0,5000 | 0,5000 | 0,5 |

## Продолжение приложения А

Таблица А.3 –Значения функции $e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^m}{m!}$

| $m$ | λ = 0,1 | λ = 0,2 | λ = 0,3 | λ = 0,4 | λ = 0,5 | λ = 0,6 | λ = 0,7 | λ = 0,8 | λ = 0,9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| 0 | 0,9048 | 0,8187 | 0,7408 | 0,6703 | 0,6065 | 0,5488 | 0,4966 | 0,4493 | 0,4066 |
| 1 | 0,0905 | 0,1637 | 0,2222 | 0,2681 | 0,3033 | 0,3293 | 0,3476 | 0,3595 | 0,3659 |
| 2 | 0,0045 | 0,0164 | 0,0333 | 0,0536 | 0,0758 | 0,0988 | 0,1217 | 0,1438 | 0,1647 |
| 3 | 0,0002 | 0,0011 | 0,0033 | 0,0072 | 0,0126 | 0,0198 | 0,0284 | 0,0383 | 0,0494 |
| 4 | 0,0000 | 0,0001 | 0,0003 | 0,0007 | 0,0016 | 0,0030 | 0,0050 | 0,0077 | 0,0111 |
| 5 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0001 | 0,0002 | 0,0004 | 0,0007 | 0,0012 | 0,0020 |
| 6 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0001 | 0,0002 | 0,0003 |
| $m$ | λ = 1 | λ = 2 | λ = 3 | λ = 4 | λ = 5 | λ = 6 | λ = 7 | λ = 8 | λ = 9 |
| 1 | 0,3679 | 0,1353 | 0,0498 | 0,0183 | 0,0067 | 0,0025 | 0,0009 | 0,0003 | 0,0001 |
| 2 | 0,3679 | 0,2707 | 0,1494 | 0,0733 | 0,0337 | 0,0149 | 0,0064 | 0,0027 | 0,0011 |
| 3 | 0,1839 | 0,2707 | 0,2240 | 0,1465 | 0,0842 | 0,0446 | 0,0223 | 0,0107 | 0,0050 |
| 4 | 0,0613 | 0,1804 | 0,2240 | 0,1954 | 0,1404 | 0,0892 | 0,0521 | 0,0286 | 0,0150 |
| 5 | 0,0153 | 0,0902 | 0,1680 | 0,1954 | 0,1755 | 0,1339 | 0,0912 | 0,0573 | 0,0337 |
| 6 | 0,0031 | 0,0361 | 0,1008 | 0,1563 | 0,1755 | 0,1606 | 0,1277 | 0,0916 | 0,0607 |
| 7 | 0,0005 | 0,0120 | 0,0504 | 0,1042 | 0,1462 | 0,1606 | 0,1490 | 0,1221 | 0,0911 |
| 8 | 0,0001 | 0,0034 | 0,0216 | 0,0595 | 0,1044 | 0,1377 | 0,1490 | 0,1396 | 0,1171 |
| 9 | 0,0000 | 0,0009 | 0,0081 | 0,0298 | 0,0653 | 0,1033 | 0,1304 | 0,1396 | 0,1318 |
| 10 | 0,0000 | 0,0002 | 0,0027 | 0,0132 | 0,0363 | 0,0688 | 0,1014 | 0,1241 | 0,1318 |
| 11 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0008 | 0,0053 | 0,0181 | 0,0413 | 0,0710 | 0,0993 | 0,1186 |
| 12 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0002 | 0,0019 | 0,0082 | 0,0225 | 0,0452 | 0,0722 | 0,0970 |
| 13 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0001 | 0,0006 | 0,0034 | 0,0113 | 0,0263 | 0,0481 | 0,0728 |
| 14 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0002 | 0,0013 | 0,0052 | 0,0142 | 0,0296 | 0,0504 |
| 15 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0001 | 0,0005 | 0,0022 | 0,0071 | 0,0169 | 0,0324 |
| 16 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0002 | 0,0009 | 0,0033 | 0,0090 | 0,0194 |
| 17 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0003 | 0,0014 | 0,0045 | 0,0109 |
| 18 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0001 | 0,0006 | 0,0021 | 0,0058 |

*Учебное издание*

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ. СЛУЧАЙНЫЕ СОБЫТИЯ

Практикум по решению задач

Составители:
**Лох** Светлана Владимировна
**Юрченко** Ирина Викторовна
**Гребенцов** Юрий Михайлович

Редактор *А.А. Щербакова*
Технический редактор *Н.Г. Тверская*

Подписано в печать 29.02.2016. Формат 60×84 1/16.
Бумага офсетная. Гарнитура Times New Roman. Ризография.
Уч.-изд. л. 2,3. Усл. печ. л. 2,75.
Тираж 46 экз. Заказ 23.

Учреждение образования
«Могилевский государственный университет продовольствия».
Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя,
распространителя печатных изданий № 1/272 от 04.04.2014.
Пр-т Шмидта, 3, 212027, Могилев.

Отпечатано в учреждении образования
«Могилевский государственный университет продовольствия».
Пр-т Шмидта, 3, 212027, Могилев.