Министерство образования Республики Беларусь

Учреждение образования

«МОГИЛЕВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ПРОДОВОЛЬСТВИЯ»

К. А. Решко, Л. И. Рыдевская

ВЕКТОРЫ И НЕКОТОРЫЕ ИХ ПРИМЕНЕНИЯ

Учебно-методические пособие: теоретическая часть, примеры решения задач, задания для самостоятельного решения

Могилев 2009

УДК 519.2

Рассмотрены и рекомендованы к изданию
на заседании кафедры высшей математики
Протокол № 3 от 29.10.2009 г.
УМК по механическому профилю специальностей
Протокол № 2 от 01.12.2009 г.
УМК по технологическому профилю специальностей
Протокол № 2 от 30.11.2009 г.
УМК по экономическому профилю специальностей
Протокол № 2 от 17.11.2009 г.
Научно-методическим Советом университета
Протокол № 3 от 8.12.2009 г.

Составители:
К.А.Решко, Л.И.Рыдевская

Рецензент:
кандидат физико-математических наук, доцент кафедры ВМ УО МГУП
А.М. Гальмак
кандидат физико-математических наук, доцент кафедры ВМ ГУВПО БРУ
В. В. Пугин

Учебно-методическое пособие предназначено для изучения студентами основ векторной алгебры: линейные действия над векторами, базисы на прямой, плоскости и в пространстве, системы координат, нелинейные действия над векторами и их применения.

Теоретическая часть сопровождается примерами решения задач, вопросами для самоконтроля и задачами прикладного характера.

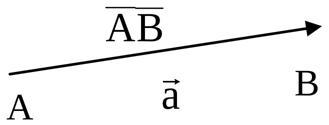
Содержание пособия соответствует рабочим программам курса «Высшая математика», содержит перечень основной и дополнительной литературы.

УДК 519.2

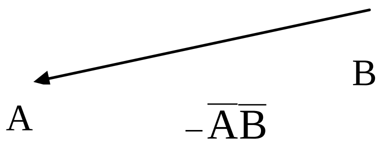
СОДЕРЖАНИЕ

1 Основные понятия вектора

Величины различают скалярные и векторные. К скалярным относятся такие, как длина, площадь, объем, время и другие. Они характеризуются одним числом. Существуют также такие величины, как сила, скорость, напряженность и другие, которые задаются не только числом, но и направлением. Их относят к векторным величинам. Геометрически вектором называют направленный отрезок AB. Он обозначается $\overline{AB}$ или $\bar{a}$. Точка A – его начало, B – его конец.

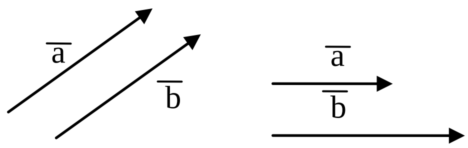


Слово «вектор» происходит от латинского vector – переноситель. Вектор $\overline{BA}$ называется противоположным вектору $\overline{AB}$ и обозначается $-\overline{AB}$.

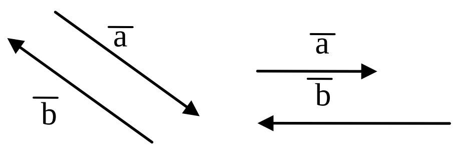


Длиной $|\overline{AB}|$ вектора $\overline{AB}$ или его модулем называется длина соответствующего отрезка AB.

Таким образом, вектор считается заданным в некотором пространстве , если известна его длина, и указано направление в этом пространстве. В связи с этим каждый вектор не меняя его длины и направления можно перемещать в пространстве. Такое перемещение называют параллельным переносом вектора.



Векторы направленные одинаково

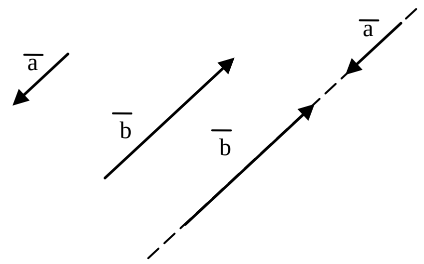


Векторы направленные противоположно

Два вектора $\bar{a}$ и $\bar{b}$ считаются равными, если параллельным переносом их можно совместить. Оба эти вектора можно рассматривать как один, т.е. векторное равенство $\bar{a}=\bar{b}$ понимают в том смысле, что $\bar{a}$ и $\bar{b}$ по сути являются различными обозначениями одного и того же вектора.

Если начало и конец вектора совпадают, то такой вектор называется нулевым и обозначается $\bar{0}$. Если $|\overline{AB}| = 1$, то вектор $\overline{AB}$ называется единичным.

Два и более векторов называются коллинеарными, если параллельным переносом их можно расположить на одной прямой. Из этого следует, что любые два ненулевых коллинеарных вектора направлены одинаково или противоположно. Отметим, что нулевой вектор коллинеарен любому вектору.

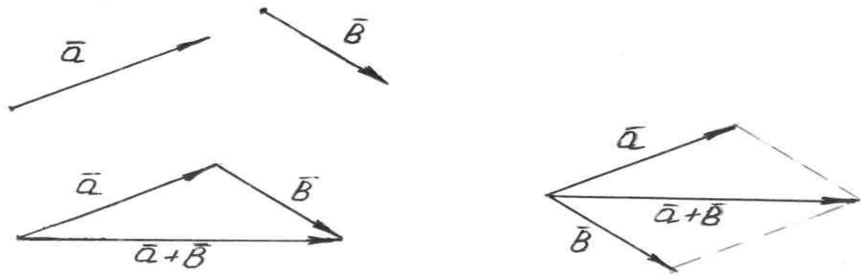


Три и более векторов называются компланарными, если параллельным переносом их можно разместить в одной плоскости. В противном случае эти векторы считаются некомпланарными, т.е. нет такой плоскости, в которой параллельным переносом можно их разместить.

2 Линейные действия над векторами и их свойства

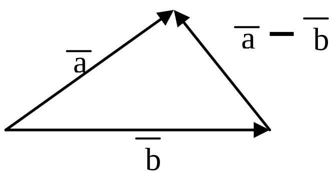
К линейным действиям над векторами относятся их сложение и умножение вектора на число. Правила их выполнения и обозначения покажем на рисунках:

а) сложение двух векторов

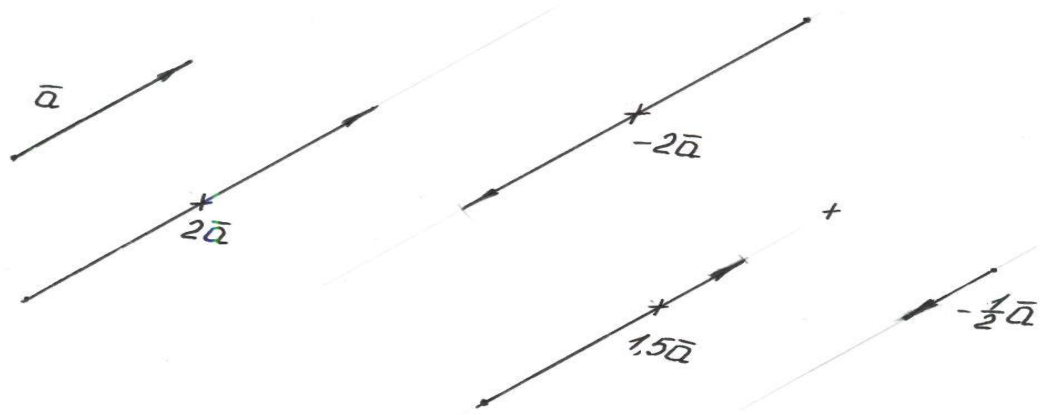


треугольник параллелограмм

Вычитание векторов рассматривается как действие обратное их сложению, т.е. $\bar{a} - \bar{b} = \bar{a} + (-\bar{b})$



б) умножение вектора на число



Сложение векторов и умножение вектора на число обладают следующими основными свойствами, которые приведем без доказательства:

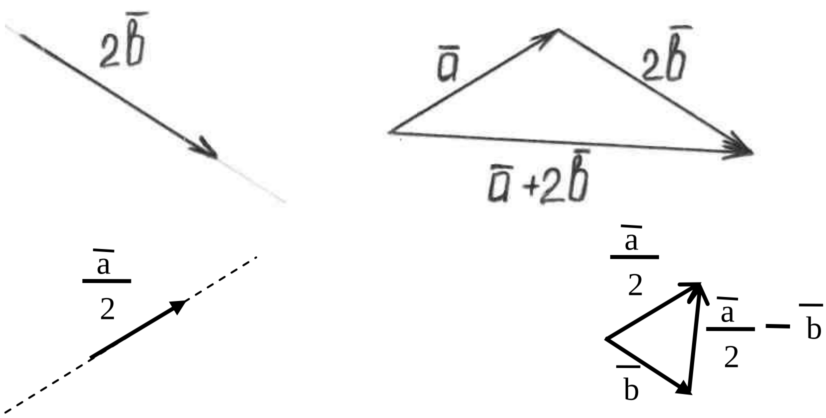
1) $\bar{a} + \bar{b} = \bar{b} + \bar{a}$
2) $(\bar{a} + \bar{b}) + \bar{c} = \bar{a} + (\bar{b} + \bar{c})$
3) $\bar{a} + (-\bar{a}) = \bar{0}$
4) $\bar{a} + (-\bar{b}) = \bar{a} - \bar{b}$
5) $\bar{a}\lambda = \lambda\bar{a}$, $\lambda \in R$
6) $\lambda_1(\lambda_2\bar{a}) = (\lambda_1\lambda_2)\bar{a}$, $\lambda_1, \lambda_2 \in R$
7) $\lambda(\bar{a} + \bar{b}) = \lambda\bar{a} + \lambda\bar{b}$, $\lambda \in R$
8) Если $\bar{a} = \bar{b}$, то $\lambda\bar{a} = \lambda\bar{b}$, $\lambda \in R$
9) Если $\bar{a}$ и $\bar{b}$ коллинеарны, то существует единственное число $\lambda \in R$ такое, что $\bar{a} = \lambda\bar{b}$
10) Если $\bar{a} = \lambda\bar{b}$, где $\lambda \in R$, то $\bar{a}$ и $\bar{b}$ коллинеарны

Пример 1. Пусть

– два вектора

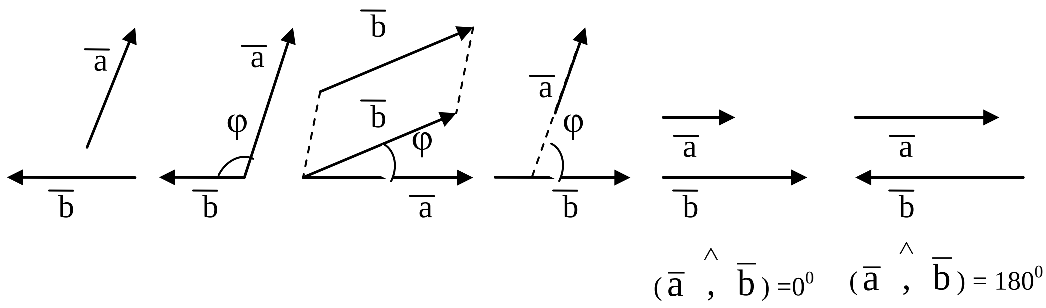
Построить: 1) $\bar{a} + 2\bar{b}$ и 2) $\frac{\bar{a}}{2} - \bar{b}$

Решение



3 Проекция вектора на ось

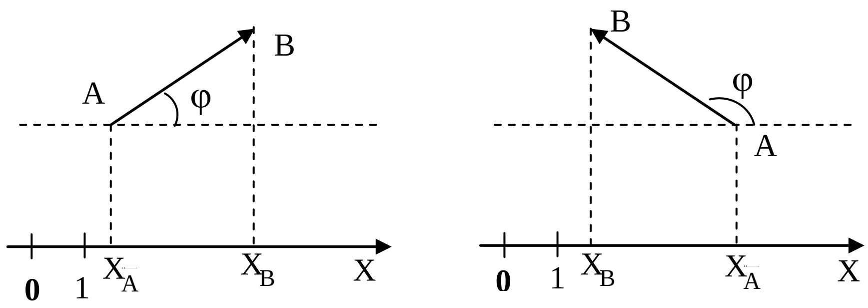
Углом между двумя векторами называется меньший из двух угол между ними и обозначается $(\widehat{\bar{a}, \bar{b}}) = \varphi$. На следующих рисунках векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ приводятся к общему началу с помощью параллельного переноса.



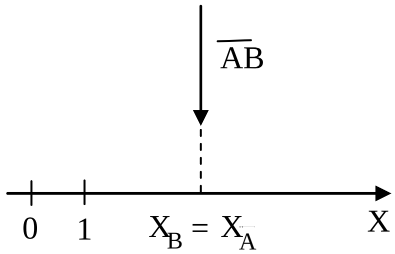
Если $\varphi = 90^0$, то векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ называются перпендикулярными. Обозначение: $\bar{a} \perp \bar{b}$.

Прямая линия называется числовой осью, если на ней указано положительное направление, начало отсчета и единичный вектор, направление которого совпадает с положительным направлением этой прямой. Как правило, числовая ось горизонтальная, а направление слева направо.

Пусть на плоскости



Число $x_B - x_A$ называется проекцией вектора $\overline{AB}$ на ось Ох и обозначается $\text{пр}_{Ox}\overline{AB}$. Как видно, $\text{пр}_{Ox}\overline{AB} = |\overline{AB}| \cos\varphi$. Заметим, что число $x_B - x_A$, (проекция $\overline{AB}$ на ось Ох) может быть положительным, отрицательным или равно нулю (случай когда $\varphi = 90^0$)



$\text{пр}_{Ox}\ \overline{AB} = x_B - x_A = 0$

Если числовая ось Ox и векторы $\bar{a}$, $\bar{b}$ лежат в одной плоскости, то $\text{пр}_{Ox}\ (\bar{a} + \bar{b}) = \text{пр}_{Ox}\ \bar{a} + {}_{Ox}\ \bar{b}$ и $\text{пр}_{Ox}\ (\lambda\bar{a}) = \lambda\ \text{пр}_{Ox}\ \bar{a}$, $\lambda \in R$.

Пример 2. Дан вектор $\vec{a}$, образующий с осью Ou угол $\varphi_1 = 120^0$, и вектор $\vec{b}$, образующий с той же осью угол $\varphi_2 = 60^0$. Найти проекцию суммы $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$, где $\vec{c} = 2\vec{b}$, на ось Ou, если известно, что $|\vec{a}| = 8$, $|\vec{b}| = 6$.

Решение

$\text{пр}_{Ou}\vec{a} = |\vec{a}|\cos\varphi_1 = 8 \cdot \cos 120^0 = 8 \cdot (-\frac{1}{2}) = -4$;

$\text{пр}_{Ou}\ \vec{b} = |\vec{b}|\cos\varphi_2 = 6 \cdot \cos 60^0 = 6 \cdot \frac{1}{2} = 3$.

$\text{пр}_{Ou}\ \vec{c} = \text{пр}_{Ou}(2\vec{b}) = 2\ \text{пр}_{Ou}\ \vec{b} = 2 \cdot 3 = 6$. Значит,

$\text{пр}_{Ou}\ (\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) = \text{пр}_{Ou}\ \vec{a} + \text{пр}_{Ou}\ \vec{b} + \text{пр}_{Ou}\ \vec{c} = -4 + 3 + 6 = 5$.

4 Линейная зависимость векторов, свойства, базис

Векторы $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_k$ называются линейно зависимыми, если существуют такие числа $c_1, c_2, \ldots, c_k$, не все равные нулю, для которых имеет место равенство

$$c_1\vec{a}_1 + c_2\vec{a}_2 + \ldots + c_k\vec{a}_k = \bar{0}. \tag{1}$$

Векторы $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_k$ называются линейно независимыми, если равенство (1) выполняется только при $c_1 = c_2 = \ldots = c_k = 0$.

Из равенства (1), предполагая, например, что $c_1 \neq 0$, получим

$$\vec{a}_1 = (-\frac{c_2}{c_1})\vec{a}_2 + (-\frac{c_3}{c_1})\vec{a}_3 + \ldots + (-\frac{c_k}{c_1})\vec{a}_k.$$

Обозначим $-\frac{c_2}{c_1} = \lambda_2$, $-\frac{c_3}{c_1} = \lambda_3$, …, $-\frac{c_k}{c_1} = \lambda_k$, тогда $\vec{a}_1 = \lambda_2\vec{a}_2 + \lambda_3\vec{a}_3 + \ldots + \lambda_k\vec{a}_k$.

Выражение $\lambda_2\vec{a}_2 + \lambda_3\vec{a}_3 + \ldots, \lambda_k\vec{a}_k$ называется линейной комбинацией векторов $\vec{a}_2, \vec{a}_3, \ldots, \vec{a}_k$.

Приведем без доказательства основные свойства линейно зависимых и линейно независимых векторов.

Свойство 1. Любые два коллинеарных вектора линейно зависимы, а любые два неколлинеарных вектора линейно независимы.

Свойство 2. Любые три компланарных вектора линейно зависимы, а любые три некопланарных вектора линейно независимы.

Свойство 3. Любые четыре вектора линейно зависимы.

Сформулированные свойства позволяют ввести понятие базиса на прямой, на плоскости и в пространстве, которое лежит в основе определения различных систем координат.

Базисом на прямой называется любой ненулевой вектор этой прямой, на плоскости – любые два неколлинеарных вектора этой плоскости, выбранные в определенном порядке, в пространстве – любые три некомпланарных вектора в этом пространстве, выбранные в определенном порядке. Отметим, что на прямой, на плоскости, в пространстве можно выбрать сколько угодно базисов.

Векторы, составляющие базис, называют базисными. Если $\bar{a}$, $\bar{b}$ – базисные вектора на плоскости, то обозначают ($\bar{a}$, $\bar{b}$), здесь $\bar{a}$ – первый вектор базиса, $\bar{b}$ – второй. Аналогично для пространства.

Из сформулированных трех свойств, связывающих линейную зависимость векторов с их коллинеарностью, компланарностью и наоборот, учитывая определения базиса, вытекает следующая.

Теорема . *Любой вектор на прямой, на плоскости и в пространстве единственным образом линейно выражается через их базис соответственно.*

Таким образом, если $\bar{a}$ –базис на прямой и $\bar{b}$ – вектор на этой прямой, то $\bar{b} = \lambda\bar{a}$ ($\bar{a}$, $\bar{b}$— линейно зависимы). Если ($\bar{a}$, $\bar{b}$) – базис на плоскости и $\bar{c}$ – вектор на этой плоскости, то $\bar{c} = \alpha\bar{a} + \beta\bar{b}$ ($\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$—линейно зависимы) . Если ($\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$) – базис в пространстве и $\bar{d}$ – вектор этого пространства, то $\bar{d} = = \alpha\bar{a} + \beta\bar{b} + \gamma\bar{c}$ ($\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$, $\bar{d}$—линейно зависимы). Отметим, что λ, $(\alpha; \beta)$, $(\alpha; \beta; \gamma)$ единственны.

Число λ называется координатой вектора $\bar{b}$ на прямой в базисе $\bar{a}$, пара чисел $(\alpha; \beta)$ – координатами вектора $\bar{c}$ на плоскости в базисе ($\bar{a}$, $\bar{b}$), тройка чисел $(\alpha; \beta; \gamma)$ – координатами вектора $\bar{d}$ в пространстве в базисе ($\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$).

Для векторов, заданных своими координатами, сформулируем следующие четыре основных правила:

1) Если $\bar{a} = \bar{0}$, то $\bar{a}(0; 0)$.

2) Если ($\bar{a}$, $\bar{b}$) – базис на плоскости и $\bar{c} = \alpha\bar{a} + \beta\bar{b}$, то $\lambda\bar{c} = (\lambda\alpha)\bar{a} + (\lambda\beta)\bar{b}$ или $\lambda\bar{c}(\lambda\alpha; \lambda\beta)$.

3) Если ($\bar{a}$, $\bar{b}$) – базис на плоскости, $\bar{d}_1 = \alpha_1\bar{a} + \beta_1\bar{b}$, $\bar{d}_2 = \alpha_2\bar{a} + \beta_2\bar{b}$, то $\bar{d}_1 \pm \bar{d}_2 = (\alpha_1 \pm \alpha_2)\bar{a} + (\beta_1 \pm \beta_2)\bar{b}$ или $\bar{d}_1 \pm \bar{d}_2(\alpha_1 \pm \alpha_2; \beta_1 \pm \beta_2)$.

4) Два вектора в некотором базисе на плоскости равны тогда и только тогда, когда равны их соответствующие координаты в том же базисе.

Такие правила 1-4 справедливы и для векторов в пространстве.

Пример 3. В некотором базисе даны векторы $\bar{a}$ (–2, 1, 3) и $\bar{b}$ (3, –1, 2). Вычислить координаты векторов: $\bar{c} = 2\bar{a} + 3\bar{b}$ и $\vec{d} = 3\vec{a} - 4\bar{b}$.

Решение. Вычислим координаты векторов $2\vec{a}$, $3\bar{b}$, $3\bar{a}$, и $4\bar{b}$:

$2\bar{a}$ = (2·(–2), 2·1, 2·3) = (–4, 2, 6);

$3\bar{b}$ = (3·3, 3·(–1), 3·2) = (9, –3, 6);

$3\bar{a}$ = (3·(–2), 3·1, 3·3) = (–6, 3, 9);

$4\bar{b}$ = (4·3, 4(–1), 4·2) = (12, –4, 8).

Вычислим теперь координаты $\vec{c}$ и $\vec{d}$:

$\bar{c}$ = (–4 + 9, 2 + (–3), 6 + 6) = (5, –1, 12) ;

$\bar{d}$ = (–6 – 12, 3 – (–4), 9 – 8) = (–18, 7, 1).

Пример 4. Даны два вектора: $\bar{b}$ (3, 4) и $\bar{c}$ (2, –5). Показать, что ($\bar{b}$, $\bar{c}$) – базис и найти разложение вектора $\bar{a}$ (7, 40) по базису ($\bar{b}$, $\bar{c}$).

Решение. Предположим, что $\vec{b}$ и $\vec{c}$ линейно зависимы. Значит, они коллинеарны $\begin{cases} 3 = \lambda \cdot 2 \\ 4 = \lambda \cdot (-5). \end{cases} \Leftrightarrow \lambda = \frac{3}{2}; \;\; \lambda = -\frac{4}{5}$. Получили противоречие, значит, ($\bar{b}$, $\bar{c}$)– базис. На основании сформулированной теоремы вектор $\vec{a}$ представляется единственным образом в виде $\bar{a} = \lambda_1\bar{b} + \lambda_2\bar{c}$.

В координатной форме в нашем примере это равенство имеет вид (7, 40) = λ_1(3, 4) + λ_2(2, –5).

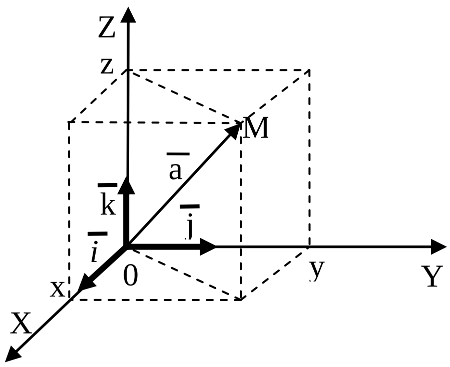
Откуда получаем систему линейных уравнений относительно неизвестных λ_1 и λ_2:

$$\begin{cases} 3\lambda_1 + 2\lambda_2 = 7 \\ 4\lambda_1 - 5\lambda_2 = 40. \end{cases}$$

Решая ее, получим λ_1 = 5, λ_2 = – 4. Поэтому $\bar{a} = 5\bar{b} - 4\bar{c}$.

5 Декартова прямоугольная система координат. Координаты вектора

Пусть $\bar{i}$; $\bar{j}$; $\bar{k}$ – единичные с общим началом O, взаимно перпендикулярные три вектора пространства и пусть ($\bar{i}$; $\bar{j}$; $\bar{k}$) –базис этого пространства. Такой базис называется ортонормированным. Через эти три вектора проведем прямые, которые обозначим X, Y, Z соответственно базисным векторам. Эти прямые назовем осями координат, точку O – началом координат. Совокупность точки O и осей X, Y, Z называется декартовой прямоугольной системой координат пространства. Так же определяется декартова прямоугольная система координат на плоскости (базис ($\bar{i}$; $\bar{j}$), оси X, Y).

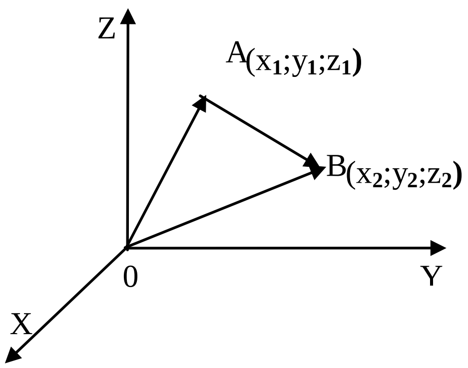


Пусть M – произвольная точка пространства. Вектор $\overline{OM}$ называется радиус–вектором. Его единственным образом можно разложить по базису ($\bar{i}$; $\bar{j}$; $\bar{k}$), т.е. $\overline{OM} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}$. Числа x, y, z называются координатами вектора $\overline{OM}$ в базисе ($\bar{i}$; $\bar{j}$; $\bar{k}$), они же являются проекциями вектора $\overline{OM}$ на оси X, Y, Z соответственно. Эти же числа x, y, z называются также координатами точки M в пространстве. Обозначение: $\overline{OM}(x, y, z)$ и M(x, y, z). Плоскости, проходящие через пары осей координат, называются координатными плоскостями. Их обозначают XOY, XOZ, YOZ.

Пусть в пространстве выбрана декартова прямоугольная система координат и $\overline{AB}$ – некоторый вектор этого пространства, причем $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$. Тогда

$$\overline{AB}\ (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1). \tag{2}$$

Покажем это. Построим вначале чертеж. Из него видно, что $\overline{AB} = \overline{OB} - \overline{OA}$.



Пусть $\overline{AB} = X\vec{i} + Y\vec{j} + Z\vec{k}$, где (X, Y, Z) – неизвестные координаты .

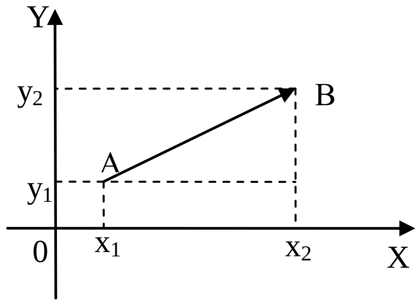
$\overline{OB} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}$, $\overline{OA} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}$,

$\overline{OB} - \overline{OA} = (x_2 - x_1)\vec{i} + (y_2 - y_1)\vec{j} + (z_2 - z_1)\vec{k}$.

По правилу 4 предыдущего пункта $X=x_2-x_1$, $Y=y_2-y_1$, $Z=z_2-z_1$, т. е.

$\overline{AB}\ (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$.

Выведем теперь формулу для вычисления длины вектора. Пусть А (x_1,y_1), В (x_2,y_2). Покажем, что $|\overline{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$



Если вектор $\overline{AB}$ в пространстве, где А (x_1,y_1,z_1), В (x_2,y_2,z_2), то его длина вычисляется по формуле

$$d = |\overline{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}\ . \qquad (3)$$

Направляющими косинусами вектора $\overline{AB}$ называются косинусы углов α, β, γ, образованных этим вектором с осями координат Ox, Oy, Oz:

$$\cos\alpha = \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}};$$

$$\cos\beta = \frac{y_2 - y_1}{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}}; \qquad (4)$$

$$\cos\gamma = \frac{z_2 - z_1}{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}}.$$

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

Пример 5. Даны проекции силы $\vec{F}$ на координатные оси: $x = 2$, $y = -2$, $z = 2\sqrt{2}$. Найти величину силы $\vec{F}$ и направление ее действия.

Решение. Вектор $\vec{F}$ по условию имеет координаты $x = 2$, $y = -2$, $z = 2\sqrt{2}$. Величина силы $\vec{F}$ равна модулю вектора $\vec{F}$, который можно вычислить по формуле:

$$|\vec{F}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{2^2 + (-2)^2 + (2\sqrt{2})^2} = 4.$$

Направляющие косинусы вектора $\vec{F}$ определим по формулам (4):

$$\cos\alpha = \frac{2}{4} = \frac{1}{2};\ \cos\beta = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2};\ \cos\gamma = \frac{2\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Следовательно, сила $|\vec{F}| = 4$ действует в направлении вектора, образующего с координатными осями углы: $\alpha = 60^0$, $\beta = 120^0$, $\gamma = 45^0$.

Пример 6. Найти координаты начала вектора $\vec{a}(1; 3; -7)$, если его конец совпадает с точкой B(2, –5, 1).

Решение. Пусть начало вектора $\vec{a}$ есть точка $A(x_1, y_1, z_1)$. По формуле (2) получаем $(1; 3; -7) = (2 - x_1, -5 - y_1, 1 - z_1)$. Откуда находим координаты точки A: $2 - x_1 = 1$, $-5 - y_1 = 3$, $1 - z_1 = -7$, т.е. $x_1 = 1$, $y_1 = -8$, $z_1 = 8$.

Итак, начало вектора есть точка A(1, –8, 8).

6 Деление отрезка в заданном отношении

Разделить отрезок M_1M_2 в отношении $\lambda > 0$ – это значит найти на данном отрезке такую точку M, что имеет место равенство

$$\frac{M_1M}{MM_2} = \lambda, \text{ или } M_1M = \lambda\, MM_2.$$

Пусть даны $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$. Найдем координаты x, y, z искомой точки M. Очевидно, что $\overline{M_1M} = \lambda\,\overline{MM_2}$ или

$$(x - x_1)\vec{i} + (y - y_1)\vec{j} + (z - z_1)\vec{k} = \lambda((x_2 - x)\vec{i} + (y_2 - y)\vec{j} + (z_2 - z)\vec{k}.$$

Из равенства векторов следует равенство их проекций:

$$x - x_1 = \lambda(x_2 - x),\ y - y_1 = \lambda(y_2 - y),\ z - z_1 = \lambda(z_2 - z).$$

Отсюда

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda},\ y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda},\ z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1+\lambda}. \tag{5}$$

Если точка M является серединой отрезка M_1M_2, то $M_1M = MM_2$ и следовательно, $\lambda = 1$. В этом случае равенство (5) примет вид:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2},\ y = \frac{y_1 + y_2}{2},\ z = \frac{z_1 + z_2}{2}. \tag{5′}$$

Если точки $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$ лежат в плоскости Oxy, то формулы (5) и (5′) запишутся следующим образом:

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda},\ y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda}; \tag{6}$$

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2},\ y = \frac{y_1 + y_2}{2}. \tag{6′}$$

Пример 7. Найти точку M(x, y, z), делящую отрезок AB в отношении AM : MB = 3 : 2, A(1, 2, –1), B(9, –7, –2).

Решение. По условию AM : MB = 3 : 2. Подставляя в формулы (5) значения $x_1 = 1, y_1 = 2, z_1 = -1$, $x_2 = 9, y_2 = -7, z_2 = -2$, $\lambda = \frac{3}{2}$, получим координаты точки M :

$$x=\frac{1+\frac{3}{2}\cdot 9}{1+\frac{3}{2}}=5{,}8;\quad y=\frac{2+\frac{3}{2}\cdot(-7)}{1+\frac{3}{2}}=3{,}4;\quad z=\frac{-1+\frac{3}{2}\cdot(-2)}{1+\frac{3}{2}}=-1{,}6.$$

Следовательно, M(5,8; –3,4; –1,6).

7 Нелинейные действия над векторами

Рассмотрим наиболее используемые в математике, физике, механике и в других науках следующие три вида нелинейных действий над векторами: скалярное, векторное, смешанное. Отметим, что кроме этих действий существуют и другие, которые можно найти в литературе, в приведенном в конце пособия списке.

а) скалярное произведение двух векторов

Определение. Скалярным произведением $\bar{a}\bullet\bar{b}$ двух векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ называется число $|\bar{a}|\,|\bar{b}|\cos\varphi$, где $\varphi=(\bar{a}\,\widehat{,}\,\bar{b})$.

Итак, $\bar{a}\bullet\bar{b}=|\bar{a}|\,|\bar{b}|\cos\varphi$.

Из этого определения вытекают следующие свойства, которые приведем без доказательства:

1) $\bar{a}\bullet\bar{b}=\bar{b}\bullet\bar{a}$
2) $\bar{a}\bullet\bar{a}=\bar{a}^2=|\bar{a}|^2$
3) Если $\bar{a}\perp\bar{b}$, то $\bar{a}\bullet\bar{b}=0$
4) Если $\bar{a}\neq 0$, $\bar{b}\neq 0$ и $\bar{a}\bullet\bar{b}=0$, то $\bar{a}\perp\bar{b}$ (условие перпендикулярности двух векторов)
5) Пусть $\lambda\in R$, тогда $\lambda\bar{a}\bullet\bar{b}=\bar{a}\bullet\lambda\bar{b}=\lambda(\bar{a}\bullet\bar{b})$
6) $(\bar{a}+\bar{b})\bullet\bar{c}=\bar{a}\bullet\bar{c}+\bar{b}\bullet\bar{c}$
7) $\bar{a}\bullet\bar{b}=|\bar{a}|\ np_{\vec{a}}\,\vec{b}.=|\bar{b}|\ np_{\vec{b}}\,\vec{a}$.

Пример 8. Пусть $|\bar{a}|=5$, $|\bar{b}|=9$, $(\bar{a}\,\widehat{,}\,\bar{b})=60^0$. Вычислить $\bar{a}\bullet\bar{b}$.

Решение. $\bar{a}\bullet\bar{b}=|\bar{a}|\,|\bar{b}|\cos\varphi=5\cdot 9\cdot\cos 60^0=5\cdot 9\cdot\frac{1}{2}=22{,}5$.

Если $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ – ортонормированный базис и в этом базисе векторы $\bar{a},\bar{b}$ заданы координатами, т.е. $\bar{a}(x_1,y_1,z_1)$, $\bar{b}(x_2,y_2,z_2)$, то $\bar{a}\bullet\bar{b}=x_1\cdot x_2+y_1\cdot y_2+z_1\cdot z_2$

Действительно, разложим $\bar{a}$ и $\bar{b}$ по базису $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. Получим $\bar{a}=x_1\vec{i}+y_1\vec{j}+z_1\vec{k}$, $\bar{b}=x_2\vec{i}+y_2\vec{j}+z_2\vec{k}$. Рассмотрим $\bar{a}\bullet\bar{b}=x_1\vec{i}\cdot x_2\vec{i}+x_1\vec{i}\cdot y_2\vec{j}+x_1\vec{i}\cdot z_2\vec{k}+y_1\vec{j}\cdot x_2\vec{i}+y_1\vec{j}\cdot y_2\vec{j}+y_1\vec{j}\cdot z_2\vec{k}+z_1\vec{k}\cdot x_2\vec{i}+z_1\vec{k}\cdot y_2\vec{j}+z_1\vec{k}\cdot z_2\vec{k}=x_1x_2(\underbrace{\vec{i}\bullet\vec{i}}_{1})+x_1y_2(\underbrace{\vec{i}\bullet\vec{j}}_{0})+x_1z_2(\underbrace{\vec{i}\bullet\vec{k}}_{0})+y_1x_2(\underbrace{\vec{j}\bullet\vec{i}}_{0})+y_1y_2(\underbrace{\vec{j}\bullet\vec{j}}_{1})+y_1z_2(\underbrace{\vec{j}\bullet\vec{k}}_{0})+$

$+z_1x_2(\underbrace{\vec{k}\bullet\vec{i}}_{0})+z_1z_2(\underbrace{\vec{k}\bullet\vec{k}}_{1})=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2.$

Здесь мы использовали свойства 1-7 скалярного произведения двух векторов.

Пример 9. Пусть $\bar{a}=5\vec{i}+3\vec{j}-2\vec{k}$, $\bar{b}=4\vec{i}+\vec{j}+7\vec{k}$. Вычислить $\bar{a}\bullet\bar{b}$.

Решение. $\bar{a}\bullet\bar{b}$ = 5·4+3·1+(–2) ·7=20+3–14=9.

Из определения скалярного произведения следует, что

$$\cos\varphi=\frac{\vec{a}\bullet\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}=\frac{x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}\cdot\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}}$$

Эта формула позволяет вычислить угол между двумя векторами, заданными своими координатами.

Пример 10. Вычислить угол между векторами $\vec{a}=(2;-3;0)$ и $\vec{b}=(4;2;-1)$.

Решение. Находим вначале

$\bar{a}\bullet\bar{b}=2\cdot4+(-3)\cdot2+0\cdot(-1)=8-6+0=2$.

Вычислим теперь

$|\bar{a}|=\sqrt{2^2+(-3)^2+0^2}=\sqrt{4+9}=\sqrt{13}$ и

$|\bar{b}|=\sqrt{4^2+2^2+(-1)^2}=\sqrt{16+4+1}=\sqrt{21}$.

Тогда $\cos(\bar{a}\,\hat{,}\,\bar{b})=\dfrac{2}{\sqrt{13}\cdot\sqrt{21}}=\dfrac{2}{\sqrt{273}}$, $\quad\varphi=\arccos\dfrac{2}{\sqrt{273}}$.

Кроме широкого применения скалярного произведения в самой математике оно используется в физике, например, для вычисления работы. Известно, что работа А вычисляется по формуле

$A=\bar{F}\bullet\bar{s}$, где $\bar{F}$ -вектор силы, $\bar{s}$ -вектор пути.

Пример 11. Даны три силы: $\overline{F_1}=(2;-5;1)$, $\overline{F_2}=(1;2;-6)$, $\overline{F_3}=(-4;-3;3)$,приложенные в одной точке. Вычислить работу, произведенную равнодействующей силой по перемещению материальной точки прямолинейно от точки M (4; 2; -8) до точки N (3; -2; -5).

Решение. Обозначим равнодействующую заданных трех сил символом $\vec{F}$ и найдем координаты этого вектора из равенства $\vec{F}=\vec{F}_1+\vec{F}_2+\vec{F}_3$. Получаем $\vec{F}(2+1-4;-5+2-3;1-6+3)$ или $\vec{F}(-1;-6;-2)$.

Путь $\vec{s}=\overline{MN}$. Аналогично, как и для $\vec{F}$ имеем $\vec{s}(-1;-4;3)$.

Тогда А=$\vec{F}\bullet\vec{s}=(-1)\cdot(-1)+(-6)\cdot(-4)+(-2)\cdot3=1+24-6=19$ (ед. работы).

Скалярное произведение можно использовать и в экономике.

Пример12. Бизнесмен имеет в каждом из трех районов города по 20 компьютерных клубов. Стоимость одного часа работы компьютеров различна в зависимости от их марки и приведена в следующей таблице для одного клуба.

Количество компьютеров $\overline{a}$	10	20	15
Стоимость одного часа работы (усл. ед) $\overline{b}$	0,5	0,6	0,4

Какую выручку имеет бизнесмен за один час работы всех компьютерных клубов?

Решение. Вычислим выручку от работы одного компьютерного клуба. Эта выручка численно равна скалярному произведению векторов вида

$\overline{a}(10;20;15)$ и $\overline{b}(0{,}5;0{,}6;0{,}4)$, т.е.

$\overline{a} \bullet \overline{b} = 10 \cdot 0{,}5 + 20 \cdot 0{,}6 + 15 \cdot 0{,}4 = 5 + 12 + 6 = 23$ (усл. ед.).

Т.к. клубов в каждом районе по 20, а районов три, то общая выручка составит: $3 \cdot 20 \cdot 23 = 1320$ (усл. ед.) за один час работы всех клубов города.

б) векторное произведение двух векторов

Определение. Векторным произведением двух векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ называется вектор $\overline{c}$, для которого:

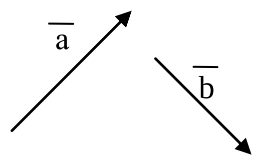
1) $|\overline{c}| = |\overline{a}| \cdot |\overline{b}| \sin(\overline{a} \,\hat{,}\, \overline{b})$;

2) $\overline{c}$ перпендикулярен плоскости, в которой можно расположить $\overline{a}$ и $\overline{b}$;

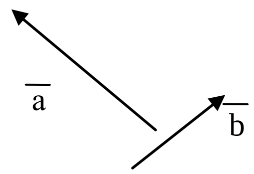
3) из конца вектора $\overline{c}$ кратчайший поворот от $\overline{a}$ к $\overline{b}$ виден как поворот против часовой стрелки.

Пусть даны два вектора:

а)

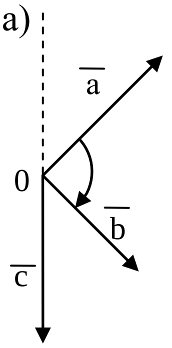


б)

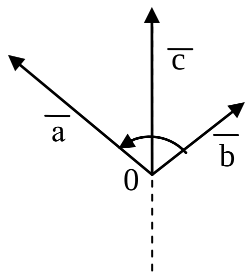


Для пояснения определения их векторного произведения приведем их к общему началу:

а)



б)



Векторное произведение двух векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ будем обозначать $\bar{a}\times\bar{b}$. В литературе, кроме такого обозначения, используется, например, $[\bar{a},\bar{b}]$ и другие.

Сформулируем теперь свойства векторного произведения двух векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$, которые приведем без доказательств:

1) $\bar{a}\times\bar{b}=-\bar{b}\times\bar{a}$;

2) $\bar{a}\times\bar{b}=0$ тогда и только тогда, когда хотя бы один из векторов $\bar{a}$ или $\bar{b}$ равен 0 или они коллинеарны;

3) $\lambda\bar{a}\times\bar{b}=\bar{a}\times\lambda\bar{b}=\lambda(\bar{a}\times\bar{b})$, здесь $\lambda\in R$;

4) $(\bar{a}+\bar{b})\times\bar{c}=\bar{a}\times\bar{c}+\bar{b}\times\bar{c}$.

Если два вектора заданы своими координатами в ортонормированном базисе, т.е. $\bar{a}=x_1\vec{i}+y_1\vec{j}+z_1\vec{k}$, $\bar{b}=x_2\vec{i}+y_2\vec{j}+z_2\vec{k}$, то

$$\bar{a}\times\bar{b}=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\end{vmatrix}.$$

Векторное произведение широко используется в самой математике, механике, физике и других науках.

В частности, из определения векторного произведения видно, что модуль $\bar{a}\times\bar{b}$ численно равен площади параллелограмма, построенного на векторах-сомножителях, а площадь треугольника – половине этого модуля. Другими словами, справедливы следующие формулы:

$$S_{\square}=\left|\bar{a}\times\bar{b}\right| \quad \text{и} \quad S_{\triangle}=\frac{1}{2}\left|\bar{a}\times\bar{b}\right|.$$

Пример 13. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах $\bar{a}=-2\vec{i}+3\vec{j}+6\vec{k}$ и $\bar{b}=6\vec{i}-2\vec{j}+3\vec{k}$.

Решение. Найдем

$$\bar{a}\times\bar{b}=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ -2 & 3 & 6\\ 6 & -2 & 3\end{vmatrix}=\bar{i}\begin{vmatrix}3 & 6\\ -2 & 3\end{vmatrix}-\bar{j}\begin{vmatrix}-2 & 6\\ 6 & 3\end{vmatrix}+\bar{k}\begin{vmatrix}-2 & 3\\ 6 & -2\end{vmatrix}=21\bar{i}+42\bar{j}-14\bar{k}.$$

Тогда $S_{\square}=\left|\bar{a}\times\bar{b}\right|=\sqrt{21^2+42^2+(-14)^2}=49$ (ед.^{2})

В физике векторное произведение можно использовать для вычисления момента и установления направления равнодействующей силы, составляющими которой являются несколько сил.

Пример 14. Пусть две силы $\bar{F}_1$=(4; 1; 3) и $\bar{F}_2$=(-2; 2; 1) приложены в точке А (6,-6,-3). Вычислить величину и направляющие косинусы момента равнодействующей этих сил относительно точки В (5,-8,-5).

Решение. Известно, что момент М равнодействующей сил равен модулю векторного произведения векторов т.е. $M = |\overline{M}| = \overline{\text{BA}} \times \overline{F}$.

Найдем координаты векторов $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$ и $\overline{\text{BA}}$. Получим $\overline{F}(2;3;4)$, $\overline{BA} = (1;2;2)$.

$$\overline{M} = \overline{\text{BA}} \times \overline{F} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = \bar{i}\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} - \bar{j}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} + \bar{k}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 2\bar{i} - \bar{k},$$

$$M = |\overline{M}| = \sqrt{2^2 + (-1)^2} = \sqrt{5}.$$

Направляющие косинусы равнодействующей силы вычислим по формулам (4). В нашем случае имеем

$$\cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}};\ \cos\beta = 0;\quad \cos\gamma = -\frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Пример 15. Пусть некоторое твердое тело вращается вокруг неподвижной оси l с угловой скоростью $\overline{\omega} = -2\vec{\mathrm{i}} + 5\vec{\mathrm{j}} + 2\vec{\mathrm{k}}$. Вычислить величину скорости вращения $|\overline{V}|$ точки А этого тела, если радиус-вектор $\overline{OA} = 3\vec{\mathrm{i}} + \vec{\mathrm{j}} - 2\vec{\mathrm{k}}$, где О принадлежит оси вращения.

Решение. Согласно формуле Эйлера

$$\overline{V} = \overline{\omega} \times \overline{OA} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ -2 & 5 & 2 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix} = \bar{i}\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} - \bar{j}\begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} + \bar{k}\begin{vmatrix} -2 & 5 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -12\bar{i} + 2\bar{j} - 17\bar{k};$$

$$|\overline{V}| = |\overline{\omega} \times \overline{OA}| = \sqrt{(-12)^2 + 2^2 + (-17)^2} = \sqrt{144 + 4 + 289} = \sqrt{437}.$$

в) смешанное произведение трех векторов

Определение. Смешанным произведением трех векторов $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ называется число, которое получается при скалярном произведении векторов $\overline{a} \times \overline{b}$ и $\overline{c}$.

Оно обозначается $\overline{a} \times \overline{b} \bullet \overline{c}$. Иногда используются и другие обозначения, например, $\overline{a}\ \overline{b}\ \overline{c}$ или ($\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$).

Из приведенного определения смешанного произведения трех векторов вытекают следующие свойства:

1) $\overline{a} \times \overline{b} \bullet \overline{c} = 0$ тогда и только тогда, когда $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ компланарны. Отметим, что это свойство часто используется как условие компланарности трех векторов;

2) $\overline{a} \times \overline{b} \bullet \overline{c} = \overline{a} \bullet \overline{b} \times \overline{c}$;

3) $\overline{a}\ \overline{b}\ \overline{c} = \overline{b}\ \overline{c}\ \overline{a} = \overline{c}\ \overline{a}\ \overline{b} = -\overline{b}\ \overline{a}\ \overline{c} = -\overline{c}\ \overline{b}\ \overline{a} = -\overline{a}\ \overline{c}\ \overline{b}$.

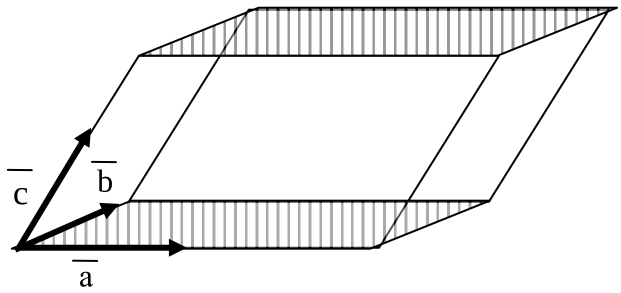
Пусть заданы три вектора:

$\bar{a} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}$, $\bar{b} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}$, $\bar{c} = x_3\vec{i} + y_3\vec{j} + z_3\vec{k}$. Тогда

$$\bar{a} \times \bar{b} \bullet \bar{c} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}.$$

Свойство 1 можно записать в виде: $\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = 0$.

Из определения смешанного произведения трех векторов следует, что его модуль равен объему параллелепипеда, построенного на векторах-сомножителях, т.е. V=$\left|\bar{a} \times \bar{b} \bullet \bar{c}\right|$.



Пример 16. Даны вершины тетраэдра A(4; 5; -3), B(6; 3; 0), C(8; 5; -9), D (-3; -2; -10). Вычислить длину его высоты, опущенной из вершины D.

Решение. Вычислим координаты следующих векторов: $\overline{AB}$ (2; -2; 3), $\overline{AC}$ (4; 0; -6), $\overline{AD}$ (-7; -7; -7).

Вычислим смешанное произведение этих векторов:

$$(\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{AD}) = \begin{vmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 4 & 0 & -6 \\ -7 & -7 & -7 \end{vmatrix} = -4\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ -7 & -7 \end{vmatrix} + 6\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -7 & -7 \end{vmatrix} =$$

$$= -4(14 + 21) + 6(-14 - 14) = -4 \cdot 35 - 6 \cdot 28 = -140 - 168 = -308.$$

Тогда объем V тетраэдра будет равен одной шестой модуля смешанного произведения, т.е.

$V = \frac{1}{6}\left|-308\right| = 51\frac{1}{3}$ (ед. куб.).

Искомую длину высоты h вычислим используя формулу

$V = \frac{1}{3}Sh$, где S- площадь основания. Площадь S вычислим по формуле

$$S = \frac{1}{2}\left|\overline{AB} \times \overline{AC}\right|.$$

В нашем случае

$$\overline{AB}\times\overline{AC}=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ 2 & -2 & 3\\ 4 & 0 & -6\end{vmatrix}=\bar{i}\begin{vmatrix}-2 & 3\\ 0 & 6\end{vmatrix}-\bar{j}\begin{vmatrix}2 & 3\\ 4 & -6\end{vmatrix}+\bar{k}\begin{vmatrix}2 & -2\\ 4 & 0\end{vmatrix}=12\bar{i}+24\bar{j}+8\bar{k}\ \text{ и}$$

$$S=\frac{1}{2}\sqrt{12^2+24^2+8^2}=\frac{1}{2}\sqrt{784}=\frac{1}{2}\cdot 28=14\ .(\text{ед.}^2)$$

Следовательно,

$$h=\frac{3V}{S}=\frac{3\cdot 154}{3\cdot 14}=11\,(\text{лин. ед.}).$$

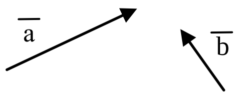
Вопросы для самопроверки

1. Приведите примеры скалярных величин.
2. Приведите примеры векторных величин.
3. Что называется вектором?
4. Правила и свойства сложения векторов.
5. Как выполнить вычитание векторов?
6. Какие векторы называются коллинеарными; компланарными?
7. Какие векторы называются равными?
8. Как выполнить умножение вектора на число?
9. Перечислите свойства сложения двух векторов и свойства умножения вектора на число.
10. Что называется проекцией вектора на ось?
11. Какие векторы называются линейно зависимыми, линейно независимыми, свойства, базис на прямой, на плоскости, в пространстве?
12. Что называется координатами вектора на прямой, на плоскости, в пространстве?
13. Что называется декартовой прямоугольной системой координат?
14. Что называется координатами радиус-вектора, точки в пространстве?
15. Что называется скалярным произведением двух векторов, каковы его свойства и как оно выражается через координаты векторов-сомножителей в ортогональном базисе?
16. Что называется векторным произведением двух векторов, каковы его свойства и как оно выражается через координаты векторов-сомножителей в ортонормированном базисе?
17. Что называется смешанным произведением трех векторов, каковы его свойства и как оно выражается через координаты векторов-сомножителей в ортонормированном базисе?

Задачи для самостоятельного решения

1. Вычислить модуль вектора $\vec{a}$ = (6; 3; –2).
2. Путь $\vec{a}$ = (4; –12; z). Вычислить z, если $|\vec{a}|$ = 13.

3. Даны точки A(3; –1; 2) и B(–1; 2; 1) . Найти координаты векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BA}$.
4. Найти координаты точки N, с которой совпадает конец вектора $\vec{a}$ = (3; –1; 4), если его начало совпадает с точкой M(1; 2; –3).
5. Найти координаты начала вектора $\vec{a}$ = (2; –3; –1), если его конец совпадает с точкой (1; –1; 2).
6. Дан модуль вектора $|\vec{a}| = 2$ и углы $\alpha = 45^0$, $\beta = 60^0$, $\gamma = 120^0$. Вычислить проекции вектора $\vec{a}$ на координатные оси.
7. Вычислить направляющие косинусы вектора $\vec{a} = (12;-15;-16)$.
8. Вычислить направляющие косинусы вектора $\vec{a} = (\frac{3}{13}; \frac{4}{13}; \frac{12}{13})$.
9. Может ли вектор составлять с координатными осями следующие углы: 1) $\alpha = 45°$, $\beta = 60°$, $\gamma = 120°$; 2) $\alpha = 45°$, $\beta = 135°$, $\gamma = 60°$; 3) $\alpha = 90°$, $\beta = 150°$, $\gamma = 60°$?
10. Вектор составляет с осями Ox и Oz углы $\alpha = 120°$ и $\gamma = 45°$. Какой угол он составляет с осью Oy?
11. Вектор $\vec{a}$ составляет с координатными осями Ox и Oy углы $\alpha = 60°$ и $\beta = 120°$. Вычислить его координаты при условии, что $|\vec{a}| = 2$.
12. Пусть



Построить каждый из следующих векторов: 1) $\vec{a} + \vec{b}$; 2) $\vec{a} - \vec{b}$; 3) $\vec{b} - \vec{a}$; 4) $-\vec{a} - \vec{b}$.
13. По данным векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$ построить каждый из следующих векторов: 1) $3\vec{a}$; 2) $-\frac{1}{2}\vec{b}$; 3) $2\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b}$; 4) $\frac{1}{2}\vec{a} - 3\vec{b}$.
14. Даны два вектора $\vec{a} = (3;-2;6)$ и $\vec{b} = (-2;1;0)$. Вычислить проекции на координатные оси следующих векторов: 1) $\vec{a} + \vec{b}$; 2) $\vec{a} - \vec{b}$; 3) $2\vec{a}$; 4) $-\frac{1}{2}\vec{b}$; 5) $2\vec{a} + 3\vec{b}$; 6) $\frac{1}{3}\vec{a} - \vec{b}$.
15. Проверить коллинеарность векторов $\vec{a} = (2;-1;3)$ и $\vec{b} = (-6;3;-9)$. Установить, какой из них длиннее другого и во сколько раз, как они направлены – в одну или в противоположные стороны.
16. При каких значениях α, β векторы $\vec{a} = -2\vec{i} - 3\vec{j} - \beta\vec{k}$ и $\vec{b} = \alpha\vec{i} - 6\vec{j} + 2\vec{k}$ коллинеарны?
17. Вычислить модули суммы и разности векторов $\vec{a} = (3;-5;8)$ и $\vec{b} = (-1;1;-4)$.
18. На плоскости даны два вектора $\vec{p} = (2;-3)$, $\vec{q} = (1;2)$. Показать, что $(\vec{p}, \vec{q})$– базис и найти разложение вектора $\vec{a} = (9;4)$ по базису $(\vec{p}, \vec{q})$.

19. Даны три вектора $\vec{a}$ = (3;–1), $\vec{b}$ = (1;–2), $\vec{c}$ = (–1;7). Показать, что ($\vec{a}$, $\vec{b}$)– базис и найти разложение вектора $\vec{p} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ по базису ($\vec{a}$, $\vec{b}$).
20. Даны три вектора $\vec{p}$ = (3;–2;1), $\vec{q}$ = (–1;1;–2), $\vec{r}$ = (2;1;-3). Найти разложение вектора $\vec{c}$ = (11; –6; 5) по базису ($\vec{p}$, $\vec{q}$, $\vec{r}$).
21. Даны четыре вектора $\vec{a}$ = (2;1;0), $\vec{b}$ = (1;–1;2), $\vec{c}$ = (2;2;–1), $\vec{d}$ = (3;7;-7). Определить разложение каждого из этих четырех векторов, принимая в качестве базиса три остальных.
22. Вычислить, какую работу производит сила $\vec{f}$ =(3; -2; -5), когда ее точка приложения, двигаясь прямолинейно, перемещается из положения A(2; -3; 6) в положение B(3; -2; -1).
23. Даны силы $\vec{M}(3;-4;2)$, $\vec{N}(2;3;-5)$ и $\vec{P}(3;-2;4)$, приложенные к одной точке. Вычислить, какую работу производит равнодействующая этих сил, когда ее точка приложения, двигаясь прямолинейно, перемещается из положения M_1(5; 3; -7) в положение M_2(4; -1; -4).
24. Даны вершины четырехугольника A(1; -2; 2), B(1; -4; 0), C(-4; 1; 1) и D(-5; -5; 3). Доказать, что его диагонали AC и BD взаимно перпендикулярны.
25. Определить, при каком значении β векторы $\vec{a} = \beta\vec{i} - 3\vec{j} + 2\vec{k}$ и $\vec{b} = \vec{i} + 2\vec{j} + \beta\vec{k}$ взаимно перпендикулярны.
26. Вычислить косинус угла, образованного векторами $\vec{a}$=(2; -4; 4) и $\vec{b}$=(-3; 2; 6).
27. Даны вершины треугольника A(-1; -2; 4), B(4; -2; 0) и C(3; -2; 1). Определить его внутренний угол при вершине B.
28. Даны вершины треугольника A(3; 2; -3), B(5; 1; 1) и C(1; -2; 1). Определить его внешний угол при вершине A.
29. Найти вектор $\vec{x}$, коллинеарный вектору $\vec{a} = (2;1;-1)$ и удовлетворяющий условию $\vec{x} \bullet \vec{a}$=832. Вычислить проекцию вектора $\vec{a} = (5;2;5)$ на ось вектора $\vec{b} = (2;-1;2)$.
30. Вычислить проекцию вектора $\vec{a} = (5;2;5)$ на ось вектора $\vec{b} = (2;-1;2)$.
31. Даны векторы $\vec{a} = 3\vec{i} - 6\vec{j} - \vec{k}$, $\vec{b} = \vec{i} + 4\vec{j} - 5\vec{k}$ и $\vec{c} = 3\vec{i} - 4\vec{j} + 12\vec{k}$. Вычислить $\text{пр}_{\vec{c}}(\vec{a} + \vec{b})$.
32. Даны векторы $\vec{a} = (1;-3;4)$, $\vec{b} = (3;-4;2)$ и $\vec{c} = (-1;1;4)$. Вычислить $\text{пр}_{\vec{b}+\vec{c}}\,\vec{a}$.
33. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ образуют угол $\varphi = \pi/6$. Зная, что $|\vec{a}|$=6, $|\vec{b}|$=5, вычислить $|[\vec{a}, \vec{b}]|$.

34. Даны: $|\vec{a}|=10$, $|\vec{b}|=2$ и $\vec{a}\bullet\vec{b}=12$. Вычислить $|[\vec{a},\vec{b}]|$.

35. Даны: $|\vec{a}|=3$, $|\vec{b}|=26$ и $|[\vec{a},\vec{b}]|=72$. Вычислить $\vec{a}\bullet\vec{b}$.

36. Сила $\vec{P}=(2; -4; 5)$ к точке М (4; -2; 3). Определить момент этой силы относительно точки А (3; 2; - 1).

37. Сила $\vec{P}=(2; 2; 9)$ приложена к точке A(4; 2; -3).Определить величину и направляющие косинусы момента этой силы относительно точки C(2; 4; 0).

38. Даны три силы $\vec{M}=(2; -1; -3)$, $\vec{N}=(3; 2; -1)$ и $\vec{P}=(-4; 1; 3)$, приложенные к точке C(-1; 4; -2). Определить величину и направляющие косинусы момента равнодействующей этих сил относительно точки D(2; 3; -1).

39. Даны вершины треугольника А (1;-1; 2), (5; -6; 2) и C(1; 3; -1). Вычислить длину его высоты, опущенной из вершины В на сторону АС.

40. Даны векторы $\vec{a}=(1;-1;3)$, $\vec{b}=(-2;2;1)$, $\vec{c}=(3;-2;5)$. Вычислить $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$.

41. Установить, компланарны ли векторы $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ если:

1) $\vec{a}=(2;3;-1)$, $\vec{b}=(1;-1;3)$, $\vec{c}=(1;9;11)$;

2) $\vec{a}=(3;-2;1)$, $\vec{b}=(2;1;2)$, $\vec{c}=(3;-1;-2)$;

3) $\vec{a}=(2;-1;2)$, $\vec{b}=(1;2;-3)$, $\vec{c}=(3;-4;7)$.

42. Доказать, что точки A(1; 2; -1), B(0; 1; 5), C(- 1; 2; 1), D(2; 1; 3) лежат в одной плоскости.

43. Вычислить объем тетраэдра, вершины которого находятся в точках A(2;-1;1),B(5;5;4),C(3; 2; -1) и D(4: 1:3).

44. Объем тетраэдра V=5, его вершины находятся в точках A(2; 1; -1), B(3; 0; 1), C(2; -1; 3).Найти координаты четвертой вершины D, если известно, что она лежит на оси *Oy*.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гурский, Е.И. Основы линейной алгебры и аналитической геометрии. – Минск: Выш. школа, 1982. – 272 с.
2. Жевняк, Р.М., Карпук, А.А., Марченко, А.И., Унукович, В.П.Общий курс высшей математики. – Орша, 1996. –318 с.

СПИСОК РЕКОМЕНДОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

3. Дадаян, А.А., Дударенко, В.А. Алгебра и геометрия.– Минск: Выш. школа, 1989.
4. Шнейдер, В.Е., Слуцкий, А.И., Шумов, А.С. Краткий курс высшей математики. В 2 частях. Часть 1-я. – Москва: Высш. школа, 1978.
5. Сборник индивидуальных заданий по высшей математике: учебное пособие. В 3 частях. Часть 1-я. /А.П. Рябушко, В.В. Бархатов, В.В. Державец, И.Е. Юруть; под ред. А.П. Рябушко / –Минск: Выш. шк., 1990.
6. Индивидуальные задания по высшей математике: Линейная и векторная алгебра. Аналитическая геометрия. Дифференциальное исчисление функций одной переменной: учебное пособие. Часть 1–я. /А.П. Рябушко, В.В. Бархатов, В.В. Державец, И.Е. Юруть; под общ. ред. А.П. Рябушко. – Минск: Выш. шк., 2007.
7. Гусак, А.А. Пособие к решению задач по высшей математике. – Минск: Изд. БГУ, 1973.
8. Данко, П.Е., Попов, А.Г., Кожевникова, Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. В 2 частях Часть 1-я. – Москва: Высш. школа, 1986.

Редактор Т.Л. Матеуш
Технический редактор А.А. Щербакова

Подписано в печать 09.12.09 Формат 60х84 1/16.
Бумага офсетная. Гарнитура Таймс. Печать трафаретная.
Усл.печ.л. 1,4 Уч.-изд.л. 1,5
Тираж 65 экз. Заказ 158

Отпечатано на ризографе редакционно-издательского отдела
учреждения образования
«Могилевский государственный университет продовольствия».
212027, Могилев, пр-т Шмидта, 3.
ЛИ № 02330/0131913 от 08.02.2007.