Министерство образования Республики Беларусь

Учреждение образования

«МОГИЛЕВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ПРОДОВОЛЬСТВИЯ»

Кафедра «Высшая математика»

С.В. Подолян, Т.М. Гончарова, И.В.Юрченко

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

ЭЛЕМЕНТЫ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ

Учебно-методическое пособие
для студентов специальности
1-53 01 01 «Автоматизация технологических процессов и производств»

Могилев 2008

УДК 519.21 517

Рассмотрено и рекомендовано к изданию

на заседании кафедры высшей математики
Протокол № 5 от 26.12. 2007 г.
УМС по специальности 1-53 01 01
«Автоматизация технологических процессов и производств»
Протокол № 2 от 18.01. 2008г.
Научно-методическим Советом университета
Протокол № 4 от 05.02. 2008г.

Составители:
С.В.Подолян, Т.М. Гончарова, И.В. Юрченко

Рецензенты:
кандидат физико-математических наук, доцент кафедры ВМ УО МГУП
Лапковский В.К.
кандидат физико-математических наук, доцент кафедры ВМ УО БРУ
Данилович Л.А.

Учебно-методическое пособие предназначено для самостоятельного изучения студентами основ линейной алгебры: матрицы, действия с ними; определители, их свойства и вычисление; решение систем линейных алгебраических уравнений и соответствует рабочей программе.

Теоретическая часть сопровождается примерами решения задач, вопросами для самоконтроля. Указан список литературы, которой студент может воспользоваться дополнительно в случае необходимости.

© Учреждение образования
«Могилевский государственный
университет продовольствия», 2008

ТЕОРИТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

ТЕМА: Понятие матрицы. Основные обозначения. Виды матриц. Действия над матрицами: сложение и умножение. Определители 2-го и 3-го порядков и их свойства. Понятие определителя n-го порядка.

Понятие матрицы. Основные обозначения

Пусть дана некоторая совокупность чисел *К*, в пределах которой всегда выполнимы и однозначны четыре операции: сложение, вычитание, умножение и деление на число, отличенное от нуля. Примерами таких совокупностей чисел могут служить совокупность (или множество) всех рациональных чисел, совокупность всех действительных чисел.

Определение 1.1. Прямоугольную таблицу чисел из совокупности *К*

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} \ldots & a_{mn} \end{bmatrix} \tag{1.1}$$

будем называть *матрицей*.

Если $m = n$, то матрица называется *квадратной,* а число m, равное n, называется её порядком. В общем же случае, когда $m \neq n$, матрица называется *прямоугольной* размера $m \times n$ или $m \times n$ – матрицей. Числа, составляющие матрицу, называются её *элементами*.

При двухиндексном обозначении элементов матрицы a_{ik}, первый индекс i указывает номер строки, а второй индекс k – номер столбца, на пересечении которых стоит данный элемент.

Наряду с обозначением матрицы (1.1) в квадратных (или круглых) скобках, будем использовать сокращённое обозначение

$$A = \left[a_{ik}\right] \quad (i = 1,2,\ldots,m;\ k = 1,2,\ldots,n).$$

Матрицу будем обозначать также одной заглавной буквой, например, матрица A, матрица B и т. д.

Виды матриц

Прямоугольную матрицу, состоящую из одного столбца, будем называть *столбцевой* и обозначать так:

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix}.$$

Прямоугольную матрицу, состоящую из одной строки, будем называть *строчной* и обозначать так: $(b_1\ b_2 \ldots b_n)$.

Если матрица

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \ldots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \ldots a_{2n} \\ \ldots & \ldots\ldots\ldots \\ a_{n1} & a_{n2} \ldots a_{nn} \end{bmatrix}$$

квадратная, то элементы a_{11}, $a_{22}, \ldots, a_{nn}$ образуют её главную диагональ, а элементы a_{n1}, $a_{n-1\,2}, \ldots,$ a_{1n} – побочную.

Квадратную матрицу, у которой все элементы, расположенные вне главной диагонали, равны нулю

$$\begin{bmatrix} d_1 & 0 \ldots 0 \\ 0 & d_2 \ldots 0 \\ \ldots & \ldots\ldots \\ 0 & 0 \ldots d_n \end{bmatrix}$$

называют *диагональной* и обозначают так: $d(d_1, d_2, \ldots, d_n)$.

Диагональную матрицу n-го порядка, у которой все элементы равны единице, называют *единичной* матрицей и обозначают $E^{(n)}$ или просто E (здесь число n указывает порядок матрицы). Название «единичная матрица» связана со следующим свойством матрицы E: для любой прямоугольной матрицы A размера $m \times n$ имеют место равенства $E^{(m)}A = AE^{(n)} = A$.

Квадратную матрицу, у которой все элементы, расположенные выше главной диагонали, равны нулю, называют *нижней треугольной* матрицей; если же равны нулю все элементы, расположенные ниже главной диагонали, её называют *верхней треугольной* матрицей. Названные матрицы имеют соответственно вид:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 \;\ldots\; 0 \\ a_{21} & a_{22}\, 0 \ldots 0 \\ \ldots & \ldots\ldots\ldots \\ a_{n1} & a_{n2} \ldots a_{nn} \end{bmatrix}; \qquad \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \ldots a_{1n} \\ 0 & a_{22} \ldots a_{2n} \\ \ldots & \ldots\ldots\ldots \\ 0 & 0 \ldots\; a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Матрица

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 \dots & a_{rr} \dots & a_{rn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix},$$

где числа $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{rr}$ отличны от нуля, называется *трапециевидной*.

Действия над матрицами

Определение 1.2. Суммой двух матриц A и B одинаковой размерности $m \times n$ называется матрица C такой же размерности, элементы которой равны сумме соответствующих элементов матриц A и B: $C = A + B$, если $c_{ik} = a_{ik} + b_{ik}$ $(i = 1,2,\dots,m;\ k = 1,2,\dots,n)$.

Операция нахождения суммы данных матриц называется сложением матриц.

Пример

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+1 & 1-1 & 3+2 \\ -1+0 & 0+1 & 2-3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 5 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Из определения сложения матриц следует, что эта операция обладает свойствами:

1° $A + B = B + A$ (переместительное);

2° $(A + B) + C = A + (B + C)$ (сочетательное).

Операция сложения матриц естественным образом распространяется на случай любого конечного числа слагаемых.

Определение 1.3. Произведением матрицы A размерности $m \times n$ на число α из K называется матрица C размерности $m \times n$, элементы которой получаются из соответствующих элементов матрицы A умножением на число α:

$$C = \alpha A, \quad \text{если } c_{ik} = \alpha \cdot a_{ik} \quad (i = 1,2,\dots,m;\ k = 1,2,\dots,n).$$

Операция называется умножением матрицы на число.

Пример

$$2\cdot\begin{bmatrix}1 & -23 & -1\\ 0 & 5 & 20\\ 7 & 12 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & -46 & -2\\ 0 & 10 & 40\\ 14 & 24 & 2\end{bmatrix}.$$

Свойства операции умножения матрицы на число.

1° $\alpha(A+B)=\alpha A+\alpha B$,

2° $(\alpha+\beta)A=\alpha A+\beta A$,

3° $(\alpha\beta)A=\alpha(\beta A)$, $\alpha,\beta\in K$.

Следствие. Разность $A-B$ двух матриц одинаковой размерности $m\times n$ определяется равенством $A-B=A+(-1)B$.

Определение 1.4. Произведением двух матриц A и B называется матрица C, у которой элемент c_{ij}, стоящий на пересечении i - й строки и j - го столбца, равен сумме попарных произведений элементов i - й строки матрицы A на элементы j -го столбца матрицы B:

$$c_{ij}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+a_{i3}b_{3j}+\cdots+a_{in}b_{nj}\qquad (i=1,2,\ldots m;\ j=1,2,\ldots q).$$

Замечание. Операция умножения двух прямоугольных матриц выполнима лишь в том случае, когда число столбцов в первом сомножителе равно числу строк во втором. Такие матрицы называют *согласованными* (или *соответственными*).

В частности, умножение всегда выполнимо, если матрицы A и B квадратные одного и того же порядка.

Пример

$$\begin{bmatrix}1 & 2\\ -1 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & -1\\ 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\cdot 2+2\cdot 0 & 1\cdot(-1)+2\cdot 1\\ (-1)\cdot 2+3\cdot 0 & (-1)\cdot(-1)+3\cdot 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 1\\ -2 & 4\end{bmatrix}$$

Если $AB=BA$, то матрицы называют *перестановочными* или *коммутирующими* между собой.

Пример

Матрицы

$$A=\begin{bmatrix}1 & -2\\ 2 & 0\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}-3 & -2\\ 2 & -4\end{bmatrix}$$ перестановочны между собой, так как

$$AB=\begin{bmatrix}-7 & 6\\ -6 & -4\end{bmatrix},\ BA=\begin{bmatrix}-7 & 6\\ -6 & -4\end{bmatrix}.$$

Свойства операции умножения матриц.

1° $(AB)C = A(BC)$;

2° $(A+B)C = AC + DC$;

3° $A(B+C) = AB + AC$.

Операция умножения матриц естественным образом распространяется на случай нескольких сомножителей.

Определение 1.5. Матрицу B размерности $n\times m$ называют *транспонированной* матрице A размерности $m\times n$, если строки и столбцы матрицы A с сохранением порядка их следования поменять местами, то есть первая строка матрицы A меняется на первый столбец, вторая строка – на второй столбец и т.д. Обозначают транспонированную матрицу A^T.

Пример

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ -1 & 4 & 2\end{bmatrix},\quad A^T=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 2 & 4\\ 3 & 2\end{bmatrix}.$$

Две матрицы A и B называют *равными*, если они одинаковой размерности и соответствующие элементы равны между собой.

Определители 2-го и 3-го порядков и их свойства

Определение 1.6. *Определителем второго порядка* называется число $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$.

Обозначается определитель символом

$$\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}.$$

Таким образом,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}. \qquad (1.2)$$

Об определителе (1.2) говорят, что он соответствует квадратной матрице 2-го порядка

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}.$$

Числа $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ – элементы определителя. Элементы a_{11}, a_{22} образуют главную диагональ, элементы a_{21}, a_{12} – побочную диагональ определителя. Если речь идёт об определителе квадратной матрицы A, то имеют место обозначения: $det\,A$, $|A|$, ΔA.

Пример

Вычислить определитель матрицы $A = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$.

$$|A| = \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} = 5 \cdot 2 - 1 \cdot (-3) = 10 + 3 = 13.$$

Определение 1.7. *Определителем третьего порядка* называют число, которое обозначается и равно

$$\begin{vmatrix} a_{11} a_{12} a_{13} \\ a_{21} a_{22} a_{23} \\ a_{31} a_{32} a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{21}a_{12}a_{33}. \qquad (1.3)$$

Для запоминания формулы (1.3) удобно пользоваться *правилом треугольников* (*правилом Саррюса*), согласно которому первые три слагаемые правой части равенства (1.3) вычисляются, как это показано на рис. 1.1; они представляют собой произведение элементов, стоящих на главной диагонали и в вершинах треугольников, у которых одна из сторон параллельна главной диагонали. Остальные три слагаемые вычисляются аналогично (рис. 1.2.), только за основу берётся побочная диагональ и берутся они с обратным знаком:

$$+ \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \qquad\qquad - \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Рис 1.1. Рис 1.2.

Квадратную матрицу будем называть *особой* (или *вырожденной*), если $|A|=0$. В противном случае квадратная матрица A называется *неособой* (или *невырожденной*).

Свойства определителей

Перечислим свойства определителей без доказательства.

Свойство 1. Значение определителя не изменится от замены всех его строк соответствующими по номеру столбцами и обратно.

Замечание. Это свойство означает равноправие строк и столбцов определителя.

Свойство 2. Если поменять местами два столбца (строки) определителя, то определитель изменит знак на противоположный.

Свойство 3. Определитель с двумя одинаковыми столбцами (строками) равен нулю.

Свойство 4. Если все элементы какого-нибудь столбца (строки) определителя умножить на одно и то же число α, то определитель умножится на число α.

Следствие 1. Если все элементы какого-либо столбца (строки) определителя имеют общий множитель, то его можно вынести за знак определителя.

Следствие 2. Если все элементы какого-либо столбца (строки) определителя равны нулю, то и сам определитель равен нулю.

Свойство 5. Определитель, у которого элементы двух столбцов (строк) соответственно пропорциональны, равен нулю.

Определение 1.8. *Минором* определителя $|A|$ (или квадратной матрицы А), соответствующим элементу a_{ik}, будем называть определитель, полученный из данного, если в нём вычеркнуть i-ю строку и j-й столбец, на пересечении которых стоит элемент a_{ik}. Обозначают минор символом M_{ik}.

Определение 1.9. *Алгебраическим дополнением* A_{ik} элемента a_{ik} определителя $|A|$ (или квадратной матрицы А) называют соответствующий этому элементу минор, взятый со знаком $(-1)^{i+k}$, т.е. $A_{ik} = (-1)^{i+k} M_{ik}$.

Пример

Дан определитель $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \end{vmatrix}$.

Тогда $M_{21} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 8 - 2 = 6$; $\quad A_{21} = (-1)^{2+1} M_{21} = -6$.

Свойство 6. Определитель равен сумме произведений элементов какого-либо столбца (строки) на их алгебраические дополнения:

$$|A| = a_{1k}A_{1k} + a_{2k}A_{2k} + a_{3k}A_{3k} = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + a_{i3}A_{i3} \qquad (1.4)$$
$$(i = 1,2,3; k = 1,2,3).$$

Запись определителя, согласно какой-либо из формул (1.4), при определённых значениях i и k называется разложением определителя по элементам k-го столбца (или i-й строки). Формулы (1.4) являются правилом вычисления определителей.

Пример. Вычислить определитель

$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & -1 & 2 \\ 5 & 1 & 6 \end{vmatrix}$, разлагая его по элементам 2-й строки.

Решение.

$$|A| = -4\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} + (-1)\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = = (-4)3 - (-3) - 2 \cdot (-3) = -3.$$

Замечание. Свойство 6 позволяет ввести понятие определителя n-го порядка.

Под определителем n-го порядка понимают число

$$\begin{vmatrix} a_{11}a_{12}\dots a_{1n} \\ a_{21}a_{22}\dots a_{2n} \\ \dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}a_{n2}\dots a_{nn} \end{vmatrix} = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \dots + a_{in}A_{in} = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \dots + a_{nj}A_{nj}, i, j = \overline{1,n}.$$

Свойство 7. Сумма произведений элементов какого-либо столбца (строки) определителя на алгебраические дополнения соответствующих элементов другого столбца (строки) равна нулю.

Свойство 8. Если каждый элемент какого-либо столбца (строки) определителя $|A|$ есть сумма двух слагаемых, то определитель равен сумме двух определителей, причём в одном из них соответствующий столбец (строка) состоит из первых слагаемых, а в другом – из вторых слагаемых.

Свойство 9. Определитель не меняет своего знака от прибавления ко всем элементам какого-либо столбца (строки) определителя соответствующих элементов другого столбца (строки), умноженных на одно и то же число.

ТЕМА: Ранг матрицы и его вычисление. Обратная матрица, её определение, вычисление, основные свойства. Системы линейных уравнений. Матричная запись. Теорема Кронекера-Капелли (формулировка). Методы решения систем линейных уравнений.

Ранг матрицы

Рассмотрим прямоугольную матрицу $A = (a_{ik})$, $i = 1,2,\ldots,m;\ k = 1,2,\ldots,n$.

Определение 2.1. Определитель порядка k, составленный из элементов, стоящих на пересечении выделенных k строк и k столбцов матрицы A, называется минором k – го порядка данной матрицы $(k \le r$, где $r = min(m,n))$.

Определение 2.2. *Рангом* матрицы A называется наибольший из порядков отличных от нуля миноров, порождаемых данной матрицей.

Из определения следует, что рангом обладает каждая матрица. Если все элементы матрицы равны нулю, то ранг её равен 0, а сама матрица называется нуль-матрицей. Ранг матрицы A обозначают через $r(A)$. Если все миноры некоторого порядка t данной матрицы равны нулю, то ранг её меньше t. Так как количество миноров различного порядка матрицы велико, то вычисление ранга, основанного на последовательном вычислении её миноров от самого высшего порядка и ниже, весьма затруднительно. Существуют приёмы более простые в применении. Например, основанный на следующей теореме.

Теорема 2.1. (без доказательства).

Ранг матрицы не меняется, если:

1° все строки матрицы заменить соответствующими столбцами, т. е. матрицу протранспонировать;

2° поменять местами две строки (столбца);

3° умножить каждый элемент любой её строки (столбца) на один и тот же множитель, отличный от нуля;

4° сложить любую её строку (столбец) с другой строкой (столбцом), умноженной на $k \in R$.

Перечисленные в теореме 2.1. преобразования называются *элементарными.*

Замечание. Матрицу, полученную из заданной путём элементарных преобразований, называют *эквивалентной* матрицей.

Конкретные примеры вычисления ранга матрицы на основании этой теоремы будут рассмотрены в разделе практических приложений.

В разделе «Векторная алгебра» изучено понятие линейной зависимости и линейной независимости векторов, которое может быть перенесено на строки (столбцы) матрицы, если их элементы отождествлять с координатами векторов. В связи с этим полезно рассмотреть связь между рангом матрицы и числом линейно независимых строк или столбцов.

Теорема 2.2. (без доказательства).
Если ранг матрицы A равен r, то у нее существует r линейно независимых строк (столбцов), через которые линейно выражаются все остальные строки (столбцы).

Следствие 1. Максимальное число линейно независимых строк (столбцов) матрицы равно её рангу.

Замечание. Если A – квадратная матрица и её определитель равен нулю, то одна из строк (столбцов) есть линейная комбинация остальных строк (столбцов).

Обратная матрица, её определение, вычисление, основные свойства

Определение 2.3. Матрица A^{-1} называется *обратной* к квадратной матрице A, если $AA^{-1} = A^{-1}A = E$, где E – единичная матрица.

Теорема 2.3. (без доказательства).

Для существования обратной матрицы необходимо и достаточно, чтобы $|A| \neq 0$, т.е. чтобы матрица A была невырожденной (неособенной).

Прежде чем записать формулу для вычисления обратной матрицы, введём следующее понятие.

Матрицу

$$\widetilde{A} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} \ldots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} \ldots & A_{n2} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ A_{1n} & A_{2n} \ldots & A_{nn} \end{bmatrix},$$

составленную из алгебраических дополнений к элементам a_{ik} матрицы A^T, называют *присоединённой* к матрице A.

Формула для вычисления матрицы, обратной для невырожденной матрицы A, имеет вид:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\tilde{A} \qquad (2.1).$$

Системы линейных уравнений. Матричная запись. Теорема Кронекера-Капелли (формулировка)

Рассмотрим систему m линейных уравнений с n неизвестными $x_1, x_2, \ldots, x_n$:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \qquad (2.2)$$

Введём обозначения матриц:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12}\ldots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}\ldots a_{2n} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots \\ a_{m1} & a_{m2}\ldots a_{mn} \end{bmatrix}$$ – матрица коэффициентов системы;

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$ – матрица неизвестных;

$$B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$ – матрица правых частей (или свободных членов);

$$A|B = \left[\begin{array}{l|l} a_{11}a_{12}\ldots a_{1n} & b_1 \\ a_{21}\ldots\ldots a_{2n} & b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots \\ a_{m1}\ldots\ldots a_{mn} & b_m \end{array}\right]$$ – расширенная матрица системы.

Тогда на основании правила умножения матриц заменим систему (2.2) матричным уравнением с неизвестной матрицей X:

$$AX = B. \tag{2.3}$$

В частности, если $m = n$, матрица A является квадратной. В этом случае имеем систему $m = n$ уравнений с $m = n$ числом неизвестных.

Систему уравнений (2.2) будем называть *совместной*, если можно найти такие значения неизвестных $x_1 = x_1^\circ, x_2 = x_2^\circ, \ldots, x_n = x_n^\circ$, которые удовлетворяют всем уравнениям системы (т.е. при подстановке обращают все уравнения в верные равенства). Совокупность этих значений $x_1^\circ, x_2^\circ, \ldots, x_n^\circ$ будем называть *решением системы*.

Заметим, что таких значений может не быть, тогда система называется *несовместной*.

Теорема 2.4. (Кронекера - Капелли)

Для того чтобы система линейных уравнений (2.2) была совместной, необходимо и достаточно, чтобы ранг её матрицы A равнялся рангу расширенной матрицы $A|B$. Если ранг матрицы A равен рангу расширенной матрицы $A|B$ и равен числу неизвестных n, то система имеет единственное решение. Если ранг матрицы равен рангу расширенной матрицы $A|B$, но меньше числа неизвестных, то система имеет бесчисленное множество решений.

Замечание 1. Ранг матрицы A больше числа неизвестных быть не может.

Замечание 2. Если $b_1 = b_2 = \ldots = b_n = 0$, то система (2.2) называется *однородной.*

Однородная система линейных уравнений имеет ненулевое решение тогда и только тогда, когда ранг ее матрицы коэффициентов меньше числа неизвестных. Из теоремы 2.4 следует, что такая система всегда совместна, так как она всегда имеет решение $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$, которое называется *тривиальным* или *нулевым*.

В частности, если однородная система n линейных уравнений с n неизвестными, то она обладает ненулевым решением, если её матрица коэффициентов вырожденная.

Методы решения систем линейных уравнений. Матричный метод решения систем линейных уравнений

Рассмотрим линейную систему (2.2) в случае $m=n$ и в её матричной записи (2.1), т.е. $AX=B$.

Предположим, что матрица A невырожденная, тогда у неё существует обратная матрица A^{-1}. Умножив обе части равенства (2.1) на A^{-1} слева, получим $A^{-1}AX=A^{-1}B$, откуда

$$X=A^{-1}B. \qquad (2.4)$$

Полученную формулу называют матричной записью решения системы уравнений, а метод решения – *матричным*. Единственность решения следует из единственности обратной матрицы. Следовательно, чтобы решить систему n линейных уравнений с n неизвестными и $|A|\neq 0$ матричным методом, необходимо:

1) составить матрицу A^{-1} обратную матрице коэффициентов системы A;
2) умножить A^{-1} справа на матрицу B;
3) записать решение системы – матрицу X .

Примеры решения систем будут рассмотрены в разделе практических приложений.

ТЕМА: Методы решения систем линейных уравнений. Правило Крамера. Метод Гаусса.

Правило Крамера

Рассмотрим систему n линейных уравнений с n неизвестными (система (2.2) при $m=n$). Тогда матрица коэффициентов A этой системы будет квадратной. Её определитель $|A|$ обозначим символом ΔA.

Теорема 3.1. Если определитель ΔA системы n линейных уравнений с n неизвестными отличен от нуля, то система имеет единственное решение, которое может быть получено по формулам:

$$x_i=\frac{\Delta_i}{\Delta A},\ i=1,2,\ldots n, \qquad (3.1)$$

где Δ_i - определители, полученные из ΔA заменой в нём i-го столбца столбцом из свободных членов.

Доказательство

Так как определитель системы $\Delta A \neq 0$, то решение можно записать в матричной форме (2.4):

$$X = A^{-1}B.$$

Перейдём к развёрнутой форме записи решения:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \frac{1}{\Delta A} \begin{bmatrix} A_{11} A_{21} \ldots A_{n1} \\ A_{12} A_{22} \ldots A_{n2} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ A_{1n} A_{2n} \ldots A_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}.$$

Выполнив операцию умножения матриц в правой части, получим

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \frac{1}{\Delta A} \begin{bmatrix} b_1\mathrm{A}_{11} + b_2\mathrm{A}_{21} + \ldots + b_n\mathrm{A}_{\mathrm{n}1} \\ b_1\mathrm{A}_{12} + b_2\mathrm{aA}_{22} + \ldots + b_n\mathrm{A}_{\mathrm{n}2} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ b_1\mathrm{A}_{1\mathrm{n}} + b_2\mathrm{A}_{2\mathrm{n}} + \ldots + b_n\mathrm{A}_{\mathrm{nn}} \end{bmatrix},$$

откуда

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{\Delta A}\left(b_1 A_{11} + b_2 A_{21} + \ldots + b_n A_{n1}\right) = \frac{\Delta_1}{\Delta A}, \\ x_2 &= \frac{1}{\Delta A}\left(b_1 A_{12} + b_2 A_{22} + \ldots + b_n A_{n2}\right) = \frac{\Delta_2}{\Delta A}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n &= \frac{1}{\Delta A}\left(b_1 A_{1n} + b_2 A_{2n} + \ldots + b_n A_{nn}\right) = \frac{\Delta_1}{\Delta A}. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Таким образом, теорема доказана.

Формулы (3.2) для нахождения решения системы называется *формулами Крамера.*

Примеры будут рассмотрены в разделе практических приложений.

Метод Гаусса (последовательного исключения неизвестных)

Практическое значение рассмотренных выше методов решения линейных систем (матричный метод и правило Крамера) невелико, так как их применение ограничено. Они применимы только в том случае, когда матрица коэффициентов системы квадратная и невырожденная. Кроме того, оба метода достаточно «трудоёмки». Более удобным является метод Гаусса – последовательного исключения неизвестных.

Рассмотрим систему линейных уравнений (2.2) для случая $m \neq n$ (т.е. общий случай).

Назовём элементарными преобразованиями системы линейных уравнений следующие операции.

1. Умножение какого-либо уравнения на число, не равное нулю.
2. Прибавление к любому уравнению другого уравнения, умноженного на произвольное число.
3. Перемена местами уравнений в системе.

С помощью таких преобразований полученная система уравнений равносильна исходной.

Суть метода Гаусса состоит в том, что путём элементарных преобразований над уравнениями системы она приводится к «усечённому» виду (матрица коэффициентов трапециевидная), после чего её решение найти несложно.

Покажем, как эти преобразования осуществить, проделав только один шаг гауссового исключения (в силу громоздкого описательного характера).

Пусть в системе

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \tag{3.3}$$

коэффициент $a_{11} \neq 0$.

Если он равен нулю, на первое место ставим уравнение, в котором коэффициент при неизвестном x_i будет отличен от нуля. Умножая обе части первого уравнения данной системы поочерёдно на $\dfrac{a_{i1}}{a_{11}}$ и вычитая всякий раз из i- го уравнения $(i = 2,3,\ldots,m)$, придём к системе, у которой во всех уравнениях, начиная со второго, отсутствует неизвестное x_1:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ \qquad\quad a'_{22}x_2 + \ldots + a'_{1n}x_n = b'_2, \\ \qquad\quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad\quad a'_{m2}x_2 + \ldots + a'_{mn}x_n = b'_m. \end{cases} \tag{3.4}$$

В системе (3.4) через a'_{ij} обозначены новые коэффициенты. Коэффициент $a_{11} \neq 0$ на первом шаге называют *разрешающим*, первое уравнение – *разрешающим уравнением*, столбец коэффициентов при x_1 – *разрешающим столбцом*.

Далее поступаем аналогично. Предположив, что $a_{22} \neq 0$, переходим на втором шаге к равносильной системе, в которой во всех уравнениях, начиная с 3-го, отсуствует неизвестное x_2.

Правило преобразования коэффициентов и свободных членов системы (3.3) при переходе на каждом шаге к равносильной системе «усечённого» вида можно сформулировать так:

1) коэффициенты и свободный член разрешающего уравнения остаются без изменения;

2) коэффициенты разрешающего столбца, расположенные ниже разрешающего коэффициента, обращаются в нули;

3) все прочие коэффициенты и свободные члены пересчитываются.

Для пересчёта коэффициентов можно пользоваться так называемым *правилом прямоугольника*. Это правило будет показано на конкретном примере в разделе практических приложений. Процесс преобразования исходной системы к «усечённой» называется *прямым ходом* метода Гаусса. При осуществлении прямого хода метода Гаусса может сложиться ситуация, когда преобразованное уравнение будет иметь вид:
$0x_k + 0x_{k+1} + \ldots + 0x_n = d \neq 0$ и тогда данная система несовместна. Если же встретится уравнение вида: $0x_k + 0x_{k+1} + \ldots + 0x_n = 0$, то такое уравнение следует отбросить и далее не рассматривать.

Осуществив до конца прямой ход метода Гаусса, получим систему:

$$\begin{cases} b_{11}x_1 + b_{12}x_2 + \ldots + b_{1n}x_n = c_1, \\ \qquad\qquad b_{22}x_2 + \ldots + b_{1n}x_n = c_2, \\ \qquad\qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad\qquad b_{rr}x_r + \ldots + b_{rn}x_n = c_r, \end{cases} \tag{3.5}$$

где c_i, b_{ij} – новые преобразованные коэффициенты, причем b_{11}, b_{22}, b_{rr} отличны от нуля. Такую запись системы называют *ступенчатой*. В частности, при $r = n$ она будет иметь треугольный вид.

Если $r = n$, то последнее уравнение системы (3.5) будет иметь вид: $b_{nn}x_n = c_n$ $\left(b_{nn} \neq 0\right)$, откуда $x_n = \dfrac{c_n}{b_{nn}}$. Затем из предпоследнего уравнения находим x_{n-1}, затем из третьего от конца x_{n-2} и т. д. Двигаясь таким образом снизу вверх, найдём все неизвестные. Эту процедуру называют *обратным ходом* метода Гаусса.

Если $r < n$, то из последнего уравнения выражаем x_r через x_{r+1}, x_{r+2}, $\ldots, x_n$. И затем аналогично двигаемся снизу вверх, отыскивая x_{r-1}, $x_{r-2}, \ldots, x_1$. Таким образом, неизвестные x_1, $x_2, \ldots, x_r$ (их называют *базисными*) выражаются через x_{r+1}, $x_{r+2}, \ldots, x_n$ (их называют *свободными*).

Построенное решение называют *общим решением системы* (3.5).

Поскольку свободные неизвестные могут принимать любые числовые значения, каждый раз будет получаться определённое частное решение исходной системы. В рассмотренном случае система имеет бесчисленное множество решений. Заметим, что частное решение, полученное из общего при нулевых значениях свободных неизвестных, называется *базисным решением*.

Процесс решения системы линейных уравнений методом Гаусса можно значительно облегчить, если преобразования проводить над строками расширенной матрицы этой системы. Преобразования 2), 3), 4), указанные в теореме 2.1, применительно к матрицам, также являются элементарными и не меняют её ранга.

Расширенная матрица преобразованной системы

$$\left[\begin{array}{l|l} b_{11} \quad b_{12} \ \dots \ b_{1n} & c_1 \\ b_{00} \quad b_{22} \ \dots \ b_{2n} & c_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots & \vdots \\ 0 \ 0 \ \dots \ b_{rr} \ \dots \ b_{rn} & c_r \end{array}\right]$$

эквивалентна расширенной матрице $A|B$ исходной системы. Значит, ранги их равны. Ранг преобразованной матрицы будет равен числу её ненулевых строк.

Результат проведенных выше рассуждений (что полностью согласуется с теоремой Кронекера – Капелли) следующий: если $r = n$, т.е. ранг системы уравнений равен числу неизвестных, то система имеет единственное решение; если $r < n$, то система имеет бесчисленное множество решений; $r > n$ быть не может.

Примеры будут рассмотрены в разделе практических приложений.

ПРАКТИЧЕСКИЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

Задания для самостоятельного решения

Матрицы, действия над матрицами

1. Дана матрица A. Найти матрицу X, удовлетворяющую условию $3A - 2X = B$.

1) $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 3 & -4 & 6 \end{bmatrix}$, $\quad B = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 7 & -8 & -9 \end{bmatrix}$.

2) $A = \begin{bmatrix} 1 & -5 \\ 3 & -7 \\ 6 & -8 \end{bmatrix}$, $\quad B = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ -4 & 6 \\ -1 & 7 \end{bmatrix}$.

3) $A=\begin{bmatrix} 2 & 5 & -3 \\ -4 & 1 & 8 \end{bmatrix}$, $\qquad B=\begin{bmatrix} -3 & 3 & -8 \\ -2 & 5 & -6 \end{bmatrix}$.

4) $A=\begin{bmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 8 & -7 & -6 \\ -3 & 4 & 2 \end{bmatrix}$, $\qquad B=\begin{bmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 3 & -5 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$.

2. Дана матрица A. Найти матрицу K, удовлетворяющую условию $0{,}5A-2X=E$, где E – единичная матрица.

1) $A=\begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}$.

2) $A=\begin{bmatrix} 3 & -6 \\ -9 & 6 \end{bmatrix}$.

3) $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 5 & 7 & 2 \\ 2 & -6 & 8 \end{bmatrix}$.

4) $A=\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 8 & 2 \end{bmatrix}$.

5) $A=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -6 & 9 & 5 \\ -3 & 4 & 7 \end{bmatrix}$.

3. Найти те из произведений AB и BA, которые имеют смысл. Указать элемент матрицы AB или BA, который принадлежит строке i и столбцу j .

1) $A=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & -0 & 2 \end{bmatrix}$, $\qquad B=\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $\qquad i=1;\ j=2.$

2) $A=\begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & -8 \\ -3 & 6 & 9 \end{bmatrix}$, $\qquad B=\begin{bmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 4 & -1 & 0 \end{bmatrix}$, $\qquad i=3;\ j=2.$

3) $A=\begin{bmatrix} 5 & 9 \\ 0 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$, $\qquad B=\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$, $\qquad i=2;\ j=1.$

4) $A = \begin{bmatrix} 5 & 9 & 7 \\ 6 & 3 & -2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 5 & 9 \\ 0 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$, $i = 2; j = 1.$

5) $A =$ [redacted] $-5 \quad 6$, $B = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$, $i = 1; j = 1.$

6) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 3 & 1 & -5 \\ 6 & 4 & -8 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 4 \\ 9 \\ 6 \end{bmatrix}$, $i = 2; j = 1.$

4. Вычислить ранг матрицы A с помощью элементарных преобразований

1) $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 & -3 & 5 \\ 1 & -2 & 1 & 5 & 3 \\ 1 & -2 & 4 & -34 & 0 \end{bmatrix}.$

2) $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & -1 \\ 1 & -4 & -7 & 5 \end{bmatrix}.$

3) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}.$

4) $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -4 \\ -1 & -4 & 5 \\ 0 & 5 & -10 \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}.$

5) $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 5 & 1 \\ -2 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ -3 & 1 & 2 & -4 & 1 \end{bmatrix}.$

6) $A=\begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 7 & 3 & 5 \\ 15 & 7 & 11 \\ 11 & 5 & 8 \end{bmatrix}.$

Определители 2-го и 3-го порядков

5. Решить уравнения (или неравенства):

1) $\begin{vmatrix} x^2 & 3x \\ 3 & x \end{vmatrix} = 0.$

2) $\begin{vmatrix} x^2-4 & -1 \\ x-2 & x+2 \end{vmatrix} = 0.$

3) $\begin{vmatrix} 4\sin x & 1 \\ 1 & \cos x \end{vmatrix} = 0.$

4) $\begin{vmatrix} \mathrm{x}^2+7 & 2 \\ 3\mathrm{x} & 1 \end{vmatrix} > -1.$

5) $\begin{vmatrix} x^2+3 & x \\ 2 & 5 \end{vmatrix} > 5$

6) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3-x & 3 \\ 1 & 2 & 5+x \end{vmatrix} \le 0.$

6. Для данного определителя и заданных i и j найти:
   1) миноры и алгебраические дополнения элементов a_{ij};
   2) вычислить определитель:
      a) разложив его по элементам i-й строки,
      b) разложив его по элементам j-го столбца;
   3) вычислить определитель по правилу треугольников.

1) $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 8 & -7 & -6 \\ -3 & 4 & 2 \end{vmatrix}$, $i = 3; j = 1.$

2) $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 3 & -5 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$, $i = 3; j = 2.$

3) $\Delta = \begin{vmatrix} 6 & 0 \\ 2 & -2 \end{vmatrix}$, $i = 2; j = 2.$

4) $\Delta = \begin{vmatrix} -6 & 5 & 2 \\ 3 & 4 & 3 \\ 1 & 1 & -3 \end{vmatrix}$, $i = 1; j = 2.$

5) $\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 7 \\ 1 & -3 & 2 \end{vmatrix}$, $i = 2; j = 3.$

7. Найти матрицы, обратные данным:

1) $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$; 2) $\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}$;

3) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & -2 \\ -5 & -4 & -1 \end{bmatrix}$; 4) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$; 5) $\begin{bmatrix} 2 & 6 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

8.Решить системы уравнений:

1) по формулам Крамера

а) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 = -9; \\ 8x_1 + 3x_2 + 5x_3 = -13; \\ 2x_1 + 5x_2 - x_3 = -5; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 - 5x_3 - 5 = 0; \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 - 12 = 0; \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 1 = 0. \end{cases}$

2) средствами матричного исчисления

а) $\begin{cases} x_1+4x_2-5x_3=8; \\ 2x_1+3x_2-4x_3=9; \\ x_1-2x_2-x_3=6; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1+2x_2-x_3=3; \\ 5x_1+12x_2-2x_3=-1; \\ 4x_1+9x_2-2x_3=2. \end{cases}$

3)методом Гаусса

а) $\begin{cases} x_1+2x_2+4x_3=16; \\ 5x_1+x_2+2x_3=8; \\ 3x_1-x_2+x_3=-11; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x_1-x_2-3x_3=0; \\ 3x_1+4x_2+2x_3=1; \\ x_1+5x_2+x_3=-3. \end{cases}$

ПРИМЕРЫ ВЫПОЛНЕНИЯ ЗАДАНИЙ

Задание 1. Дана матрица A. Найти матрицу X, удовлетворяющую условию $3A-2X=B$.

$$A=\begin{bmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}, \qquad B=\begin{bmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Решение

Решим уравнение $3A-2X=B$ в матричном виде.
Выразим из этого уравнения X.

Так как $3A-B=2X$, то $X=\dfrac{3}{2}A-\dfrac{1}{2}B$.

Используя линейные операции над матрицами, найдем

$$X=\frac{3}{2}\begin{bmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}-\frac{1}{2}\begin{bmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix} 3 & -\frac{3}{2} & 6 \\ 0 & \frac{9}{2} & \frac{3}{2} \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 4 & -\frac{3}{2} & 5 \\ -\frac{1}{2} & 5 & 0 \end{bmatrix},$$

откуда

$$X=\begin{bmatrix} 4 & -\frac{3}{2} & 5 \\ -\frac{1}{2} & 5 & 0 \end{bmatrix}.$$

Задание 2. Найти те из произведений AB и BA, которые имеют смысл. Указать элемент матрицы AB или BA, который принадлежит строке i =2 и столбцу j =1 для

$$A=\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad B=\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Решение

Произведение матриц AB существует , т.к. число столбцов матрицы A равно числу строк матрицы B. Найдем произведение матриц по определению:

$$A\cdot B=\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2\cdot 4+(-1)\cdot 2 & 2\cdot 3+(-1)\cdot 0 \\ 3\cdot 4+0\cdot 2 & 3\cdot 3+0\cdot 0 \\ 1\cdot 4+2\cdot 2 & 1\cdot 3+2\cdot 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 6 & 6 \\ 12 & 9 \\ 8 & 3 \end{bmatrix}.$$

Элемент $a_{21}=12$.

Произведение матриц BA не существует, т.к. матрицы B и A несогласованные.

Задание 3. Вычислить ранг матрицы $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ с помощью элементарных преобразований.

Решение. Выполним элементарные преобразования над матрицей A.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{pmatrix} \text{Умножим первую строку матрицы A на } -1 \\ \text{и сложим с третьей строкой} \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \sim (\text{Прибавим вторую строку к третьей}) \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

Число ненулевых строк преобразованной матрицы равно 2, следовательно, ранг матрицы равен 2.

Задание 4. Решить неравенство: $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 3 & 5 & 3 \\ 1 & 6 & x+5 \end{vmatrix} > 0$.

Решение

Вычислим определитель по правилу треугольников:

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 3 & 5 & 3 \\ 1 & 6 & x+5 \end{vmatrix} = 2\cdot 5\cdot(x+5) + 3\cdot 6\cdot 2 + (-1)\cdot 3\cdot 1 - 1\cdot 5\cdot 2 - 3\cdot(-1)(x+5) =$$

$$= 10x + 50 + 36 - 3 - 10 + 3x + 15 - 36 = 13x + 52.$$

Решая неравенство, $13x + 52 > 0$, найдем $x > -\frac{52}{13}$, $x \in (-\frac{52}{13}; +\infty)$.

Задание 5. Для данного определителя $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 3 & -5 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$ и для заданных значений i = 2; j = 3, найти:

1) миноры и алгебраические дополнения элемента $a_{23;}$

2) вычислить определитель:

а) разложив его по элементам 2-й строки,

б) разложив его по элементам 3-го столбца;

3) вычислить определитель по правилу треугольников.

Решение

1)Найдем минор M_{23} и алгебраическое дополнение A_{23}:

$$M_{23} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} = 1\cdot 9 - 3\cdot 8 = 9 - 24 = -15,$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3}\cdot M_{23} = (-1)^5\cdot(-15) = 15;$$

2) а) вычислим определитель, разложив его по элементам второй строки:

$$\Delta = a_{21}\cdot A_{21} + a_{22}\cdot A_{22} + a_{23}\cdot A_{23} = (-2)\cdot(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}3 & 5\\ 9 & 7\end{vmatrix} + 4\cdot(-1)^{2+2}\begin{vmatrix}1 & 5\\ 8 & 7\end{vmatrix} -$$

$$-3\cdot(-1)^{2+3}\begin{vmatrix}1 & 3\\ 8 & 9\end{vmatrix} = (-2)(-1)(21-45) + 4\cdot 1\cdot(7-40) - 3\cdot(-1)\cdot(9-24) =$$

$$= 2\cdot(-24) + 4(-33) + 3(-15) = -48 - 132 - 45 = -225;$$

б) вычислим определитель, разложив его по элементам третьего столбца:

$$\Delta = a_{21}\cdot A_{21} + a_{23}\cdot A_{23} + a_{33}\cdot A_{33} = 5\cdot(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}-2 & 4\\ 8 & 9\end{vmatrix} - 3\cdot(-1)^{2+3}\begin{vmatrix}1 & 3\\ 8 & 9\end{vmatrix} +$$

$$+7\cdot(-1)^{3+3}\begin{vmatrix}1 & 3\\ -2 & 4\end{vmatrix} = 5\cdot 1\cdot(-18-32) - 3\cdot(-1)\cdot(9-24) + 7\cdot 1\cdot(4+6) =$$

$$= 5\cdot(-50) + 3(-15) + 7\cdot 10 = -250 - 45 + 70 = -225;$$

3) вычислим определитель по правилу треугольников:

$$\Delta = \begin{vmatrix}1 & 3 & 5\\ -2 & 4 & -3\\ 8 & 9 & 7\end{vmatrix} = 1\cdot 4\cdot 7 + (-2)\cdot 9\cdot 5 + 3\cdot(-3)\cdot 8 - 8\cdot 4\cdot 5 - 9\cdot(-3)\cdot 1 -$$

$$-(-2)\cdot 3\cdot 7 = 28 - 90 - 72 - 160 + 27 + 42 = -225.$$

Итак, $\Delta = -225$.

Задание 6. Найти матрицу обратную данной матрице $A = \begin{bmatrix}-4 & 0 & 1\\ 2 & -1 & 3\\ 3 & 2 & 2\end{bmatrix}$.

Решение

Если квадратная матрица A невырожденная, то у нее существует обратная матрица, которую найдем по формуле

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\begin{bmatrix}A_{11} & A_{21} & A_{31}\\ A_{12} & A_{22} & A_{32}\\ A_{13} & A_{23} & A_{33}\end{bmatrix},\ \text{где } |A| \text{ – определитель матрицы } A,$$

$A_{ik}\ (i = \overline{1,3},\ k = \overline{1,3})$, – алгебраические дополнения элементов матрицы A.

Так как
$$|A|=\begin{vmatrix}-4 & 0 & 1\\ 2 & -1 & 3\\ 3 & 2 & 2\end{vmatrix}=8+4+3+24=39\neq 0,$$ то обратная матрица существует. Составим матрицу из алгебраических дополнений элементов матрицы A. Найдем:

$$A_{11}=\begin{vmatrix}-1 & 3\\ 2 & 2\end{vmatrix}=-8,\qquad A_{12}=-\begin{vmatrix}2 & 3\\ 3 & 2\end{vmatrix}=5,\qquad A_{13}=\begin{vmatrix}2 & -1\\ 3 & 2\end{vmatrix}=7,$$

$$A_{21}=-\begin{vmatrix}0 & 1\\ 2 & 2\end{vmatrix}=2,\qquad A_{22}=\begin{vmatrix}-4 & 1\\ 3 & 2\end{vmatrix}=-11,\qquad A_{23}=-\begin{vmatrix}-4 & 0\\ 3 & 2\end{vmatrix}=8,$$

$$A_{31}=\begin{vmatrix}0 & 1\\ -1 & 3\end{vmatrix}=1,\qquad A_{32}=-\begin{vmatrix}-4 & 1\\ 2 & 3\end{vmatrix}=14,\qquad A_{33}=\begin{vmatrix}-4 & 0\\ 2 & -1\end{vmatrix}=4.$$

Значит,
$$A^{-1}=\frac{1}{39}\begin{bmatrix}-8 & 2 & 1\\ 5 & -11 & 14\\ 7 & 8 & 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\frac{8}{39} & \frac{2}{39} & \frac{1}{39}\\ \frac{5}{39} & -\frac{11}{39} & \frac{14}{39}\\ \frac{7}{39} & \frac{8}{39} & \frac{4}{39}\end{bmatrix}.$$

Проверкой убедиться самостоятельно, что $A\ A^{-1}=A^{-1}A=E.$

Задание 7. Дана система линейных неоднородных уравнений
$$\begin{cases}x_1+5x_2-x_3=3,\\ 2x_1+4x_2-3x_3=2,\\ 3x_1-x_2-3x_3=-7.\end{cases}$$

Проверить, совместна ли заданная система. В случае совместности решить её:

а) по формулам Крамера;

б) с помощью обратной матрицы (матричным методом);

в) методом Гаусса.

Решение

Формулы Крамера и матричный метод применимы, если матрица коэффициентов системы невырожденная, т.е. ее определитель отличен от нуля.

Найдем определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 5 & -1 \\ 2 & 4 & -3 \\ 3 & -1 & -3 \end{vmatrix} = -12 + 2 - 45 - (-12 + 3 - 30) = -16 \neq 0,$$

а) решаем систему по формулам Крамера. Найдем $\Delta_j (j = 1,2,3)$ – определители, полученные из определителя Δ заменой j-го столба столбцом их свободных членов системы, т.е.

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 3 & 5 & -1 \\ 2 & 4 & -3 \\ -7 & -1 & -3 \end{vmatrix} = -36 + 2 + 105 - (28 + 9 - 30) = 64,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 2 & -3 \\ 3 & -7 & -3 \end{vmatrix} = -6 + 14 - 27 - (-6 + 21 - 18) = -16,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 2 & 4 & 2 \\ 3 & -1 & -7 \end{vmatrix} = -28 - 6 + 30 - (36 - 2 - 70) = 32.$$

Таким образом, по формулам Крамера

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{64}{-16} = -4; \qquad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-16}{-16} = 1; \qquad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{32}{-16} = -2.$$

Итак, $x_1 = -4; \quad x_2 = 1; \quad x_3 = -2.$

б) Из теории известно, что в матричном виде решение системы имеет вид:

$$X = A^{-1} \cdot B, \text{ где } X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \quad A^{-1} \text{ – обратная матрица, } B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}.$$

Найдем A^{-1} (формула и процесс нахождения рассмотрены в задании 6).

$$A_{11}=\begin{vmatrix} 4 & -3 \\ -1 & -3 \end{vmatrix}=-15,\qquad A_{12}=-\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 3 & -3 \end{vmatrix}=-3,\qquad A_{13}=\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}=-14,$$

$$A_{21}=-\begin{vmatrix} 5 & -1 \\ -1 & -3 \end{vmatrix}=16,\qquad A_{22}=\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -3 \end{vmatrix}=0,\qquad A_{23}=-\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}=16,$$

$$A_{31}=\begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 4 & -3 \end{vmatrix}=-11,\qquad A_{32}=-\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix}=1,\qquad A_{33}=\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}=-6,$$

Тогда

$$A^{-1}=-\frac{1}{16}\begin{bmatrix} -15 & 16 & -11 \\ -3 & 0 & 1 \\ -14 & 16 & -6 \end{bmatrix}.$$

Значит,

$$X=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=-\frac{1}{16}\begin{bmatrix} -15 & 16 & -11 \\ -3 & 0 & 1 \\ -14 & 16 & -6 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -7 \end{bmatrix}=-\frac{1}{16}\begin{bmatrix} -45+32+77 \\ -9+0-7 \\ -42+32+42 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \dfrac{64}{-16} \\ \dfrac{-16}{-16} \\ \dfrac{32}{-16} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -4 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

$x_1=-4,\ x_2=1,\ x_3=-2$.

Подстановкой найденных значений в уравнении системы убеждаемся в том, что они являются решением.

в) Решим систему методом Гаусса. Приведем систему к усеченному виду с помощью элементарных преобразований над ее уравнениями. Оставим первое уравнение системы без изменений и назовем его *разрешающим* уравнением. Исключим неизвестное x_1 из второго и третьего уравнений. Для этого обе части разрешающего уравнения умножим на 2 и вычтем полученное уравнение из второго; затем обе части разрешающего уравнения умножим на 3 и вычтем полученное уравнение из третьего. Преобразовав таким образом заданную систему уравнений, придем к эквивалентной ей системе:

$$\begin{cases} x_1+5x_2-x_3=3, \\ \quad -6x_2-x_3=-4, \\ \quad -16x_2 \qquad =-16. \end{cases}$$

Из последнего уравнения полученной системы находим $x_2 = 1$. Из предпоследнего уравнения находим $x_3 = -2$, из первого уравнения находим $x_1 = -4$. Проверкой убеждаемся, что значения $\{-4;\ 1;\ -2\}$, являются решением системы.

Рассмотрим общий случай системы m линейных уравнений с n неизвестными, то есть, когда число уравнений не совпадает с числом неизвестных.

Процесс решения такой системы методом Гаусса упрощается, если преобразованиям подвергнуть не систему, а её расширенную матрицу. Опишем процесс преобразований, рассмотрев один шаг *гауссовых исключений*.

Составим расширенную матрицу системы

$$A|B = \left[\begin{array}{l|l} a_{11}\,a_{12}\ldots\ldots\ldots a_{1n} & b_1 \\ a_{21}\ a_{22}\ldots\ldots\ldots a_{2n} & b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots \\ a_{m1}\,a_{m2}\ldots\ldots a_{mn} & b_m \end{array}\right].$$

В матрице $A|B$ выберем разрешающую строку, разрешающий столбец и разрешающий элемент, стоящий на их пересечении. Например, если $a_{11} \neq 0$, то на первом шаге гауссовых исключений первую строку и первый столбец будем считать разрешающими, a_{11} – разрешающим элементом. При переходе к новой преобразованной матрице, используем следующие правила:

1) элементы разрешающей строки (и всех выше расположенных строк, если это не первый шаг) остаются неизменными;

2) элементы разрешающего столбца, расположенные ниже разрешающего элемента, обращаются в нули;

3) все прочие элементы матрицы вычисляются по *правилу прямоугольника*: пусть k-я строка является разрешающей, a_{ks} – разрешающий элемент, a_{ij} – пересчитываемый элемент, a_{is} – элемент, стоящий на пересечении разрешающего столбца и строки пересчитываемого элемента, a_{kj} – элемент, стоящий на пересечении разрешающей строки и столбца пересчитываемого элемента. В пересчёте всякий раз участвуют четыре элемента, составляющие определитель второго порядка.

Преобразованный элемент равен разности произведений элементов главной диагонали (главной является та диагональ, которая содержит разрешающий элемент) и побочной. То есть $a_{ij}' = a_{ks}a_{ij} - a_{kj}a_{is}$ (см. схему)

$$\begin{array}{ccccccc} \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ \\ \circ & a_{ks} & \circ & \circ & \circ & a_{kj} & \circ \\ \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ \\ \circ & a_{is} & \circ & \circ & \circ & a_{ij} & \circ \\ \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ \end{array}$$

В частности, на первом шаге разрешающим является элемент a_{11}. Тогда

$$a_{ij}' = a_{11}\,a_{ij} - a_{1j}\,a_{i1},\quad I = 2, 3, \ldots, m;\ \ j = 2,3, \ldots, n.$$

Пересчитаем элементы всех нижележащих строк.

Осуществив последовательно необходимое число шагов гауссовых исключений (прямой ход метода Гаусса), получим матрицу эквивалентную исходной. Записываем соответствующую ей систему уравнений, из которой, начиная с последнего уравнения, последовательно находим решения системы (обратный ход метода Гаусса).

Задание 8. Решить методом Гаусса систему линейных уравнений

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 2, \\ 3x_1 - 2x_2 - x_3 - x_4 = -1, \\ 5x_1 - 3x_2 - 4x_3 - 2x_4 = -4. \end{cases}$$

Решение

Расширенная матрица системы имеет вид

$$A|B = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & -2 & -1 & -1 & -1 \\ 5 & -3 & -4 & -2 & -4 \end{array}\right].$$

Элемент $a_{11} = 1 \neq 0$. Первую строку и первый столбец будем считать разрешающими, элемент a_{11} – разрешающим. Выполним первый шаг гауссовых исключений: разрешающую строку переписываем без изменения, в разрешающем столбце ниже разрешающего элемента записываем нули, остальные элементы пересчитываем по правилу прямоугольника (все операции запишем в матрице подробно). Получим преобразованную матрицу

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1\cdot(-2)-(-1)\cdot 3 & 1\cdot(-1)-2\cdot 3 & 1\cdot(-1)-2\cdot 3 & 1\cdot(-1)-2\cdot 3 \\ 0 & 1\cdot(-3)-(-1)\cdot 5 & 1\cdot(-4)-2\cdot 5 & 1\cdot(-2)-2\cdot 5 & 1\cdot(-4)-2\cdot 5 \end{array}\right] =$$

$$= \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -7 & -7 & -7 \\ 0 & 2 & -14 & -12 & -14 \end{array}\right].$$

На втором шаге разрешающим является элемент $a_{22}' \neq 0$. Если он равен нулю, меняем эту строку с той нижележащей строкой, у которой коэффициент при x_2 отличен от нуля. Первые две строки переписываем без изменения, под разрешающим элементом записываем нуль, остальные элементы пересчитываем по правилу прямоугольника. Получим преобразованную матрицу

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -7 & -7 & -7 \\ 0 & 0 & 1\cdot(-14)-(-7)\cdot 2 & 1\cdot(-12)-(-7)\cdot 2 & 1\cdot(-14)-(-7)\cdot 2 \end{array}\right] =$$

$$= \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -7 & -7 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right].$$

Таким образом, процесс гауссовых исключений завершен. Заметим, что если система имеет m уравнений, то в общем случае необходимо осуществить $m - 1$ шаг гауссовых исключений. Получили матрицу эквивалентную исходной расширенной матрице. Полученная расширенная матрица имеет три ненулевых строки, значит, ее ранг равен 3. Матрица коэффициентов системы имеет также три ненулевых строки, значит, ее ранг равен 3. В системе четыре неизвестных. На основании теоремы Кронекера–Капелли заключаем, что система совместна и имеет бесчисленное множество решений. Запишем систему уравнений, соответствующую последней преобразованной матрице

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 2, \\ \qquad x_2 - 7x_3 - 7x_4 = -7, \\ \qquad\qquad\qquad 2x_4 = 0. \end{cases}$$

Осуществим обратный ход метода Гаусса.

Из последнего уравнения системы находим $x_4 = 0$. Подставим x_4 во второе уравнение, получим $x_2 = 7x_3 - 7$, где x_3 – любое действительное число. Положим $x_3 = c$, тогда $x_2 = 7c - 7$. Подставим найденные x_4, x_3 и x_2 в первое уравнение системы, найдём $x_1 = 5c - 5$.

Итак, получили общее решение системы: $x_1 = 5c - 5$, $x_2 = 7c - 7$ $x_3 = c$, $x_4 = 0$.

Выбирая в качестве с любое действительное число, можем получить бесчисленное множество частных решений.

Вопросы для самопроверки

1. Что называется матрицей? Какое различие между матрицей и определителем?
2. Какую матрицу называют транспонированной, треугольной, диагональной?
3. Сформулируйте правило сложения матриц.
4. Как составляется произведение двух матриц?
5. Какими свойствами обладает умножение матриц?
6. Какая матрица называется единичной?
7. Что называется определителем второго порядка?
8. Что называется определителем третьего порядка?
9. Сформулируйте свойства определителей третьего порядка.
10. Что называется минором определителя третьего порядка?
11. Что называется алгебраическим дополнением?
12. Какая матрица называется неособенной?
13. Какая матрица называется особенной?
14. Дайте определение определителя *n*-го порядка. Какие существуют правила вычисления определителей *n*-го порядка?
15. Какая матрица называется обратной по отношению к данной квадратной матрице?
16. Какое условие является необходимым и достаточным для существования обратной матрицы?
17. Запишите формулу для нахождения обратной матрицы.
18. Что называется рангом матрицы?
19. Какие преобразования матриц не меняют ее ранга?
20. Какая связь между рангом матрицы и числом линейно-независимых строк (столбцов)?
21. Что называется матрицей систем линейных уравнений?
22. Какой определитель называется определителем системы? Какому условию должен удовлетворять определитель системы, чтобы она имела единственное решение?
23. Какому условию должны удовлетворять коэффициенты системы уравнений $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_{2,} \end{cases}$ чтобы система:

а) была несовместной;
б) имела единственное решение;
в) имела бесчисленное множество решений?

24. Запишите формулы Крамера для системы трех линейных уравнений с тремя неизвестными.
25. Какая система линейных уравнений называется однородной?
26. Каков порядок решения системы линейных уравнений по формулам Крамера? Когда применимо правило Крамера к решению систем?

27. Каков порядок решения системы линейных уравнений матричным методом? При каких условиях он применим?
28. Сформулируйте теорему о совместности системы линейных уравнений Кронекера-Капелли.
29. Какое условие является необходимым и достаточным для того, чтобы однородная система имела ненулевое решение?
30. Что называется одним шагом гауссовых исключений?
31. Сформулируйте правила перехода от исходной системы к новой после одного шага гауссовых исключений.
32. Каков порядок вычисления ранга матрицы с помощью гауссовых исключений?

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гантмахер, Ф.Р. Теория матриц.– М.: Наука, 1967. –576с.
2. Ланкастер, П. Теория матриц. – М.: Наука, 1978. –280с.

СПИСОК РЕКОМЕНДОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

3. Высшая математика: Общий курс: Учеб.-2-е изд., перераб. / А.И. Яблонский, А.В. Кузнецов, Е.И. Шилкина и др.; Под общ. ред. С.А. Самаля. – Минск: Выш. шк., 2000.
4. Гурский, Е.И. Основы линейной алгебры и аналитической геометрии. – Минск: Выш. школа, 1982.
5. Сборник задач и упражнений по высшей математике: Общий курс: учеб. пособие /А.В. Кузнецов, Д.С. Кузнецова, Е.И. Шилкина и др. –Минск: Выш. шк., 1994.
6. Индивидуальные задания по высшей математике: Линейная и векторная алгебра. Аналитическая геометрия. Дифференциальное исчисление функций одной переменной: Учеб. пособие /А.П. Рябушко, В.В. Бархатов, В.В. Державец, И.Е. Юруть; под общ. ред. А.П. Рябушко. – Минск: Выш. шк., 2000.
7. Сборник индивидуальных заданий по высшей математике: учебное пособие. В 3 частях. Часть 1-я (А.П. Рябушко, В.В. Бархатов, В.В. Державец, И.Е. Юруть под ред. А.П. Рябушко). –Минск: Выш. шк., 1990.
8. Сухая, Т.А., Бубнов, В.Ф. Задачи по высшей математике: учебное пособие. В 2 частях Ч.1.–Минск. Высш. школа, 1993.
9. Индивидуальные задания по высшей математике: Линейная и векторная алгебра. Аналитическая геометрия. Дифференциальное исчисление

функций одной переменной: учебное пособие. Часть 1-я /А.П. Рябушко, В.В. Бархатов, В.В. Державец, И.Е. Юруть; под общ. ред. А.П. Рябушко. – Минск: Выш. шк., 2007.

Редактор Т.Л. Матеуш
Технический редактор А.А. Щербакова

Подписано в печать 29.05.08. Формат 60x84 1/16.
Бумага офсетная. Гарнитура Таймс. Печать трафаретная.
Усл.печ.л.2.09. Уч.-изд.л. 2.25.
Тираж 63 экз. Заказ 103.

Учреждение образования
«Могилевский государственный университет продовольствия».
212027, Могилев, пр-т Шмидта, 3.
ЛИ № 02330/0131913 от 08.02.2007.

Отпечатано на ризографе редакционно-издательского отдела
учреждения образования
«Могилевский государственный университет продовольствия».
212027, Могилев, пр-т Шмидта, 3.
ЛП № 226 от 12.02.2003.