

Министерство образования республики Беларусь

Учреждение образования

«МОГИЛЕВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ПРОДОВОЛЬСТВИЯ»

Подольн С.В., Юрченко И.В.

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

ОПЕРАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ И ЕГО ПРИМЕНЕНИЕ

Учебно-методическое пособие

для студентов специальности 1-53 01 01

Могилёв 2009

УДК 519.21 517

Учебно-методическое пособие
рассмотрено и рекомендовано
к изданию на заседании кафедры
высшей математики
Протокол № 5 от 25.11.2008 г.
УМСС по специальности АТПП
Протокол № 2 от 17.11.2008 г.
Научно-методическим Советом университета
Протокол № 4 от 02.12.2008 г.

Составители:

Подолян С.В., Юрченко И.В.

Рецензенты:

к.т.н., ст.преп. кафедры АТПП Волынская Е.Л.,
д.ф.-м.н., профессор УО «МГУ им. А.А.Кулешова» Жестков С.В.

Подолян С.В., Юрченко И.В.

Операционное исчисление и его применение: Учебно-методическое пособие: теоретические сведения, решения задач и задания для самостоятельного выполнения по вопросам темы «Операционное исчисление и его применение» учебной дисциплины «Высшая математика» для студентов специальности 1-53 01 01 дневной и заочной форм обучения. – Могилев: УО МГУП, 2009.– 56 с.

В учебно-методическом пособии изложены теоретические сведения по теме «Операционное исчисление и его применение». Подробно разобраны решения задач, иллюстрирующих применение основных теорем операционного исчисления. Приведены примеры применения операционного метода к решению обыкновенных линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами и заданными начальными условиями и их систем; простейших уравнений математической физики; задач электротехники; задач ТАУ. Включены практические задания для самостоятельного выполнения и ответы к ним.

© УДК Учреждение образования
«Могилевский государственный
университет продовольствия», 2009

Содержание

Введение.....	4
Глава 1. Преобразование Лапласа	
§ 1.1. Оригинал.....	4
§ 1.2. Определение преобразователя Лапласа. Изображение функции.....	6
§ 1.3. Свойства преобразования Лапласа.....	10
§ 1.4. Основные способы нахождения оригиналов по их изображениям.....	20
Ответы к упражнениям для самостоятельного решения.....	27
Глава 2. Применение операционного исчисления	
§ 2.1. Применение операционного исчисления к решению линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами и непрерывной правой частью.....	28
§ 2.2. Изображение разрывных функций.....	35
§ 2.3. Применение операционного исчисления к решению линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами и разрывной правой частью.....	41
§ 2.4. Применение операционного исчисления к решению задач электротехники.....	46
Ответы к упражнениям для самостоятельного решения.....	52
Приложение А	53
Литература.....	55

ВВЕДЕНИЕ

Операционное или так называемое символическое исчисление возникло в конце XIX века. Автор исчисления английский инженер-электрик О.Хевисайд (1850-1925) изложил его в виде ряда формальных правил без глубокого математического обоснования. В 20-х годах двадцатого столетия было установлено, что в основе операционного исчисления лежат интегральные преобразования – одно из наиболее мощных и широко используемых математических средств решения различных прикладных задач. Суть операционного исчисления состоит в том, что исследование функции $f(x)$ заменяется исследованием её интегрального преобразования Лапласа. При этом, как правило, сложные уравнения для $f(x)$ превращаются в простые соотношения для её интегрального преобразования. Например, аналитические действия интегрирования и дифференцирования заменяются совокупностью алгебраических операций, что в значительной мере упрощает исследуемую задачу.

В связи с этим операционное исчисление нашло многостороннее и плодотворное использование в прикладной математике, физике, электро- и радиотехнике и в других инженерных дисциплинах.

ГЛАВА 1. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ЛАПЛАСА

§ 1.1 Оригинал

Определение 1.1.1. Любая комплексная функция $f(t)$ действительного переменного t называется *оригиналом*, если она удовлетворяет следующим условиям:

1) $f(t)$ – кусочно-непрерывная при $t \geq 0$, это значит, что она либо непрерывна, либо в каждом конечном интервале имеет лишь конечное число точек разрыва 1-го рода;

2) $f(t) \equiv 0$ при $t < 0$;

3) при $t \rightarrow \infty$ функция $f(t)$ растёт не быстрее некоторой показательной функции (имеет ограниченную степень роста), т.е. существует такое положительное число M и такое неотрицательное число s , что для всех $t \geq 0$ выполняется неравенство:

$$|f(t)| \leq M \cdot e^{st}, \quad M > 0, \quad s \geq 0. \quad (1.1.1)$$

Определение 1.1.2. Точная нижняя грань $s_0 \geq 0$ тех значений $s \geq 0$, для которых выполняется неравенство (1.1), называется *показателем роста* функции $f(t)$.

Замечание 1.1.1. Если точка $t = 0$ является точкой разрыва 1-го рода оригинала $f(t)$, то за $f(0)$ принимается предел функции $f(t)$ при $t \rightarrow 0$ справа, т.е.

$$f(0) = \lim_{t \rightarrow +0} f(t).$$

Замечание 1.1.2. Условию (1.1.1) удовлетворяют все ограниченные функции и в частности $f(t) = C$, где $C = const$. Для них $s_0 = 0$, так как $|f(t)| \leq M$. Условию (1.1.1) удовлетворяют все степенные функции $f(t) = t^z$ ($z = \alpha \pm \beta i$, $\alpha > 0$), так как мо-

доль любой такой функции растёт медленнее, чем показательная функция $e^{\varepsilon t}$, ε – сколь угодно малое положительное число. Для них $s_0 = 0$. Действительно,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{|t^z|}{e^{\varepsilon t}} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t^\alpha}{e^{\varepsilon t}} = 0, |t^z| < Me^{\varepsilon t}, 0 \leq t < \infty.$$

Если $Re z = \alpha < 0$ функция t^z имеет бесконечный разрыв при $t = 0$, не удовлетворяет условию (1.1.1) и не является оригиналом.

Замечание 1.1.3. При изучении многих физических процессов роль переменной t играет время, путь, скорость и т.п. Поэтому второе условие определения 1.1.1 не имеет большого значения для практических задач.

В дальнейшем, если речь идёт о какой-либо функции-оригинале $f(t)$, например, $\sin t$, e^t , t^2 то всегда подразумевается следующее:

$$f_1(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ \sin t, & t > 0, \end{cases} \quad f_2(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ e^t, & t > 0. \end{cases}$$

Функция $f_1(t)$ непрерывна в точке $t = 0$, если $f_1(0) = 0$, но для её графика эта точка является угловой точкой. Функции $f_2(t)$ при $t = 0$ имеет разрыв 1-го рода. Для сокращения же записи будем писать:

$$f_1(t) = \sin t, f_2(t) = e^t.$$

Пример 1.1.1. Определить, будут ли являться оригиналами следующие функции:

$$f_1(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ \cos t, & t > 0, \end{cases} \quad f_2(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ \frac{1}{t-1}, & t > 0. \end{cases}$$

Решение. Рассмотрим функции $f_1(t)$ и $f_2(t)$. Графики этих функций приведены на рисунке 1.

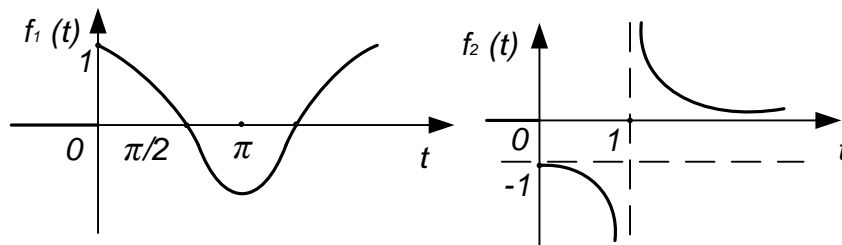


Рисунок 1

Функции $f_1(t)$ и $f_2(t)$ имеют в точке $t = 0$ разрыв 1-го рода. Примем

$$f_1(0) = \lim_{t \rightarrow +0} \cos t = 1; \quad f_2(0) = \lim_{t \rightarrow +0} \frac{1}{t-1} = -1.$$

Функция $f_1(t) = \cos t$ при всех $t > 0$ является непрерывной и ограниченной, следовательно, является оригиналом.

Функция $f_2(t) = \frac{1}{t-1}$, имеет разрыв 2-го рода в точке $t = 1$, является неограниченной и для неё не выполняется первое условие определения 1.1.1. Следовательно, функция $f_2(t)$ не является оригиналом.

Свойства оригиналов

1. Если $f(t)$ – оригинал, то $|f(t)|$ является оригиналом с тем же показателем роста.

2. Если $f_1(t), f_2(t), \dots, f_n(t)$ – оригиналы с показателями роста $s_0^{(1)}, s_0^{(2)}, \dots, s_0^{(n)}$, то функция $f(t) = c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t) + \dots + c_n f_n(t)$, где c_1, c_2, \dots, c_n – постоянные (действительные или комплексные), является оригиналом с показателем роста, равным наибольшему из чисел $s_0^{(1)}, s_0^{(2)}, \dots, s_0^{(n)}$.

3. Если $f(t)$ – оригинал с показателем роста s_0 , то являются оригиналами функции:

а) $f_1(t) = f(\alpha t)$ ($\alpha > 0$), показатель роста $\alpha \cdot s_0$;

б) $f_2(t) = e^{\lambda t} f(t)$ (λ – действительное или комплексное число), показатель роста равен $s_0 + \operatorname{Re} \lambda$, если $s_0 + \operatorname{Re} \lambda > 0$ и равен нулю, если $s_0 + \operatorname{Re} \lambda < 0$;

в) $f_3(t) = \begin{cases} 0, & t < \tau \ (\tau > 0), \\ f(t - \tau), & t \geq \tau, \end{cases}$ показатель роста равен s_0 ;

д) $f_4(t) = t^z \cdot f(t)$ (z – действительное или комплексное число), показатель роста равен s_0 .

4. Если $f(t)$ – оригинал с показателем роста s_0 , то функция

$$g(t) = \int_0^t f(\tau) d\tau$$

на интервале $0 \leq t < \infty$ является непрерывным оригиналом с показателем роста s_0 .

§ 1.2 Определение преобразования Лапласа. Изображение функции

Пусть $f(t)$ – комплексная функция действительного переменного t , определённая на интервале $-\infty < t < +\infty$ и $p = s + i\sigma$ – комплексная переменная из некоторой области D .

Рассмотрим несобственный интеграл

$$\int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt,$$

зависящий от комплексного переменного параметра p . Этот интеграл называется *интегралом Лапласа* от функции $f(t)$.

Теорема 1.2.1. Пусть функция $f(t)$ является оригиналом с показателем роста s_0 . Тогда интеграл Лапласа

$$F(p) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt \quad (1.2.1)$$

сходится абсолютно для всех значений комплексной переменной p , удовлетворяющей условию $Re p > s_0$ (т.е. в полуплоскости $Re p > s_0$), и определяет функцию $F(p)$, которая является аналитической в полуплоскости $Re p > s$.

Определение 1.2.2. Функцию

$$F(p) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt$$

называют *изображением* (по Лапласу) функции $f(t)$ в полуплоскости $Re p > s_0$.

Определение 1.2.3. Преобразование, относящее оригиналу $f(t)$ его изображение $F(p)$, называется *преобразованием Лапласа* функции $f(t)$.

Связь между функциями $f(t)$ и $F(p)$ осуществляется по формуле (1.2.1) и записывается символически следующим образом:

$$f(t) \leftrightarrow F(p) \text{ или } F(p) \leftrightarrow f(t).$$

Первую запись следует читать так: «Оригинал $f(t)$ имеет изображение $F(p)$ ». Вторую запись следует читать так: «Изображение $F(p)$ имеет оригинал $f(t)$ » или « $f(t)$ является оригиналом изображения $F(p)$ ». Используются также и другие записи:

1. $F(p) = L\{f(t)\}$ или $f(t) = L^{-1}\{F(p)\}$;
2. $f(t)] F(p)$ или $F(p) [f(t)$;
3. $f(t) \leftarrow \circ F(p)$ или $F(p) \circ \rightarrow f(t)$.

Пример 1.2.1. В качестве примера рассмотрим единичную функцию (единичную функцию Хевисайда) и найдем её изображение.

Решение. *Единичной* функцией называется функция вида

$$\sigma_0(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ 1, & t > 0. \end{cases}$$

График этой функции изображён на рисунке 2.

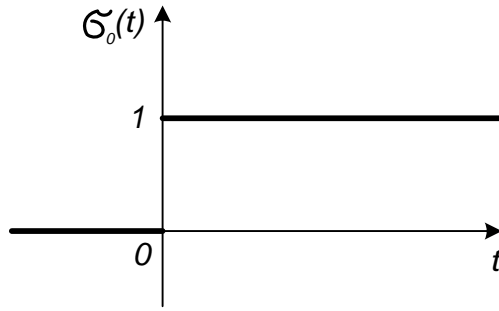


Рисунок 2

Единичная функция является оригиналом. Найдем её изображение. По определению изображения имеем

$$F(p) = \int_0^{\infty} \sigma_0(\tau) e^{-p\tau} d\tau = \int_0^{\infty} e^{-p\tau} d\tau = \lim_{t \rightarrow \infty} -\frac{1}{p} e^{-p\tau} \Big|_0^t = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(-\frac{e^{-pt}}{p} \right) + \frac{1}{p}.$$

Отсюда видим, что существование изображения функции зависит от существования конечного предела

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left(-\frac{e^{-pt}}{p} \right) = -\frac{1}{p} \lim_{t \rightarrow \infty} e^{-pt}.$$

Рассмотрим $|e^{-pt}|$. Учитывая, что $p = s + i\sigma$, имеем:

$$\begin{aligned} |e^{-pt}| &= |e^{-t(s+i\sigma)}| = |e^{-ts} \cdot e^{-\sigma ti}| = e^{-ts} \cdot |e^{-\sigma ti}| = e^{-ts} \cdot |\cos \sigma t - i \sin \sigma t| = \\ &= e^{-ts} \cdot \sqrt{\cos^2 \sigma t + \sin^2 \sigma t} = e^{-ts} \end{aligned}$$

(здесь мы использовали формулу Эйлера $e^{-\sigma ti} = \cos \sigma t - i \sin \sigma t$ и определение модуля комплексного числа).

Далее рассмотрим два случая.

1. Пусть $s < 0$, тогда $(-s > 0)$, значит

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |e^{-pt}| = \lim_{t \rightarrow \infty} |e^{-ts}| = \infty.$$

Геометрически это означает, что длина вектора, соответствующего комплексному числу e^{-pt} , неограниченно возрастает при $t \rightarrow \infty$, и конечный предел не существует.

2. Пусть $s > 0$, тогда $(-s < 0)$, значит

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |e^{-pt}| = \lim_{t \rightarrow \infty} |e^{-ts}| = 0.$$

Тогда получим

$$-\frac{1}{p} \lim_{t \rightarrow \infty} e^{-pt} = 0.$$

Из приведенных рассуждений можно сделать вывод: изображение единичной функции существует только тогда, когда $Re p > 0$, то есть $s > 0$. При этом

$$F(p) = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(-\frac{e^{-pt}}{p} \right) + \frac{1}{p} = \frac{1}{p}.$$

Итак,

$$\sigma_0(t) \leftrightarrow \frac{1}{p}, \text{ если } Re p > 0.$$

Пример 1.2.2. Найти изображение показательной функции e^t .

Решение. Непосредственным вычислением находим:

$$\begin{aligned} F(p) &= \int_0^{\infty} e^{-pt} e^t dt = \int_0^{\infty} e^{-(p-1)t} dt = - \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{e^{-(p-1)t}}{p-1} \Big|_0^{\infty} = \\ &= - \frac{1}{p-1} \lim_{t \rightarrow \infty} e^{-(p-1)t} + \frac{1}{p-1}. \end{aligned}$$

В силу тех же рассуждений, что и в примере 1.2.1, находим

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-(p-1)t} = 0, \text{ если } Re(p-1) > 0, \text{ т.е. } Re p > 1.$$

Тогда
$$e^t \leftrightarrow \frac{1}{p-1}, Re p > 1.$$

Упражнения для самостоятельного решения

1. Определить, будут ли являться оригиналами следующие функции:

а) $f(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ tg t, & t \geq 0; \end{cases}$ б) $f(t) = t^t$, где t – действительное число.

2. Используя определение преобразования Лапласа, найти изображения функций:

а) $f(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ 1, & 0 \leq t \leq 1, \\ 0, & t > 1; \end{cases}$ б) $\cos t$; в) $sh t$.

§1.3 Свойства преобразования Лапласа

Сформулируем (без доказательства) ряд теорем, которые устанавливают основные свойства и правила преобразования Лапласа (или основные свойства и правила операционного исчисления). На основании этих свойств и используя таблицу соответствия между оригиналами и их изображениями будем осуществлять переход от оригинала к изображению и обратно – от изображения к оригиналу.

Оригиналы будем обозначать $f(t)$, $\varphi(t)$ и т.д., а их изображения будем обозначать соответственно через $F(p)$, $\Phi(p), \dots$, т.е.

$$f(t) \leftrightarrow F(p), \varphi(t) \leftrightarrow \Phi(p), \dots$$

Теорема единственности. Оригинал $f(t)$ вполне определяется своим изображением $F(p)$ с точностью до значений в точках разрыва функции $f(t)$.

Иными словами, если два изображения $F(p)$ и $\Phi(p)$ совпадают, то совпадают между собой и соответствующие им оригиналы во всех точках, за исключением, быть может, точек разрыва. То есть, если

$$F(p) \leftrightarrow f(t), \Phi(p) \leftrightarrow \varphi(t) \text{ и } F(p) \equiv \Phi(p), \text{ то } f(t) \equiv \varphi(t)$$

во всех точках непрерывности $f(t)$.

Из теоремы следует, что изображение $F(p) \neq 0$ не может быть периодической функцией.

Из теоремы также следует, что функции вида $F(p) = c$ ($c \neq 0$), $e^{\lambda p}$, λ – любое комплексное число, $\sin p$, $\cos p$, $ch p$, $sh p$ не могут быть изображениями.

Эта теорема играет важную роль для приложений. Действительно, если при решении задачи каким-то образом найдено изображение, то соответствующий этому изображению оригинал является решением поставленной задачи.

Теорема линейности. Если $f(t) \leftrightarrow F(p)$, $g(t) \leftrightarrow G(p)$ для любых действительных или комплексных постоянных c_1 и c_2

$$c_1 f(t) + c_2 g(t) \leftrightarrow c_1 F(p) + c_2 G(p), \quad \operatorname{Re} p > s_0^{(k)} (k = 1, 2,)$$

т.е. линейной комбинации оригиналов соответствует такая же линейная комбинация изображений.

Теорема может быть обобщена на любое конечное число слагаемых. Если

$$f_k(t) \leftrightarrow F_k(p), k = 1, 2, \dots, n, \text{ то } \sum_{k=1}^n c_k f_k(t) \leftrightarrow \sum_{k=1}^n c_k F_k(p), \operatorname{Re} p > \max\{s_0^{(k)}\},$$

где $c_k, k = 1, 2, \dots, n$, действительные или комплексные числа.

В качестве примеров применения этой теоремы найдём изображения следующих функций:

$$\text{а) } f(t) = \cos t, \quad \text{б) } f(t) = b \sin t + 2 \cos t$$

$$\text{а) по формуле Эйлера } \cos t = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2} \text{ или } \frac{e^{it} + e^{-it}}{2} = \frac{1}{2} e^{it} + \frac{1}{2} e^{-it}.$$

Так как $e^{it} \leftrightarrow \frac{1}{p-i}$, $e^{-it} \leftrightarrow \frac{1}{p+i}$, то, применяя теорему линейности, получим

$$\frac{1}{2}e^{it} + \frac{1}{2}e^{-it} \leftrightarrow \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{p-i} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{p+i} = \frac{p}{p^2+1}.$$

б) Так как $\sin t \leftrightarrow \frac{1}{p^2+1}$, $\cos t \leftrightarrow \frac{p}{p^2+1}$, то, применяя теорему линейности,

получим

$$f(t) = 6\sin t + 2\cos t \leftrightarrow 6 \cdot \frac{1}{p^2+1} + 2 \cdot \frac{p}{p^2+1},$$

тогда

$$f(t) \leftrightarrow \frac{6+2p}{p^2+1}.$$

Теорема подобия. Если $f(t) \leftrightarrow F(p)$, $\operatorname{Re} p > s_0$, то для любого числа $a > 0$

$$f(at) \leftrightarrow \frac{1}{a} F\left(\frac{p}{a}\right), \operatorname{Re} p > as_0,$$

т.е. умножение аргумента оригинала на положительное число приводит к делению аргумента изображения и самого изображения на то же число a .

В качестве примера найдем изображение функции $f(t) = ch 2t$.

$$\text{Зная, что } ch 2t \leftrightarrow \frac{p}{p^2-1},$$

на основании теоремы подобия при $a = 2$ получим:

$$f(t) = ch 2t \leftrightarrow \frac{1}{2} \frac{\frac{p}{2}}{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - 1} = \frac{1}{4} \frac{p}{\frac{p^2-4}{4}} = \frac{p}{p^2-4};$$

$$ch 2t \leftrightarrow \frac{p}{p^2-4}.$$

Теорема запаздывания. Если $f(t) \leftrightarrow F(p)$, $\operatorname{Re} p > s_0$, то для любого положительного числа τ

$$f(t-\tau) \leftrightarrow e^{-p\tau} F(p), \operatorname{Re} p > s_0.$$

Теорема запаздывания неоднократно будет применяться нами в дальнейшем при решении задач. На этой теореме основано изображение многих функций, например, описывающих импульсные процессы. Выясним смысл термина "запаздывание". Изобразим на графике функции $f(t)$ и $f(t-\tau)$ – рисунок 3.

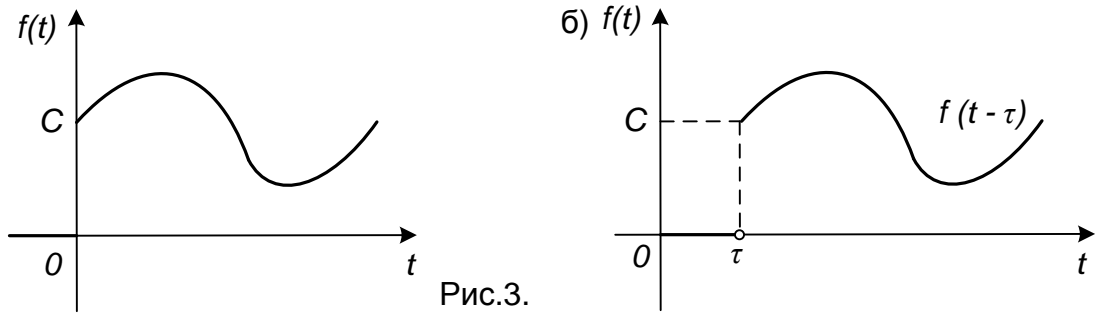


Рис.3.

Рисунок 3

График функции $f(t - \tau)$ сдвинут относительно графика функции $f(t)$ на τ единиц вправо. На участке $(0, \tau)$ график совпадает с осью Ox , так как на этом участке $(t - \tau) < 0$ и функция $f(t - \tau) = 0$. Процесс, описываемый функцией $f(t - \tau)$, начинается как бы с опозданием на время τ относительно процесса, описываемого функцией $f(t)$. Запаздывание оригинала на время τ соответствует умножению изображения на $e^{-p\tau}$.

Найдем изображение функции $f(t) = \cos(t - 8)$, используя теорему запаздывания.

Зная, что

$$\cos t \leftrightarrow \frac{p}{p^2 + 1},$$

на основании теоремы получим:

$$\cos(t - 8) \leftrightarrow e^{-8p} \cdot \frac{p}{p^2 + 1}.$$

В качестве примера применения этой теоремы рассмотрим изображение периодических функций.

Пусть $f(t)$ – периодическая функция с периодом T , т.е. $f(t - T) = f(t)$, тогда она может быть представлена в виде сходящегося ряда

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} f_0(t - kT),$$

где

$$f_0(t) = \begin{cases} f(t), & 0 < t < T_0, \\ 0, & t < 0, t > T_0, \end{cases}$$

где T_0 – нулевой период функции $f(t)$.

Если $f_0(t) \leftrightarrow F_0(p)$, $F_0(p)$ – изображение функции $f(t)$ на нулевом периоде, то на основании теоремы запаздывания получаем:

$$\begin{aligned} f_0(t - T) &\leftrightarrow e^{-pT} F_0(p), \\ f_0(t - 2T) &\leftrightarrow e^{-2pT} F_0(p), \\ f_0(t - kT) &\leftrightarrow e^{-kpT} F_0(p). \end{aligned}$$

Тогда при p таких, что $\operatorname{Re} p > s_0$:

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} f_0(t - kT) \leftrightarrow \sum_{k=0}^{\infty} e^{-kpT} F_0(p) = F_0(p) \sum_{k=0}^{\infty} e^{-kpT} \leftrightarrow F_0(p) \frac{1}{1 - e^{-pT}}.$$

Итак, изображение T периодической функции:

$$f(t) \leftrightarrow \frac{F_0(p)}{1 - e^{-pT}}.$$

Пример 1.3.1. Найдём изображение функции $f(t) = |\cos t|$, $0 < t < \infty$ (рис.4).

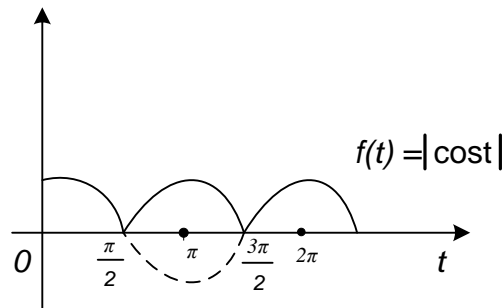


Рисунок 4

Решение. Функция $f(t) = |\cos t|$ периодическая с периодом π . Рассмотрим функцию $f_0(t)$:

$$f_0(t) = \begin{cases} |\cos t|, & 0 < t < \pi, \\ 0, & t < 0, t > \pi, \end{cases}$$

тогда

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} f_0(t - k\pi).$$

Найдём изображение функции $f_0(t)$:

$$\begin{aligned} f_0(t) \leftrightarrow F_0(p) &= \int_0^{\pi} |\cos t| e^{-pt} dt = \int_0^{\pi/2} \cos t e^{-pt} dt - \int_{\pi/2}^{\pi} \cos t e^{-pt} dt = \\ &= \frac{1}{p^2 + 1} (2e^{-p\pi/2} + p(1 - e^{-p\pi})) \end{aligned}$$

(самостоятельно вычислить интегралы путём интегрирования их по частям).

Далее, используя приведённую выше формулу для изображения периодической функции, получим:

$$f(t) = |\cos t| \leftrightarrow \frac{F_0(p)}{1 - e^{-p\pi}} = \frac{2e^{-\frac{p\pi}{2}} + p(1 - e^{-p\pi})}{(p^2 + 1)(1 - e^{-p\pi})}.$$

Теорема о смещении изображения (затухания). Если $f(t) \leftrightarrow F(p)$, $\operatorname{Re} p > s_0$, то для любого действительного или комплексного числа α

$$e^{\alpha t} f(t) \leftrightarrow F(p - \alpha), \operatorname{Re} (p - \alpha) > s_0,$$

т.е. умножение оригинала на функцию $e^{\alpha t}$, влечёт за собой «смещение» переменной p .

Теорема позволяет по известному изображению функции достаточно легко находить изображение функции $e^{\alpha t} f(t)$, что позволяет расширить таблицы соответствия.

Например, известно, что

$$\sin \omega t \leftrightarrow \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}.$$

Тогда

$$e^{\alpha t} \sin \omega t \leftrightarrow \frac{\omega}{(p - \alpha)^2 + \omega^2}, \operatorname{Re} p > \operatorname{Re} \alpha + |\operatorname{Im} \omega|.$$

1.3.7. Теорема опережения. Если $f(t) \leftrightarrow F(p)$, $\operatorname{Re} p > s_0$, то для любого постоянного положительного τ

$$f(t + \tau) \leftrightarrow e^{p\tau} [F(p) - \int_0^{\tau} f(t) e^{-pt} dt], \operatorname{Re} p > s_0.$$

Изобразим графики функций $f(t)$ и $f(t + \tau)$ – рисунок 5.

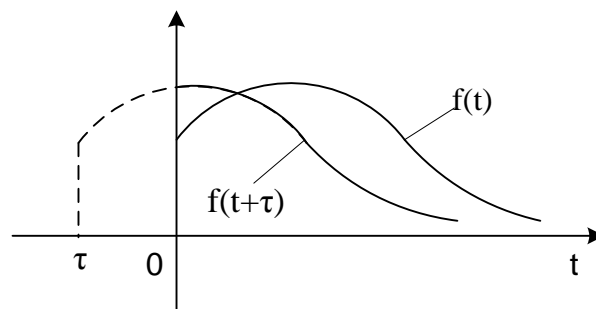


Рисунок 5

Ординаты пунктирной части графика $f(t + \tau)$ должны быть заменены нулём, график $f(t + \tau)$ «срезается». В силу этого в формуле из $F(p)$ вычитается интеграл в конечных пределах.

Рассмотрим функцию

$$f(t) = C [\sigma_0(t) + \sigma_0(t - \tau) + \sigma_0(t - 2\tau) + \dots + \sigma_0(t - n\tau) + \dots],$$

которая характеризует бесконечный ступенчатый ход ($C = const, C > 0$) – рисунок 6.

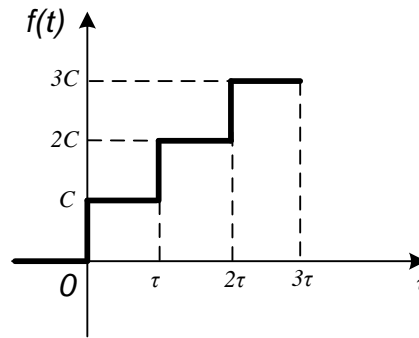


Рисунок 6

Найдем изображение этой функции.

Так как $\sigma_0(t) \leftrightarrow \frac{1}{p}$, по теореме запаздывания найдем

$$\begin{aligned} \sigma_0(t - \tau) &\leftrightarrow e^{-p\tau} \frac{1}{p}, \\ \sigma_0(t - 2\tau) &\leftrightarrow e^{-2p\tau} \frac{1}{p}, \\ &\dots \\ \sigma_0(t - n\tau) &\leftrightarrow e^{-np\tau} \frac{1}{p}. \end{aligned}$$

Значит,

$$f(t) \leftrightarrow \frac{C}{p} [1 + e^{-p\tau} + e^{-2p\tau} + \dots + e^{-np\tau} + \dots] = \frac{C}{p} \cdot \frac{1}{1 - e^{-p\tau}}.$$

На основании теоремы запаздывания построим изображение кусочно-непрерывной функции общего вида

$$f(t) = \begin{cases} 0 & n\pi & t < t_1, \\ g(t) & n\pi & t_1 < t < t_2 \\ 0 & n\pi & t > t_2. \end{cases}$$

Обозначим изображение функции $g(t)$ через $G(p)$, изображение смещенной функции $g(t + \tau)$, $\tau > 0$ через $G_\tau(p)$. Так как $t^n \leftrightarrow \frac{n!}{p^{n+1}}$, то

$$(t - a)^2 \leftrightarrow e^{-ap} \cdot \frac{2!}{p^3}.$$

Значит,

$$e^{-t_1 p} G_{t_1}(p) \leftrightarrow \begin{cases} 0 & \text{при } t < t_1, \\ g(t + t_1 - t_1) & \text{при } t > t_1, \end{cases}$$

$$e^{-t_2 p} G_{t_2}(p) \leftrightarrow \begin{cases} 0 & \text{при } t < t_2, \\ g(t + t_2 - t_2) & \text{при } t > t_2. \end{cases}$$

Тогда

$$e^{-t_1 p} G_{t_1}(p) - e^{-t_2 p} G_{t_2}(p) \leftrightarrow f(t).$$

Следовательно, изображение кусочно-непрерывной функции $f(t)$ общего вида определяется выражением

$$F(p) = e^{-t_1 p} G_{t_1}(p) - e^{-t_2 p} G_{t_2}(p) \leftrightarrow f(t).$$

Заметим, что по теореме опережения

$$g(t + \tau) \leftrightarrow e^{p\tau} [G(p) - \int_0^{\tau} g(t) e^{-pt} dt] = G_{\tau}(p).$$

Теорема о дифференцировании по параметру. Если при любом значении x оригиналу $f(t, x)$ соответствует изображение $F(p, x)$, то

$$\frac{\partial f(t, x)}{\partial x} \leftrightarrow \frac{\partial F(p, x)}{\partial x}.$$

Рассмотрим на примере, как применяется эта теорема.

Известно, что

$$e^{\alpha t} \leftrightarrow \frac{1}{p - \alpha}, \text{ где } \alpha - \text{параметр.}$$

Дифференцируя правую и левую части соотношения по параметру α , получим

$$t e^{\alpha t} \leftrightarrow \frac{1}{(p - \alpha)^2}.$$

Повторяя n раз дифференцирование, найдем

$$t^n e^{\alpha t} \leftrightarrow \frac{n!}{(p - \alpha)^{n+1}}$$

(здесь n – целое положительное число).

Теорема дифференцирования оригинала. Если $f'(t)$ оригинал и $f(t) \leftrightarrow F(p)$, то

$$f'(t) \leftrightarrow pF(p) - f(0),$$

т.е. дифференцирование оригинала сводится к умножению на p его изображения и вычитанию $f(0)$.

Если функция n раз дифференцируемая и все её производные являются при этом оригиналами, то применяя теорему n раз, найдём

$$f'(t) \leftrightarrow pF(p) - f(0),$$

$$f''(t) \leftrightarrow p^2F(p) - pf(0) - f'(0),$$

...

$$f^{(n)}(t) \leftrightarrow p^n F(p) - p^{n-1}f(0) - p^{n-2}f'(0) - \dots - pf^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0).$$

При нулевых начальных значениях n -кратное дифференцирование оригинала сводится к умножению на p^n его изображения, т.е.

$$f'(t) \leftrightarrow pF(p), f''(t) \leftrightarrow p^2F(p), \dots, f^{(n)}(t) \leftrightarrow p^n F(p).$$

Пример 1.3.2. Найти изображение производной для функции $f(t) = e^{\alpha t}$.

Решение. Обозначим через $F(p)$ изображение функции $f(t) = e^{\alpha t}$.

$$e^{\alpha t} \leftrightarrow F(p), F(p) = \frac{1}{p - \alpha}.$$

Подставляя в формулу

$$f'(t) \leftrightarrow pF(p) - f(0)$$

найденное значение, получим

$$f'(t) \leftrightarrow p \frac{1}{p - \alpha} - e^{\alpha t} \Big|_{t=0} = \frac{p}{p - \alpha} - 1 = \frac{\alpha}{p - \alpha},$$

$$\alpha e^{\alpha t} \leftrightarrow \frac{\alpha}{p - \alpha}.$$

Пример 1.3.3. Используя изображение функции $\sin \alpha t$, найти изображение функции $\cos \alpha t$.

Решение. Как известно, $\cos \alpha t = \frac{1}{\alpha} (\sin \alpha t)'$. Так как

$$\sin \alpha t \leftrightarrow \frac{\alpha}{p^2 + \alpha^2},$$

на основании теоремы находим изображение $(\sin \alpha t)'$:

$$(\sin \alpha t)' \leftrightarrow p \frac{\alpha}{p^2 + \alpha^2} - \sin \alpha t \Big|_{t=0} = \frac{p\alpha}{p^2 + \alpha^2}.$$

Значит,

$$\cos \alpha t = \frac{1}{\alpha} (\sin \alpha t)' \leftrightarrow \frac{1}{\alpha} \frac{p\alpha}{p^2 + \alpha^2} = \frac{p}{p^2 + \alpha^2}.$$

Таким образом, получили

$$\cos at \leftrightarrow \frac{p}{p^2 + a^2}.$$

Теорема об интегрировании оригинала. Если функция $f(t)$ является оригиналом и $f(t) \leftrightarrow F(p)$, то функция $g(t) = \int_0^t f(t) dt$ также является оригиналом (§ 1.1, свойство 4) и

$$g(t) \leftrightarrow \frac{1}{p} F(p),$$

т.е. интегрирование оригинала в пределах от 0 до t приводит к делению изображения на p .

Пример 1.3.4. Найти изображение функции t^n .

Решение. Так как $1 \leftrightarrow \frac{1}{p}$ и $t = \int_0^t 1 dt$,

то по теореме об интегрировании оригинала имеем

$$t = \int_0^t 1 dt \leftrightarrow \frac{1}{p} \cdot \frac{1}{p} = \frac{1}{p^2}, \text{ т.е. } t \leftrightarrow \frac{1}{p^2}.$$

Аналогично находим

$$t^2 = 2 \int_0^t t dt \leftrightarrow \frac{2}{p} \cdot \frac{1}{p^2} = \frac{2}{p^3}, \text{ т.е. } t^2 \leftrightarrow \frac{2}{p^3}.$$

Применяя последовательно n раз эту операцию, получим

$$t^n \leftrightarrow \frac{n!}{p^{n+1}}.$$

Теорема о дифференцировании изображения. Если

$$F(p) \leftrightarrow f(t), \text{ то } F'(p) \leftrightarrow -t f(t),$$

т.е. дифференцирование изображения сводится к умножению оригинала на $(-t)$.

Если функция $F(p)$ n раз дифференцируемая по параметру p , то

$$F^{(n)}(p) \leftrightarrow (-1)^n t^n f(t).$$

Пример 1.3.5. Найти изображение оригинала $t \cdot \text{ch } at$.

Решение. Известно, что $f(t) = \text{ch } at \leftrightarrow \frac{p}{p^2 - a^2} = F(p)$.

Найдём производную функции $F(p)$ по переменной p :

$$F'(p) = \left(\frac{p}{p^2 - a^2} \right)' = \frac{1 \cdot (p^2 - a^2) - p(p^2 - a^2)'}{(p^2 - a^2)^2} = \frac{p^2 - a^2 - 2p^2}{(p^2 - a^2)^2} =$$

$$= - \frac{p^2 + a^2}{(p^2 - a^2)^2}.$$

Согласно теореме $F'(p) \leftrightarrow -tf(t)$, значит $t \operatorname{ch} at \leftrightarrow \frac{p^2 + a^2}{(p^2 - a^2)^2}$.

Теорема об интегрировании изображения. Если $\frac{f(t)}{t}$ является оригиналом ($\operatorname{Re} p > s_0$) и $f(t) \leftrightarrow F(p)$, то

$$\frac{f(t)}{t} \leftrightarrow \int_p^\infty F(z) dz, \operatorname{Re} p > s_0,$$

т.е. интегрирование изображения в пределах от p до ∞ соответствует делению оригинала на t .

Пример 1.3.6. Найти изображение функции $\frac{\sin t}{t}$.

Решение. Известно, что $\sin t \leftrightarrow \frac{1}{p^2 + 1}$. Функция $\frac{\sin t}{t}$ является оригиналом.

Тогда по теореме об интегрировании изображения получим

$$\frac{\sin t}{t} \leftrightarrow \int_p^\infty \frac{dz}{z^2 + 1} = \operatorname{arctg} z \Big|_p^\infty = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} p.$$

Итак, $\frac{\sin t}{t} \leftrightarrow \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} p, \operatorname{Re} p > 0$.

Заметим, что теорему можно применять не к любой формуле $f(t) \leftrightarrow F(p)$. Например, к формуле $e^{\alpha t} \leftrightarrow \frac{1}{p - \alpha}$ ее применить нельзя. $\int_p^\infty \frac{dz}{z - \alpha}$ будет расходящимся, а функция $\frac{e^{\alpha t}}{t}$ имеет при $t = 0$ бесконечный разрыв и не является оригиналом.

На основании определения и правил преобразования Лапласа составлена таблица формул соответствия между оригиналами и изображениями. Мы приводим лишь основные формулы этой таблицы (см. приложение А).

В дальнейшем переход от оригинала к изображению и обратно от изображения к оригиналу будет осуществляться с помощью этой таблицы.

Упражнения для самостоятельного решения

1. Используя теорему линейности, найти изображения следующих функций:

а) $\frac{1}{2}(ch t + \cos t)$, б) $\frac{1}{2}(sh t + \sin t)$,

в) $\cos(2t + \pi)$.

2. Пользуясь теоремой подобия, найти изображения следующих функций:

а) e^{at} ; б) e^{-3t} ; в) $\cos \frac{3}{7}t$; г) $sh \pi t$.

3. Пользуясь теоремой запаздывания, найти изображения следующих функций:

а) $e^{(t-3)}$; б) $(t-2)^3$; в) $\cos(t - \frac{\pi}{2})$.

4. Используя теорему смещения, найти изображения следующих функций:

а) $e^t \sin t$; б) $e^{-3t} ch t$; в) $e^{2t} \cdot \cos 3t$; г) $t^3 e^{4t}$.

5. Найти изображения следующих функций, используя теорему дифференцирования изображения:

а) t^n ; б) $t \cdot \sin t$; в) $t \cdot e^t$.

6. Найти изображение следующих функций, используя теорему об интегрировании оригинала:

а) $f(t) = \int_0^t \sin \tau d\tau$; б) $f(t) = \int_0^t \frac{\sin \tau}{\tau} d\tau$.

§ 1.4 Основные способы нахождения оригиналов по их изображениям

При решении задач операционным методом на заключительном этапе вычислений по найденному изображению искомой функции требуется найти эту функцию. Операцию нахождения оригинала по известному изображению называют *обратным преобразованием Лапласа*. Обратное преобразование Лапласа основано на теореме обращения.

Теорема обращения. Если функция $f(t)$ является оригиналом, а $F(p)$ – её изображением, то в любой точке t , где оригинал $f(t)$ непрерывен, имеет место формула

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} F(p) e^{pt} dp, \quad (1.4.1)$$

где интегрирование производится по любой бесконечной прямой $Re p = \gamma$, лежащей в полуплоскости абсолютной сходимости интеграла Лапласа от функции $f(t)$.

Заметим, что проверить, является ли заданная функция оригиналом, достаточно легко. Нужно лишь проверить, выполняются ли три условия (см. § 1.1). Если же $F(p)$ – произвольно заданная аналитическая функция и нам неизвестно заранее, является ли она изображением, то проверить этот факт труднее. Вычисление оригинала (1.4.1) для произвольных аналитических функций $F(p)$ представляет большие трудности. Поэтому ограничимся лишь некоторыми частными случаями, имеющими, однако, важное значение для приложений. Будем предполагать, что $F(p)$ – функция, аналитическая во всей комплексной плоскости P , за исключением конечного числа точек, и удовлетворяет условию

$$\lim_{p \rightarrow \infty} F(p) = 0.$$

При этом предполагается, что в бесконечно удалённой точке функция $F(p)$ – аналитическая.

I способ. Нахождение оригинала непосредственно по таблице соответствий. Рассмотрим несколько примеров.

Пример 1.4.1. Требуется найти оригинал $f(t)$ по известному изображению

$$\frac{p^2 - 2^2}{(p^2 + 2^2)^2}.$$

Решение. Из таблицы А.1 по формуле №15, полагая $\omega = 2$, получим

$$\frac{p^2 - 2^2}{(p^2 + 2^2)^2} \leftrightarrow t \cos 2t; f(t) = t \cos 2t.$$

Пример 1.4.2. Пусть $F(p) = \frac{a + p}{p^2 + a^2}$. Найти $f(t)$.

Решение. В приведенной таблице не содержится оригинал, соответствующий данному изображению. Поступим следующим образом. Представим функцию $F(p)$ в виде суммы двух дробей:

$$\frac{a + p}{p^2 + a^2} = \frac{a}{p^2 + a^2} + \frac{p}{p^2 + a^2},$$

так как

$$\frac{a}{p^2 + a^2} \leftrightarrow \sin at, \quad \frac{p}{p^2 + a^2} \leftrightarrow \cos at,$$

то на основании теоремы линейности, находим:

$$\frac{a + p}{p^2 + a^2} = \frac{a}{p^2 + a^2} + \frac{p}{p^2 + a^2} \leftrightarrow \sin at + \cos at.$$

Пример 1.4.3. Пусть $F(p) = p^{-5}$. Найти $f(t)$.

Решение. Преобразуем функцию $F(p)$ следующим образом:

$$\frac{1}{4!} \cdot 4! \cdot p^{-5} = F(p).$$

$$\text{Тогда } F(p) = \frac{1}{4!} \cdot 4! \cdot p^{-5} = \frac{1}{4!} \cdot 4! \cdot p^{-4-1} \leftrightarrow \frac{1}{4!} t^4 = f(t).$$

II способ. В некоторых случаях, при нахождении оригинала, удобно использовать теоремы разложения.

Первая теорема разложения. Если функция $F(p)$ представляет собой степенной ряд по отрицательным степеням параметра p с ненулевым радиусом сходимости, то есть

$$F(p) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{p^{n+1}},$$

то оригиналом такой функции является степенной ряд по положительным степеням t

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{t^n}{n!},$$

сходящийся при всех $t > 0$:

$$F(p) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{p^{n+1}} \leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{t^n}{n!}.$$

Пример 1.4.4. Найти оригинал $f(t)$, если $F(p) = \ln \left(1 - \frac{1}{p}\right)$.

Решение. Используя известное разложение в степенной ряд функции

$$\ln(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} - \frac{t^4}{4} \dots,$$

получим

$$\ln\left(1 - \frac{1}{p}\right) = -\frac{1}{p} - \frac{1}{2p^2} - \dots - \frac{1}{np^n} - \dots = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{np^n}.$$

Этот ряд сходится при $|p| > 1$, что можно проверить по признаку Д'Аламбера. Тогда, в соответствии с первой теоремой разложения, получим

$$F(p) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{np^n} \leftrightarrow -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cdot \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^{n-1}}{n!} =$$

$$= -\frac{1}{t} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{t^n}{n!} + 1 - 1 \right) = \frac{1}{t} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} = \frac{1 - e^t}{t}.$$

Таким образом, получили $\ln \left(1 - \frac{1}{p} \right) \leftrightarrow \frac{1 - e^t}{t}$.

III способ. Использование второй теоремы разложения.

Вторая теорема разложения. Если $F(p) = \frac{P(p)}{Q(p)}$ – правильная рациональная дробь, знаменатель которой $Q(p)$ имеет лишь простые корни $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, то

$$F(p) = \frac{P(p)}{Q(p)} \leftrightarrow \sum_{k=1}^{\infty} A_k e^{\alpha_k t}, \quad (1.4.2)$$

где
$$A_k = \frac{P(\alpha_k)}{Q'(\alpha_k)}, \quad Q'(p) = \frac{dQ(p)}{dp}.$$

Пример 1.4.5. Пусть $F(p) = \frac{p+1}{p(p-1)(p-2)(p-3)}$. Найти $f(t)$.

Решение. $F(p)$ – правильная рациональная дробь. Её знаменатель

$$Q(p) = p(p-1)(p-2)(p-3)$$

имеет простые корни $p_1 = 0, p_2 = 1, p_3 = 2, p_4 = 3$, следовательно, можно применять вторую теорему разложения. Имеем $P(p) = p + 1$,

$$Q(p) = p(p-1)(p-2)(p-3) = p^4 - 6p^3 + 11p^2 - 6p,$$

$$Q'(p) = 4p^3 - 18p^2 + 22p - 6.$$

Тогда:

$$\frac{P(p_1)}{Q'(p_1)} = -\frac{1}{6}, \quad \frac{P(p_2)}{Q'(p_2)} = \frac{1+1}{4 \cdot 1 - 18 \cdot 1 + 22 \cdot 1 - 6} = \frac{2}{2} = 1,$$

$$\frac{P(p_3)}{Q'(p_3)} = \frac{2+1}{4 \cdot 2^3 - 18 \cdot 2^2 + 22 \cdot 2 - 6} = -\frac{3}{2},$$

$$\frac{P(p_4)}{Q'(p_4)} = \frac{3+1}{4 \cdot 3^3 - 18 \cdot 3^2 + 22 \cdot 3 - 6} = \frac{2}{3}.$$

Итак, согласно формуле (4.2):

$$f(t) = -\frac{1}{6} + e^t - \frac{3}{2} e^{2t} + \frac{2}{3} e^{3t}.$$

Пример 1.4.6. Пусть $F(p) = \frac{p-1}{(p+1)(p^2+4)}$. Найти $f(t)$.

Решение. $F(p)$ – правильная рациональная дробь, причём

$$P(p) = p - 1,$$

$$\begin{aligned} Q(p) &= (p + 1)(p^2 + 4) = (p + 1)(p^2 - (-4)) = (p + 1)(p^2 - (2i)^2) = \\ &= (p + 1)(p + 2i)(p - 2i) \text{ (здесь } i^2 = -1, (-4) = 4i^2 = (2i)^2). \end{aligned}$$

Корни знаменателя простые. Можно применить вторую теорему разложения. Найдём производную знаменателя $Q(p) = (p + 1)(p^2 + 4)$:

$$Q'(p) = ((p + 1)(p^2 + 4))' = (p^3 + p^2 + 4p + 4)' = 3p^2 + 2p + 4.$$

Тогда

$$f(t) = \frac{P(p_1)}{Q'(p_1)} e^{p_1 t} + \frac{P(p_2)}{Q'(p_2)} e^{p_2 t} + \frac{P(p_3)}{Q'(p_3)} e^{p_3 t},$$

$$\text{при } p_1 = -1, P(-1) = -2, Q'(-1) = 5,$$

$$\text{при } p_2 = -2i, P(-2i) = -2i - 1, Q'(-2i) = -8 - 4i,$$

$$\text{при } p_3 = 2i, P(2i) = 2i - 1, Q'(2i) = -8 + 4i.$$

Тогда

$$f(t) = -\frac{2}{5} e^{-t} + \frac{-2i-1}{-8-4i} e^{-2it} + \frac{2i-1}{-8+4i} e^{2it}.$$

Преобразуем полученное выражение: домножим числитель и знаменатель дроби

$$\frac{-2i-1}{-8-4i} = \frac{1+2i}{8+4i}$$

на выражение, сопряжённое знаменателю:

$$\frac{(1+2i)(8-4i)}{(8+4i)(8-4i)} = \frac{8+16i-4i-8i^2}{8^2-(4i)^2} = \frac{16+12i}{64-16i^2} = \frac{4+3i}{20}.$$

Аналогично преобразуем дробь $\frac{2i-1}{-8+4i}$:

$$\frac{1-2i}{8-4i} = \frac{(1-2i)(8+4i)}{(8-4i)(8+4i)} = \frac{8-16i+4i-8i^2}{8^2-(4i)^2} = \frac{16-12i}{64-16i^2} = \frac{4-3i}{20}.$$

Тогда $f(t)$ будет иметь вид:

$$\begin{aligned} f(t) &= -\frac{2}{5} e^{-t} + \frac{4}{20} e^{-2it} + \frac{3}{20} i e^{-2it} + \frac{4}{20} e^{2it} - \frac{3}{20} i e^{2it} = \\ &= -\frac{2}{5} e^{-t} + \frac{2}{20} (e^{-2it} + e^{2it}) + \frac{3}{20} (i e^{-2it} - i e^{2it}) = -\frac{2}{5} e^{-t} + \frac{2}{5} \frac{e^{2it} + e^{-2it}}{2} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{3}{20} \left(\frac{e^{-2it}i^2}{i} - \frac{e^{2it}i^2}{i} \right) = -\frac{2}{5}e^{-t} + \frac{2}{5} \frac{e^{2it} + e^{-2it}}{2} + \frac{3}{10} \frac{e^{2it} - e^{-2it}}{2i} = \\
& = -\frac{2}{5}e^{-t} + \frac{2}{5} \cos 2t + \frac{3}{10} \sin 2t.
\end{aligned}$$

Здесь воспользовались формулами Эйлера:

$$\sin t = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i}, \quad \cos t = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2}.$$

Замечание. Если знаменатель дроби $Q(p)$ имеет кратные корни, то при разложении функции $F(p)$ на простейшие дроби применяют метод неопределённых коэффициентов.

Пусть $Q(p)$ представляет собой многочлен, который можно разложить на множители:

$$Q(p) = (x - \alpha_1)^{k_1} \cdot (x - \alpha_2)^{k_2} \cdot \dots \cdot (x - \alpha_m)^{k_m} (x^2 + p_1x + q_1)^{t_1} \cdot \dots \cdot (x^2 + p_sx + q_s)^{t_s},$$

где $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ – действительные корни многочлена $Q(p)$ кратностей k_1, k_2, \dots, k_m соответственно; числа t_1, t_2, \dots, t_s – целые неотрицательные; трёхчлены $(x^2 + p_1x + q_1)^{t_1}, \dots, (x^2 + p_sx + q_s)^{t_s}$ не имеют действительных корней. Тогда рациональную дробь $\frac{P(p)}{Q(p)}$ можно разложить на сумму простейших дробей, причём в

данном разложении множителю вида $(x - \alpha_r)^{k_r}$ многочлена $Q(p)$ соответствует сумма дробей вида

$$\frac{A_1}{x - \alpha_r} + \frac{A_2}{(x - \alpha_r)^2} + \dots + \frac{A_{k_r}}{(x - \alpha_r)^{k_r}},$$

множителю вида $(x^2 + p_\gamma x + q_\gamma)^{t_\gamma}$ соответствует сумма дробей вида

$$\frac{M_1x + N_1}{x^2 + p_\gamma x + q_\gamma} + \frac{M_2x + N_2}{(x^2 + p_\gamma x + q_\gamma)^2} + \dots + \frac{M_{t_\gamma}x + N_{t_\gamma}}{(x^2 + p_\gamma x + q_\gamma)^{t_\gamma}}.$$

Например, дробь

$$\begin{aligned}
\frac{x}{(x-2)^3(x^2-x+2)^2} &= \frac{A_1}{x-2} + \frac{A_2}{(x-2)^2} + \frac{A_3}{(x-2)^3} + \frac{M_1x + N_1}{x^2 - x + 2} + \\
&+ \frac{M_2x + N_2}{(x^2 - x + 2)^2}.
\end{aligned}$$

Коэффициенты A_1, A_2, A_3, M, N , присутствующие в разложении, находят методом неопределённых коэффициентов.

Пример 1.4.7. Пусть $Q(p) = \frac{p^2 + 1}{p^2(p-1)^2}$. Найти $f(t)$.

Решение. Функция $Q(p)$ представляет собой правильную рациональную дробь. Разложим её на простейшие дроби:

$$\frac{p^2 + 1}{p^2(p-1)^2} = \frac{A_1}{p} + \frac{A_2}{p^2} + \frac{B_1}{p-1} + \frac{B_2}{(p-1)^2}.$$

Для нахождения коэффициентов A_1, A_2, B_1, B_2 применяем метод неопределённых коэффициентов. Приведём к общему знаменателю выражение, стоящее в правой части:

$$\frac{p^2 + 1}{p^2(p-1)^2} = \frac{A_1p(p-1)^2 + A_2(p-1)^2 + B_1p^2(p-1) + B_2p^2}{p^2(p-1)^2}.$$

Если две дроби равны и равны их знаменатели, то будут равны и их числители. Значит,

$$p^2 + 1 = A_1p(p-1)^2 + A_2(p-1)^2 + B_1p^2(p-1) + B_2p^2.$$

В последнем соотношении перепишем правую часть, располагая слагаемые по степеням p :

$$p^2 + 1 = p^3(A_1 + B_1) + p^2(-2A_1 + A_2 - B_1 + B_2) + p(A_1 - 2A_2) + A_2.$$

Два многочлена равны тогда и только тогда, когда у них равны коэффициенты при одинаковых степенях переменного p , т.е.:

$$A_1 + B_1 = 0$$

$$-2A_1 + A_2 - B_1 + B_2 = 1$$

$$A_1 - 2A_2 = 0$$

$$A_2 = 1$$

Получили систему четырёх уравнений с четырьмя неизвестными A_1, A_2, B_1, B_2 . Решая её, находим:

$$A_2 = 1, A_1 = 2A_2 = 2,$$

$$B_1 = -A_1 = -2,$$

$$B_2 = 1 + 2A_1 - A_2 + B_1 = 2.$$

Итак, получили разложение

$$Q(p) = \frac{2}{p} + \frac{1}{p^2} + \frac{-2}{p-1} + \frac{2}{(p-1)^2}.$$

Теперь найдём оригинал по таблице соответствия:

$$f(t) = 2 + t - 2e^t + te^t,$$

где

$$\frac{2}{p} = 2 \cdot \frac{1}{p} \leftrightarrow 2, \quad \frac{1}{p^2} = \frac{1}{p^{1+1}} \cdot 1! \leftrightarrow t, \quad -2 \cdot \frac{1}{p+(-1)} \leftrightarrow -2e^t,$$

$$2 \cdot \frac{1}{(p-1)^2} \leftrightarrow te^{-(-1)t} = te^t.$$

Упражнения для самостоятельного решения

Найти оригиналы, если известны их изображения:

1. $8(p+5)^{-3}$;

7. $\frac{p+5}{(p+2)^2+9}$;

13. $\frac{p-1}{p^2+3p}$;

2. $120 p^{-6}$;

8. $48 \cdot p^{-5}$;

14. $\frac{3-2p}{(p-1)(p+1)^2}$;

3. $\frac{p}{(p-3)(p+4)}$;

9. $\frac{6p+p^2-9}{(p^2+9)^2}$;

15. $\frac{p^2-p+2}{p^3-p^2-6p}$;

4. $\frac{p^2-1}{(p^2+1)^2}$;

10. $\frac{3p}{(p^2+1)^2}$;

16. $\frac{p^2+3p+4}{p(p-1)(p-2)}$.

5. $\frac{3}{p^2+9}$;

11. $\frac{2p}{p^2+p+1}$;

6. $\frac{1}{(p+2)(p-3)}$;

12. $\frac{6p+2}{(p-1)(p^2+2p+5)}$;

Ответы к упражнениям для самостоятельного решения

§ 1.2. 1. а) нет, б) нет.

2. а) $\frac{1-e^{-p}}{p}$, б) $\frac{p}{p^2+1}$, в) $\frac{1}{p^2-1}$.

§ 1.3. 1. а) $\frac{p^3}{p^4-1}$, б) $\frac{p^2}{p^4-1}$, в) $\frac{-p}{p^2+4}$.

2. а) $\frac{1}{p-a}$, б) $\frac{1}{p+3}$, в) $\frac{p}{p^2+\frac{9}{49}}$, г) $\frac{p}{p^2-\pi^2}$.

3. а) $e^{-3p} \frac{1}{p-1}$, б) $e^{-2p} \frac{3!}{p^4}$, в) $e^{-\frac{\pi}{2}p} \frac{p}{p^2+1}$.

$$4. \text{ а) } \frac{1}{(p-1)^2+1}, \quad \text{б) } \frac{p+3}{(p+3)^2-1}, \quad \text{в) } \frac{p-2}{(p-2)^2+9}, \quad \text{г) } \frac{3!}{(p-4)^4}.$$

$$5. \text{ а) } \frac{n!}{p^{n+1}}, \quad \text{б) } \frac{2p}{(p^2+1)^2}, \quad \text{в) } \frac{1}{(p-1)^2}.$$

$$6. \text{ а) } F(p) = \frac{1}{p(p^2+1)}, \quad \text{б) } F(p) = \frac{1}{p} \operatorname{arctg} p.$$

$$\S 1.4. \text{ 1) } 4t^2 e^{-5t}, \quad 2) t^5, \quad 3) \frac{4e^{-4t} + 3e^{3t}}{7},$$

$$4) t \cos t, \quad 5) \sin 3t, \quad 6) e^{\frac{1}{2}t} \operatorname{sh} \frac{5}{2}t,$$

$$7) e^{-2t} \cos 3t + \frac{5}{3} e^{-2t} \sin 3t, \quad 8) 2t^4,$$

$$9) t \sin 3t + t \cos 3t, \quad 10) \frac{3}{2} t \sin t,$$

$$11) 2e^{-\frac{t}{2}} \cos \frac{\sqrt{3}}{2}t, \quad 12) \frac{1}{2} (2e^t - 2e^{-t} \cos 2t + 3e^{-t} \sin 2t),$$

$$13) \frac{1}{3} (4e^{-3t} - e^t), \quad 14) \frac{1}{2} (\operatorname{sh} t - 5te^{-t}),$$

$$15) \frac{1}{15} (8e^{3t} + 12e^{-2t} - 5), \quad 16) 2 - 8e^t + 7e^{2t}.$$

ГЛАВА 2. ПРИМЕНЕНИЕ ОПЕРАЦИОННОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

§ 2.1. Применение операционного исчисления к решению линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами и непрерывной правой частью

Рассмотрим линейное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами

$$a_0 y^{(n)}(t) + a_1 y^{(n-1)}(t) + \dots + a_{n-1} y'(t) + a_n y(t) = f(t), \quad (2.1.1)$$

$f(t)$ – непрерывная функция действительного переменного.

Требуется найти частное решение уравнения (2.1.1), удовлетворяющее начальным условиям:

$$y(0) = y_0, \quad y'(0) = y_1, \quad \dots, \quad y^{(n-1)}(0) = y_{n-1}, \quad (2.1.2)$$

где y_0, y_1, \dots, y_{n-1} – заданные числа (задача Коши).

Будем предполагать, что функция $f(t)$ является оригиналом. Искомую функцию $y(t)$ и её производные $y'(t), y''(t), \dots, y^{(n)}(t)$ также предполагаем оригиналами. Полагаем $f(t) \leftrightarrow F(p), y(t) \leftrightarrow Y(p)$.

Для решения поставленной задачи (2.1.1), (2.1.2) перейдём от уравнения (2.1.1) к изображающему (или операторному) уравнению, связывающему изображение $Y(p)$ и $F(p)$.

Применяя n раз теорему о дифференцировании оригинала (см. глава 1, § 1.3), получим:

$$\begin{aligned} y'(t) &= pY(p) - y_0, \\ y''(t) &= p^2Y(p) - py_0 - y_1, \\ &\dots \\ y^{(n)}(t) &= p^nY(p) - p^{n-1}y_0 - p^{n-2}y_1 - \dots - y_{n-1}. \end{aligned}$$

Далее, применяя теорему линейности (см. глава 1, § 1.3), перейдём от уравнения (2.1.1) к операторному уравнению:

$$\begin{aligned} a_0[p^nY(p) - p^{n-1}y_0 - p^{n-2}y_1 - \dots - y_{n-1}] + a_1[p^{n-1}Y(p) - p^{n-2}y_0 - \dots - y_{n-2}] + \dots \\ + a_{n-1}[pY(p) - y_0] + a_nY(p) = F(p). \end{aligned} \quad (2.1.3)$$

Введём обозначения:

$$\begin{aligned} a_0p^n + a_1p^{n-1} + \dots + a_{n-1}p + a_n &= C(p), \\ y_0(a_0p^{n-1} + a_1p^{n-2} + \dots + a_{n-1}) + \dots + a_0y_{n-1} &= D(p). \end{aligned}$$

Тогда уравнение (2.1.3) можно записать так:

$$C(p) \cdot Y(p) = D(p) + F(p),$$

откуда находим

$$Y(p) = \frac{D(p) + F(p)}{C(p)}. \quad (2.1.4)$$

Полученное по формуле (2.1.4) значение $Y(p)$ является изображением искомого частного решения уравнения (2.1.1). При нулевых начальных условиях (2.1.2), то есть при $y_0 = 0, y_1 = 0, \dots, y_{n-1} = 0$, соотношение (2.1.4) будет иметь более простой вид:

$$Y(p) = \frac{F(p)}{C(p)}. \quad (2.1.5)$$

Искомое частное решение $y(t)$ является оригиналом, соответствующим изображению (2.1.4) или (2.1.5). Оно определяется с помощью таблиц соответствия и применения теоремы обращения.

Рассмотрим примеры.

Пример 2.1.1. Найти частное решение уравнения $y''(t) + 4y(t) = 2$, удовлетворяющее начальным условиям: $y(0) = 0, y'(0) = 4$.

Решение. Обозначим через $y(t)$ искомое частное решение, через $Y(p)$ – его изображение. Тогда:

$$\begin{aligned} y'(t) &\leftrightarrow pY(p) - y(0) = pY(p), \\ y''(t) &\leftrightarrow p^2Y(p) - py(0) - y'(0) = p^2Y(p) - 4, \\ 2 &\leftrightarrow \frac{2}{p}. \end{aligned}$$

Операторное уравнение будет иметь вид $p^2Y(p) - 4 + 4Y(p) = \frac{2}{p}$,

откуда

$$Y(p) = \frac{\frac{2}{p} + 4}{p^2 + 4} = \frac{2}{p(p^2 + 4)} + \frac{4}{p^2 + 4}.$$

Найдём оригинал $y(t)$, соответствующий полученному изображению.

Так как $\frac{4}{p^2 + 4} \leftrightarrow 2 \sin 2t$, $\frac{2}{p(p^2 + 4)} \leftrightarrow \sin^2(t)$, то $Y(p) \leftrightarrow 2 \sin 2t + \sin^2 t$.

Таким образом, искомым решением является функция $y(t) = 2 \sin 2t + \sin^2 t$.

Полезно выполнить проверку найденного решения подстановкой в исходное уравнение:

$$\begin{aligned} y'(t) &= 4 \cos 2t + 2 \sin t \cos t = 4 \cos 2t + \sin 2t, \\ y''(t) &= -8 \sin 2t + 2 \cos 2t; \\ y''(t) + 4y(t) &= -8 \sin 2t + 2 \cos 2t + 8 \sin 2t + 4 \sin^2 t = 2 \cos^2 t - 2 \sin^2 t + 4 \sin^2 t = 2. \end{aligned}$$

Ответ: $y(t) = 2 \sin 2t + \sin^2 t$.

Пример 2.1.2. Найти частное решение уравнения

$$y''(t) - 3y'(t) + 2y = 12e^{3t},$$

удовлетворяющее начальным условиям: $y(0) = 2, y'(0) = 6$.

Решение. Пусть $y(t)$ – искомое решение, $Y(p)$ – его изображение. Найдём по таблице соответствия изображение функции $f(t) = 12e^{3t}$: $12e^{3t} \leftrightarrow \frac{12}{p-3}$ и запишем операторное уравнение:

$$[p^2 Y(p) - 2p - 6] - 3[pY(p) - 2] + 2Y(p) = \frac{12}{p-3}.$$

Из операторного уравнения находим изображение искомого решения

$$Y(p) = \frac{\frac{12}{p-3} + 2p}{p^2 - 3p + 2} = \frac{12}{(p-3)(p^2 - 3p + 2)} + \frac{2p}{p^2 - 3p + 2}.$$

Для нахождения соответствующего ему оригинала $y(t)$ разложим правую часть полученного соотношения на сумму простейших дробей:

$$\begin{aligned} \frac{12}{(p-3)(p^2 - 3p + 2)} + \frac{2p}{p^2 - 3p + 2} &= \frac{6}{p-3} + \frac{6}{p-1} - \frac{12}{p-2} + \frac{4}{p-2} - \frac{2}{p-1} = \\ &= \frac{6}{p-3} - \frac{8}{p-2} + \frac{4}{p-1}. \end{aligned}$$

Используя таблицы соответствия, найдём: $Y(p) \leftrightarrow 6e^{3t} - 8e^{2t} + 4e^t$.

Таким образом, искомое частное решение: $y(t) = 6e^{3t} - 8e^{2t} + 4e^t$.

Предлагается самостоятельно выполнить проверку путём подстановки найденного решения в исходное уравнение.

$$\text{Ответ: } y(t) = 6e^{3t} - 8e^{2t} + 4e^t.$$

Пример 2.1.3. Найти общее решение уравнения $y''(t) - 5y'(t) + 6y(t) = 2$.

Решение. Обозначим через $y(t)$ искомое общее решение, через $Y(p)$ – его изображение. Запишем операторное уравнение:

$$[p^2 Y(p) - py_0 - y_1] - 5[pY(p) - y_0] + 6Y(p) = \frac{2}{p}$$

или

$$Y(p)[p^2 - 5p + 6] = \frac{2}{p} + (p-5)y_0 + y_1.$$

Здесь y_0, y_1 – постоянные, которые могут принимать произвольные значения. Из операторного уравнения находим:

$$Y(p) = \frac{2}{p(p^2 - 5p + 6)} + \frac{p-5}{p^2 - 5p + 6} y_0 + \frac{y_1}{p^2 - 5p + 6} =$$

$$\frac{2}{p(p-2)(p-3)} + \frac{p-5}{(p-2)(p-3)} y_0 + \frac{1}{(p-2)(p-3)} y_1.$$

Используя таблицы соответствия, по изображениям, стоящим в правой части соотношения и разложив их на сумму простейших дробей, находим оригиналы:

$$\frac{2}{p(p-2)(p-3)} = \frac{1}{3} - e^{2t} + \frac{2}{3} e^{3t},$$

$$\frac{p-5}{(p-2)(p-3)} = 3e^{2t} - 2e^{3t},$$

$$\frac{1}{(p-2)(p-3)} = e^{3t} - e^{2t},$$

Тогда $Y(p) = \frac{1}{3} - e^{2t} + \frac{2}{3} e^{3t} + y_0(3e^{2t} - 2e^{3t}) + y_1(e^{3t} - e^{2t})$.

Ответ: $y(t) = \frac{1}{3} - e^{2t} + \frac{2}{3} e^{3t} + y_0(3e^{2t} - 2e^{3t}) + y_1(e^{3t} - e^{2t})$.

Рассмотрим на примере применение изложенной методики к решению систем линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.

Пример 2.1.4. Найти решение системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} x' + 2x + 2y = 10e^{2t}, \\ y' - 2x + y = 7e^{2t}, \end{cases} \quad x = x(t), y = y(t),$$

при заданных начальных условиях: $x(0) = 1, y(0) = 3$.

Решение. Обозначим через $x(t)$ и $y(t)$ искомое решение, через $Y(p)$ и $X(p)$ — его изображения. Используя теорему о дифференцировании оригинала, находим:

$$x(t) \leftrightarrow pX(p) - 1, \quad y(t) \leftrightarrow pY(p) - 3.$$

Система операторных уравнений будет иметь вид

$$\begin{cases} X(p)(p+2) + 2Y(p) = \frac{10}{p-2} + 1, \\ -2X(p) + Y(p)(p+1) = \frac{7}{p-2} + 3. \end{cases}$$

Получили систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных изображений $X(p)$ и $Y(p)$. Решая эту систему, находим:

$$X(p) = \frac{1}{p-2}, \quad Y(p) = \frac{3}{p-2}.$$

Возвращаясь к оригиналам, получим: $X(p) = e^{2t}, Y(p) = 3e^{2t}$.

$$\text{Ответ: } x(t) = e^{2t}, y(t) = 3e^{2t}.$$

Рассмотрим пример применения операционного метода к исследованию *систем автоматического регулирования*.

Пример 2.1.5. Рассмотрим дифференциальное уравнение второго порядка

$$a_0 \frac{d^2 x}{dt^2} + a_1 \frac{dx}{dt} + a_2 x = b_0 \frac{df}{dt} + b_1 f, \quad (2.1.6)$$

с заданными начальными условиями $x(0) = x_0, x'(0) = x_0'$, описывающее некоторую динамическую систему. Здесь $f(t)$ – воздействие, приложенное к системе; $x(t)$ – координата системы. Задано начальное воздействие на систему $f(0) = f_0$.

Найдем изображение решения уравнения (1.2.6), предполагая, что $x(t)$ и $f(t)$ оригиналы. Пусть $x(t) \leftrightarrow X(p), f(t) \leftrightarrow F(p)$, тогда операторное уравнение имеет вид

$$a_0 p^2 X(p) + a_1 p X(p) + a_2 X(p) = b_0 p F(p) - b_0 f_0 + b_1 F(p) + a_0 p x_0 + a_0 x_0' + a_1 x_0,$$

из которого найдем изображение решения

$$X(p) = \frac{1}{a_0 p^2 + a_1 p + a_2} [F(p)(b_0 p + b_1) - b_0 f_0 + x_0(a_0 p + a_1) + a_0 x_0']. \quad (2.1.7)$$

Изображение (2.1.7) решения имеет характерную структуру, отражающую сущность процессов, происходящих в динамической системе.

Множитель $\frac{1}{a_0 p^2 + a_1 p + a_2}$ называется *системной функцией*. Системная

функция характеризует физические особенности динамической системы, учитывая ее параметры, связи и т.п.

Характеристическим уравнением системы называют уравнение

$$a_0 \lambda^2 + a_1 \lambda + a_2 = 0.$$

Множитель

$$F(p)(b_0 p + b_1) - b_0 f_0 + x_0(a_0 p + a_1) + a_0 x_0'$$

содержит сведения об изображении воздействия, приложенного к системе и о начальных условиях, то есть дает представление о причинах возбуждения системы, называется *возбуждающей функцией*.

Изображение решения (2.1.7) показывает, что изменение координаты $x(t)$ системы может произойти либо в результате приложенного к системе воздействия $f(t)$, либо за счет ненулевых начальных условий.

Итак, изображение решения (2.1.7) представляет собой произведение системной и возбуждающей функций, каждая из которых влияет на формирование процесса изменения решения $x(t)$ (координаты системы).

Упражнения для самостоятельного решения

1. Найти частное решение дифференциального уравнения, удовлетворяющее заданным начальным условиям:

- | | |
|--|---|
| 1. $y'' + 3y' + 2y = 0,$
$y(0) = 0, \quad y'(0) = 1.$ | 4. $y'' - 2y' = t^2 e^t,$
$y(0) = 0, \quad y'(0) = 0.$ |
| 2. $y'' - y = 4 \sin t + 5 \cos 2t,$
$y(0) = -1, \quad y'(0) = -2.$ | 5. $y'' + 4y = 4 \sin t,$
$y(0) = 4, \quad y'(0) = 0.$ |
| 3. $y'' - 4y = 4t,$
$y(0) = -1, \quad y'(0) = 0.$ | 6. $y'' - 5y' + 6y = 2e^t,$
$y(0) = 1, \quad y'(0) = 1.$ |

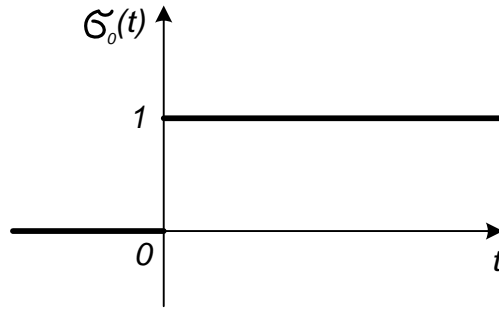
2. Найти частное решение системы дифференциальных уравнений, удовлетворяющее заданным начальным условиям:

- | | |
|---|---|
| а) $\begin{cases} x' = x - y, \\ y' = x + y, \end{cases}$
$x(0) = 1, \quad y(0) = 0.$ | б) $\begin{cases} x' + x - y = e^t, \\ y' + 3x - 2y = 2e^t, \end{cases}$
$x(0) = 1, \quad y(0) = 1.$ |
| в) $\begin{cases} x' - 2x - 4y = \cos t, \\ y' + x + 2y = \sin t, \end{cases}$
$x(0) = 0, \quad y(0) = 0.$ | |

§ 2.2 Изображение разрывных функций

2.2.1 Единичная ступень

Единичную функцию Хевисайда $\sigma_0(t) = \begin{cases} 1, & t > 0, \\ 0, & t < 0. \end{cases}$



в приложениях часто называют единичной ступенью, что связано с формой её графика. Эта функция неоднократно будет использоваться в дальнейшем. При решении задач электротехники воздействия (например, электродвижущие силы), внезапно приложенные в момент времени $t = 0$, могут быть представлены функциями, равными нулю при $t < 0$ и равными непрерывной функции времени $f(t)$ при $t > 0$. Такие функции можно записать в виде $f(t)\sigma_0(t)$. В дальнейшем будем вместо $f(t)\sigma_0(t)$ записывать $f(t)$, но обязательно помнить, что $f(t) = 0$ при $t < 0$. Заметим также, что разложение непериодической электродвижущей силы на синусоидальные составляющие приводит к трудоёмким расчётам. В связи с этим удобно функцию $f(t)\sigma_0(t)$ разложить на сумму простейших функций (на ступени), как показано на рисунке 7.

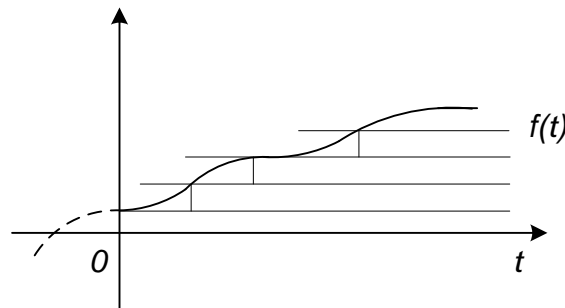


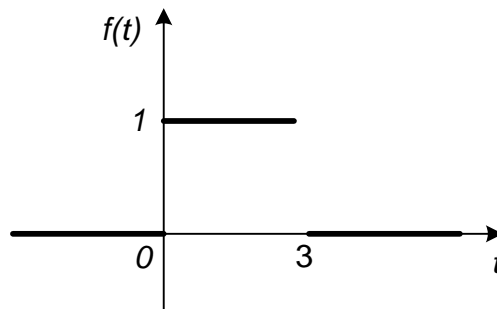
Рисунок 7

Такое разложение приводит к более простым расчётам при помощи операционного исчисления. Напомним (см. глава 1), что изображением единичной функции является функция $\frac{1}{p}$, то есть $\sigma_0 \leftrightarrow \frac{1}{p}$. Как следует из теоремы запаздывания, если $f(t) \leftrightarrow F(p)$, то $f(t - \lambda) \leftrightarrow F(p)e^{-\lambda p}$. В случае, когда $f(t)$ – единичная ступень, имеем: $\sigma_0(t - \lambda) \leftrightarrow \frac{1}{p}e^{-\lambda p}$.

2.2.2 Примеры построения изображений неперiodических разрывных функций

Пример 2.2.1. Найти изображение функции

$$\gamma(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < 0, \\ 1 & \text{при } 0 < t < 3, \\ 0 & \text{при } t > 3. \end{cases}$$



Решение. Заданную функцию $\gamma(t)$ можно считать единичным импульсом длиной в три единицы и рассматривать как разность двух единичных функций Хевисайда: $\sigma_0(t)$ и $\sigma_0(t-3)$, где

$$\sigma_0(t-3) = \begin{cases} 0, & t < 3, \\ 1, & t > 3. \end{cases} \text{ тогда } \gamma(t) = \sigma_0(t) - \sigma_0(t-3).$$

Используя свойство линейности и теорему запаздывания, получим:

$$\begin{aligned} \sigma_0 &\leftrightarrow \frac{1}{p}, & \sigma_0(t-3) &\leftrightarrow \frac{1}{p}e^{-3p}, \\ \gamma(t) &\leftrightarrow \frac{1}{p} - \frac{1}{p}e^{-3p} = \frac{1}{p}(1 - e^{-3p}). \end{aligned}$$

Замечание. Если единичный импульс действует в течение времени τ , то его изображение равно $\frac{1}{p}(1 - e^{-p\tau})$.

Пусть теперь единичный импульс действует в течение времени τ , но начинается не в момент $t = 0$, а в момент $T = \tau$. Изобразим его графически (рис.8).

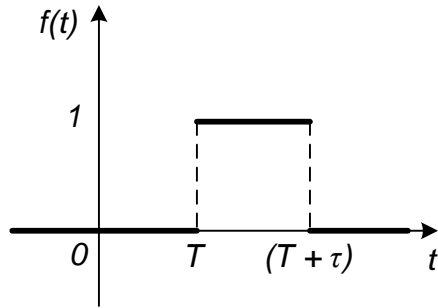
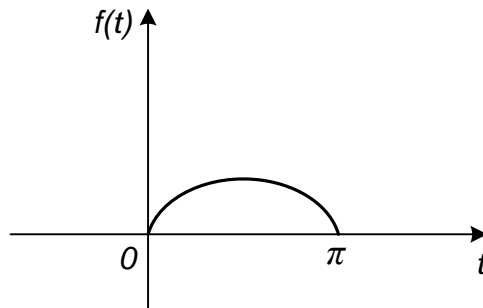


Рисунок 8

Применяя к полученному выше результату ещё раз теорему запаздывания, найдём изображение такого импульса. Оно будет равно $\frac{1}{p}(1 - e^{-p\tau})e^{-pT}$.

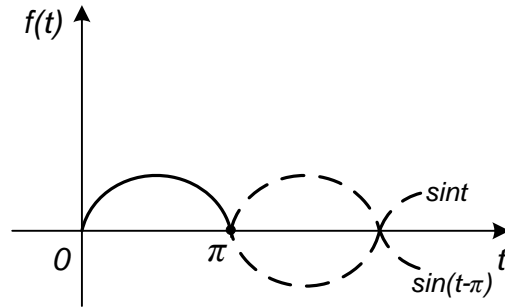
Пример 2.2.2. Найти изображение импульса $f(t)$ в виде одной полуволны синусоиды:

$$f(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ \sin t, & 0 < t < \pi, \\ 0, & t > \pi. \end{cases}$$



Решение. Чтобы получить импульс в виде одной полуволны синусоиды $\sin t$, нужно сложить два оригинала, один из которых $\sin t \sigma_0(t)$, а другой $\sin(t - \pi) \sigma_0(t - \pi)$ (синусоида сдвинута на π единиц вправо), то есть

$$f(t) = \sin t \sigma_0(t) + \sin(t - \pi) \sigma_0(t - \pi).$$



Поскольку $\sin t \leftrightarrow \frac{1}{p^2 + 1}$, применяя теорему запаздывания, найдём:

$\sin(t - \pi) \leftrightarrow \frac{1}{p^2 + 1} e^{-p\pi}$. Тогда изображение рассматриваемого импульса будет равно:

но:

$$\frac{1}{p^2 + 1} + \frac{1}{p^2 + 1} e^{-p\pi}, \text{ т.е. } f(t) \leftrightarrow \frac{1 + e^{-p\pi}}{p^2 + 1}.$$

Если импульс приложен не в момент $t = 0$, а в момент $t = T$, то его изображение

$$f(t - T) \leftrightarrow \frac{1 + e^{-p\pi}}{p^2 + 1} e^{-pT}.$$

Пример 2.2.3. Импульс $E(t)$, имеющий вид одной полуволны синусоиды приложен в момент времени $t = 0$ к цепи, состоящей из последовательно соединённых сопротивления R , ёмкости C . Найти ток, текущий в момент времени $t > \frac{\pi}{\omega}$; $E(t) = E_0 \sin \omega t$.

Решение. Аналогично рассмотренному примеру 2.2.2 импульс $E(t)$ можно разложить следующим образом:

$$E(t) = E_0 \sin \omega t \sigma_0(t) + E_0 \sin \omega \left(t - \frac{\pi}{\omega}\right) \sigma_0\left(t - \frac{\pi}{\omega}\right).$$

Тогда его изображение $E(t) \leftrightarrow E(p) = \frac{E_0 \omega}{p^2 + \omega^2} \left(1 + e^{-\frac{\pi}{\omega} p}\right)$.

Так как обобщенное сопротивление такой цепи $Z(p) = R + \frac{1}{Cp}$, то

$$i(t) \leftrightarrow \frac{E(p)}{Z(p)} = \frac{E_0 w}{p^2 + w^2} (1 + e^{-\frac{\pi}{w} p}) \cdot \frac{1}{R + \frac{1}{Cp}} = E_0 \frac{wp(1 + e^{-\frac{\pi}{w} p})}{(p^2 + w^2)(Rp + \frac{1}{C})}$$

Применяя теорему обращения, по найденному изображению получим:

$$i(t) = \frac{E_0 C w}{1 + R^2 C^2 w^2} (1 + e^{-\frac{\pi}{RCw}}) e^{-\frac{1}{RC} t}$$

2.2.3 Изображение периодических разрывных функций.

Пусть $f(t)$ – однозначная функция с периодом T , причём $f(t) \equiv 0$ при $t < 0$. Предположим также, что функция $f(t)$ не принимает бесконечных значений и имеет в периоде конечное число разрывов первого рода, максимумов и минимумов.

Обозначим через $F(p)$ её изображение, через $F_0(p)$ – изображение нулевого периода функции (так будем называть один её период, начинающийся в момент $t = 0$). По определению преобразования Лапласа

$$\begin{aligned} F(p) &= \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt = \int_0^T f(t) e^{-pt} dt + \int_T^{2T} f(t) e^{-pt} dt + \dots = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \int_{nT}^{(n+1)T} f(t) e^{-pt} dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^T f(\tau + nT) e^{-p(\tau + nT)} d\tau \end{aligned}$$

(здесь произведена замена переменной $t = \tau + nT$).

Так как $f(t)$ имеет период T , то $f(\tau + nT) = f(\tau)$.

Тогда

$$\begin{aligned} F(p) &= \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^T f(\tau) e^{-p(\tau + nT)} d\tau = \int_0^T f(\tau) \sum_{n=0}^{\infty} e^{-p(\tau + nT)} d\tau = \\ &= \int_0^T f(\tau) e^{-p\tau} d\tau \cdot \sum_{n=0}^{\infty} e^{-pnT} = F_0(p) \cdot \frac{1}{1 - e^{-pT}}, \end{aligned}$$

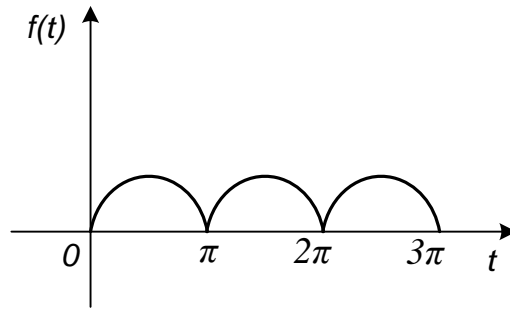
где $F_0(p) = \int_0^T f(\tau) e^{-p\tau} d\tau$ – изображение нулевого периода, $\frac{1}{1 - e^{-pT}}$ – сумма ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{-pnT}.$$

Отсюда также следует, что изображения первого, второго, ..., n -го периодов равны соответственно: $F_0(p)e^{-pT}$, $F_0(p)e^{-2pT}$, ..., $F_0(p)e^{-npT}$.

Пример 2.2.4. В качестве примера рассмотрим построение изображения периодического синусоидального импульса $f(t) = |\sin t|$.

Очевидно, $f(t) = |\sin t|$ является π -периодической функцией. Её график имеет вид



Функция $f(t)$ задаёт «выпрямленный» переменный ток. В примере 2.2.2 найдено изображение импульса в виде одной полуволны синусоиды, то есть нулевого периода заданного импульса, а именно: $\frac{1 + e^{-p\pi}}{p^2 + 1}$.

Каждая следующая полуволна представляет собой импульсы, запаздывающие соответственно на π , 2π , 3π , Их изображения равны соответственно:

$$\frac{1 + e^{-p\pi}}{p^2 + 1} e^{-p\pi}, \quad \frac{1 + e^{-p\pi}}{p^2 + 1} e^{-2p\pi}, \quad \frac{1 + e^{-p\pi}}{p^2 + 1} e^{-3p\pi}, \quad \dots$$

Тогда изображение периодического синусоидального импульса $|\sin t|$ таково:

$$\begin{aligned} & \frac{1 + e^{-p\pi}}{p^2 + 1} + \frac{1 + e^{-p\pi}}{p^2 + 1} e^{-p\pi} + \dots + \frac{1 + e^{-p\pi}}{p^2 + 1} e^{-np\pi} + \dots = \\ & = \frac{1 + e^{-p\pi}}{p^2 + 1} (1 + e^{-p\pi} + \dots + e^{-np\pi} + \dots) = \frac{1 + e^{-p\pi}}{(p^2 + 1)(1 - e^{-p\pi})}. \end{aligned}$$

Заметим, что синусоидальный импульс с запаздыванием на T имеет изображение

$$\frac{1}{p^2 + 1} (1 + e^{-p\pi}) e^{-pT}.$$

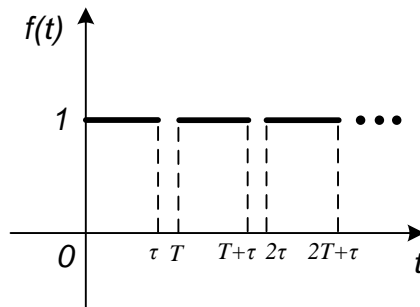
Тогда периодическая система таких импульсов ($T \geq \pi$) имеет изображение:

$$\frac{1+e^{-p\pi}}{p^2+1} + \frac{1+e^{-p\pi}}{p^2+1} e^{-pT} + \dots + \frac{1+e^{-p\pi}}{p^2+1} e^{-npT} + \dots = \frac{1+e^{-p\pi}}{p^2+1} \cdot \frac{1}{(1-e^{-pT})}.$$

Рассмотренный пример для $|\sin t|$ является частным случаем, когда $T = \pi$.

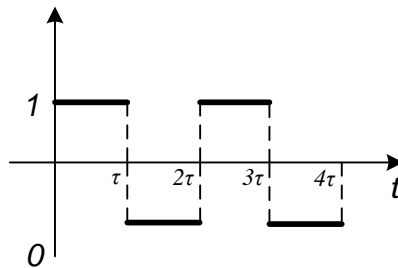
Приведём изображения ещё двух периодических импульсов (без вывода), которые могут быть полезными при решении задач электротехники:

$$1) f(t) = \begin{cases} 1, & nT < t < nT + \tau, \\ 0, & nT + \tau < t < (n+1)T, \quad n = 0, 1, 2, \dots \end{cases}$$



$$f(t) \leftrightarrow \frac{1}{p}(1-e^{-p\tau}) + \frac{1}{p}(1-e^{-p\tau})e^{-pT} + \dots = \frac{1-e^{-p\tau}}{p(1-e^{-pT})}.$$

$$2) f(t) = \begin{cases} 1, & 2n\tau < t < (2n+1)\tau, \\ -1, & (2n+1)\tau < t < (2n+2)\tau, \quad n = 0, 1, 2, \dots \end{cases}$$



$$f(t) \leftrightarrow \frac{1-e^{-p\tau}}{p(1+e^{-p\tau})}.$$

§ 2.3 Применение операционного исчисления к решению линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами и разрывной правой частью

В § 2.1 рассмотрены дифференциальные уравнения, у которых правая часть $f(t)$ – непрерывная функция, заданная одним аналитическим выражением. При решении ряда прикладных задач встречаются уравнения, у которых правая часть на

различных интервалах задаётся разными аналитическими выражениями и имеет конечное число точек разрыва первого рода (например, функция ступенчатого вида). Если при этом $f(t)$ является оригиналом, то операционный метод решения применим, однако решения таких уравнений обладают некоторыми особенностями. Рассмотрим особенности решений таких уравнений на примере линейного дифференциального уравнения третьего порядка с постоянными коэффициентами.

$$a_0 y'''(t) + a_1 y''(t) + a_2 y'(t) + a_3 y(t) = f(t), \quad (2.3.1)$$

здесь $f(t)$ – разрывная функция.

Для нахождения решения уравнения (2.3.1) применим операционный метод, подробно изложенный в § 2.1. При построении операторного уравнения необходимо трижды применить теорему о дифференцировании оригинала, считая при этом оригиналом функцию $y(t)$, затем функцию $y'(t)$, затем $y''(t)$. Поэтому как искомое решение $y(t)$, так и его производные $y'(t)$, $y''(t)$ обязательно должны быть непрерывными функциями и удовлетворять всем требованиям к оригиналу (см. главу 1). Но тогда (это следует из самого дифференциального уравнения) функция $y'''(t)$ будет иметь разрывы в тех же точках, что и правая часть $f(t)$. Значит, функция $y(t)$ будет удовлетворять уравнению (2.3.1) во всех точках, где правая часть $f(t)$ непрерывна. В точках же разрыва функции $f(t)$ будет разрывной функция $y'''(t)$ и в них проверять решение подстановкой в уравнение нет смысла.

Рассмотрим на примерах методику построения решений линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами и разрывной правой частью.

Пример 2.3.1. Найти при $t > 0$ решение уравнения $y''(t) + y(t) = f(t)$, удовлетворяющее нулевым начальным условиям: $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$, где

$$f(t) = \begin{cases} 1, & \text{если } 0 < t < \pi, \\ 0, & \text{если } t > \pi. \end{cases}$$

($f(t)$ – единичный непериодический импульс длиной π .)

Решение. Пусть $y(t)$ искомое решение. $Y(p)$ – его изображение. Так как изображение правой части $f(t) \leftrightarrow \frac{1}{p} - \frac{e^{-p\pi}}{p} = \frac{1 - e^{-p\pi}}{p}$, то операторное уравнение имеет вид

$$p^2 Y(p) + Y(p) = \frac{1 - e^{-p\pi}}{p}.$$

Из операторного уравнения находим изображение искомого решения

$$Y(p) = \frac{1 - e^{-p\pi}}{p(p^2 + 1)}.$$

Для нахождения оригинала $y(t)$ преобразуем правую часть полученного соотношения:

$$\frac{1 - e^{-p\pi}}{p(p^2 + 1)} = \frac{1}{p(p^2 + 1)} - \frac{e^{-p\pi}}{p(p^2 + 1)} = \frac{1}{p} - \frac{p}{p^2 + 1} - \left(\frac{1}{p} - \frac{p}{p^2 + 1}\right)e^{-p\pi}.$$

Используя таблицы соответствия, получим: $\frac{1}{p} - \frac{p}{p^2 + 1} \leftrightarrow (1 - \cos t)\sigma_0(t)$.

Тогда по теореме запаздывания $\left(\frac{1}{p} - \frac{p}{p^2 + 1}\right)e^{-p\pi} \leftrightarrow [1 - \cos(t - \pi)]\sigma_0(t - \pi)$.

Таким образом, искомое решение имеет вид

$$y(t) = (1 - \cos t)\sigma_0(t) - [1 - \cos(t - \pi)]\sigma_0(t - \pi).$$

Так как

$$(1 - \cos t)\sigma_0(t) = \begin{cases} 1 - \cos t, & t > 0, \\ 0, & t < 0; \end{cases}$$

$$[1 - \cos(t - \pi)]\sigma_0(t - \pi) = \begin{cases} 0, & 0 < t < \pi, \\ 1 - \cos(t - \pi), & t > \pi, \end{cases}$$

то полученное решение можно записать так:

$$y(t) = \begin{cases} 1 - \cos t, & 0 < t < \pi, \\ \cos(t - \pi) - \cos t, & t > \pi. \end{cases}$$

Исследуем найденное решение в точке $t = \pi$, в которой правая часть уравнения разрывна.

$$\lim_{t \rightarrow \pi-0} y(t) = \lim_{t \rightarrow \pi-0} (1 - \cos t) = 2,$$

$$\lim_{t \rightarrow \pi+0} y(t) = \lim_{t \rightarrow \pi+0} [\cos(t - \pi) - \cos t] = 2.$$

Так как

$$\lim_{t \rightarrow \pi-0} y(t) = \lim_{t \rightarrow \pi+0} y(t),$$

то функция $y(t)$ будет непрерывной в точке $t = \pi$, если положить $y(\pi) = 2$.

Аналогичные рассуждения приводят к выводу, что первая производная

$$y'(t) = \begin{cases} \sin t, & 0 < t < \pi, \\ -\sin(t - \pi) + \sin t, & t > \pi. \end{cases}$$

является непрерывной в точке $t = \pi$.

Исследуем на непрерывность вторую производную

$$y''(t) = \begin{cases} \cos t, & 0 < t < \pi, \\ -\cos(t - \pi) + \cos t, & t > \pi. \end{cases}$$

$$\lim_{t \rightarrow \pi-0} y'(t) = -2; \quad \lim_{t \rightarrow \pi+0} y''(t) = 0,$$

$$\lim_{t \rightarrow \pi-0} y''(t) \neq \lim_{t \rightarrow \pi+0} y''(t).$$

Вторая производная $y''(t)$ имеет в точке $t = \pi$ разрыв первого рода.

Итак, построенное решение будет удовлетворять заданному дифференциальному уравнению во всех точках, где непрерывна функция $f(t)$. В точках разрыва функции $f(t)$ найденная функция $y(t)$ решением не является.

Пример 2.3.2. Найти при $t > 0$ решение уравнения $y''(t) + w^2 y(t) = f(t)$, удовлетворяющее нулевым начальным условиям: $y(0) = y'(0) = 0$, где функция

$$f(t) = \begin{cases} \sin t, & 0 < t < \pi, \\ 0, & t > \pi. \end{cases}$$

(синусоидальный импульс, действующий в промежутке времени π).

Решение. Как было получено выше, изображение функции $f(t)$:

$$f(t) = \frac{1 + e^{-p\pi}}{p^2 + 1}.$$

Обозначим через $y(t)$ искомое решение, через $Y(p)$ – его изображение. Операторное уравнение будет иметь вид

$$p^2 Y(p) + w^2 Y(p) = \frac{1 + e^{-p\pi}}{p^2 + 1},$$

из которого находим изображение искомого частного решения:

$$Y(p) = \frac{1 + e^{-p\pi}}{(p^2 + 1)(p^2 + w^2)} = \frac{1}{(p^2 + 1)(p^2 + w^2)} + \frac{e^{-p\pi}}{(p^2 + 1)(p^2 + w^2)}.$$

Вид частного решения будет зависеть от параметра w .

Рассмотрим два случая.

1. Пусть $w^2 = 1$. Тогда

$$Y(p) = \frac{1}{(p^2 + 1)^2} + \frac{e^{-p\pi}}{(p^2 + 1)^2}.$$

По таблице соответствия находим оригинал для $\frac{1}{(p^2 + 1)^2}$:

$$\frac{1}{(p^2 + 1)^2} \leftrightarrow \left(\frac{\sin t}{2} - \frac{t \cos t}{2} \right) \sigma_0(t).$$

Применяем теорему запаздывания

$$\begin{aligned} \frac{1}{(p^2 + 1)^2} e^{-p\pi} &\leftrightarrow \left(\frac{\sin(t - \pi)}{2} - \frac{(t - \pi) \cos(t - \pi)}{2} \right) \sigma_0(t - \pi) = \\ &= \left(-\frac{\sin t}{2} + \frac{(t - \pi) \cos t}{2} \right) \sigma_0(t - \pi). \end{aligned}$$

Таким образом,

$$y(t) = \frac{1}{2}(\sin t - t \cos t) \sigma_0(t) + \frac{1}{2}(-\sin t + (t - \pi) \cos t) \sigma_0(t - \pi)$$

или

$$y(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}(\sin t - t \cos t), & \text{если } 0 < t < \pi, \\ -\frac{\pi}{2} \cos t, & \text{если } t > \pi. \end{cases}$$

Рассмотренный случай соответствует резонансу.

2. Пусть $w^2 \neq 1$. По таблице находим:

$$\frac{1}{(p^2 + 1)(p^2 + w^2)} \leftrightarrow \left(\frac{\sin wt - w \sin t}{w(1 - w^2)} \right) \sigma_0(t).$$

Применяя теорему запаздывания, найдём

$$\frac{e^{-p\pi}}{(p^2 + 1)(p^2 + w^2)} \leftrightarrow \left(\frac{\sin w(t - \pi) - w \sin(t - \pi)}{w(1 - w^2)} \right) \sigma_0(t - \pi).$$

Аналогично предыдущему случаю

$$y(t) = \frac{\sin \omega t - \omega \sin t}{\omega(1 - \omega^2)} \sigma_0(t) + \frac{\sin \omega(t - \pi) - \omega \sin(t - \pi)}{\omega(1 - \omega^2)} \sigma_0(t - \pi)$$

или

$$y(t) = \begin{cases} \frac{\sin \omega t - \omega \sin t}{\omega(1 - \omega^2)}, & \text{если } 0 < t < \pi, \\ \frac{2 \cos \frac{\omega \pi}{2} \sin \omega(t - \frac{\pi}{2})}{\omega(1 - \omega^2)}, & t > \pi. \end{cases}$$

В частности, если ω является нечётным числом, $\cos \frac{\omega \pi}{2} = 0$ и решение будет иметь вид

$$y(t) = \begin{cases} \frac{\sin \omega t - \omega \sin t}{\omega(1 - \omega^2)}, & 0 < t < \pi, \\ 0, & t > \pi. \end{cases}$$

Исследование построенного решения рекомендуется провести самостоятельно.

Упражнения для самостоятельного решения

1. Найти частное решение дифференциального уравнения:

$$1. \quad y'(t) + y(t) = f(t), \quad f(t) = \begin{cases} 1, & 0 < t < 2, \\ 0, & t > 2, \end{cases} \quad y(0) = 0.$$

$$2. \quad y''(t) + y(t) = f(t), \quad f(t) = \begin{cases} 0, & 0 < t < 1, \\ 1, & 1 < t < 4, \\ 0, & t > 4, \end{cases} \quad y(0) = y'(0) = 0$$

§ 2.4. Применение операционного исчисления к решению задач электротехники

Английский инженер-электрик О. Хевисайд ввёл в электротехнику методы операционного исчисления, которые позволяют рассчитывать процессы в сложных электрических цепях при произвольном внешнем напряжении.

Электрической цепью называют совокупность соединённых друг с другом источника электрической силы E , активного сопротивления R , индуктивности L и ёмкости C . Для цепи, находящейся в равновесии, основная задача состоит в отыска-

нии токов и потенциалов при приложении электродвижущей силы в момент времени $t = 0$.

Зависимость тока $i(t)$, протекающего по сопротивлению (активному, индуктивному, ёмкостному), от напряжения $U(t)$ на этом сопротивлении называют *вольтамперной характеристикой*. При графическом изображении вольтамперной характеристики по оси абсцисс откладывают напряжение, по оси ординат – ток. Если график вольтамперной характеристики является прямой линией, то такую характеристику называют *линейной*; если график не является прямой линией – *нелинейной*. Сопротивления, вольтамперные характеристики которых являются линейными, называют *линейными сопротивлениями*. Электрические цепи, в которые входят только линейные сопротивления, называют *линейными цепями*. В дальнейшем будем рассматривать линейные электрические цепи.

Ток $i(t)$ и напряжение $u(t)$ на концах элемента линейной электрической цепи связаны соотношениями:

$$u(t) = Ri(t), \quad (2.4.1)$$

если цепь содержит только активное сопротивление R ;

$$u(t) = L \frac{di(t)}{dt}, \quad (2.4.2)$$

если цепь содержит только индуктивность L ;

$$u(t) = \frac{1}{C} \left(\int_0^t i(\tau) d\tau + q_0 \right), \quad (2.4.3)$$

если цепь содержит только ёмкость C (здесь q_0 – начальный заряд на обкладках конденсатора).

Пусть ток $i(t)$ и напряжение $u(t)$ являются оригиналами и имеют изображения:

$$i(t) = I(p), \quad u(t) = U(p).$$

Функцию $I(p)$ называют *операторным током*, $U(p)$ – *операторным напряжением*. По теореме о дифференцировании оригинала найдём

$$\frac{di(t)}{dt} = pI(p) - i(0);$$

по теореме об интегрировании оригинала, найдём:

$$\int_0^t i(\tau) d\tau = \frac{I(p)}{p}.$$

Тогда соотношения (2.4.1), (2.4.2), (2.4.3) можно записать в операторном виде

$$\begin{aligned}U(p) &= RI(p), \\U(p) &= L[pI(p) - i(0)], \\U(p) &= \frac{1}{Cp}(I(p) + q_0).\end{aligned}$$

В частности, если $i(0) = 0$, $q_0 = 0$, т.е. в начальный момент отсутствуют ток и начальный заряд на обкладках конденсатора (соответствует задачам включения), то соотношения упрощаются и будут иметь вид:

$$U(p) = RI(p), \quad U(p) = LpI(p), \quad U(p) = I(p) \cdot \frac{1}{Cp}.$$

Приведённые операторные соотношения объединяются в форме «операторного закона Ома»:

$$U(p) = Z(p)I(p).$$

Здесь $Z(p)$ – операторное сопротивление.

Объединяя эти три случая, получим дифференциальное уравнение для тока $i(t)$ в колебательном контуре:

$$L \frac{di(t)}{dt} + Ri(t) + \frac{1}{C} \int_0^t i(\tau) d\tau = u(t). \quad (2.4.4)$$

Рассмотрим случай, когда $i(0) = 0$, т.е. ток в начальный момент равен нулю. Слагаемое $\frac{1}{C} \int_0^t i(\tau) d\tau$ в формуле (2.4.4) представляет напряжение на обкладках конденсатора. Оно показывает, что при $t = 0$ это напряжение равно нулю. Тогда заряды на обкладках конденсатора отсутствуют. При сделанных предположениях операторное уравнение для (2.4.4) будет иметь вид

$$LpI(p) + RI(p) + \frac{I(p)}{Cp} = U(p). \quad (2.4.5)$$

Из уравнения (4.4.5) найдём операторный ток $I(p)$:

$$I(p) = \frac{U(p)}{Z(p)} = \frac{U(p)}{R + Lp + \frac{1}{Cp}}.$$

По найденному операторному току $I(p)$ можно восстановить и сам ток, используя теорему обращения:

$$i(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\gamma-j\infty}^{\gamma+j\infty} \frac{U(p)}{Z(p)} e^{pt} dp. \quad (2.4.6)$$

(здесь $j = \sqrt{-1}$ – мнимая единица).

Вычисление интеграла в (2.4.6) является достаточно сложной задачей. В каждом конкретном случае удобно для восстановления тока по его изображению использовать таблицы соответствия.

Рассмотрим случай ненулевых начальных условий. Пусть $i(0) = i_0$, q_0 – начальный заряд на обкладках конденсатора. Тогда дифференциальное уравнение контура имеет вид

$$L \frac{di(t)}{dt} + Ri(t) + \frac{1}{C} \int_0^t i(\tau) d\tau + \frac{q_0}{C} = u(t). \quad (2.4.7)$$

К падению напряжения на обкладках конденсатора добавилось слагаемое $\frac{q_0}{C}$. Переходим к операторному уравнению:

$$L(pI(p) - i_0) + RI(p) + \frac{1}{Cp} I(p) + \frac{q_0}{Cp} = U(p). \quad (2.4.8)$$

Откуда

$$I(p) = \frac{U(p)}{Z(p)} + \frac{Li_0 + \frac{q_0}{Cp}}{Z(p)},$$

где $Z(p) = Lp + R + \frac{1}{Cp}$ – операторное сопротивление.

К операторному току добавилось слагаемое $\frac{Li_0 Cp + q_0}{CpZ(p)}$.

Этот ток соответствует заданным начальным условиям и называется *током короткого замыкания*. Он получается, если в уравнении тока положить $u(t) = 0$, т.е. накоротко замкнуть контур.

Далее по операторному току $I(p)$ находим сам ток:

$$i(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\gamma-j\infty}^{\gamma+j\infty} \left[\frac{U(p)}{Z(p)} + \frac{Li_0 Cp + q_0}{CpZ(p)} \right] e^{pt} dp.$$

Заметим, что при последовательном соединении двух элементов с операторными сопротивлениями $Z_1(p), Z_2(p)$:

$$\begin{aligned} U_1(p) &= Z_1(p)I(p), & U_2(p) &= Z_2(p)I(p), \\ U(p) &= U_1(p) + U_2(p), & Z(p) &= Z_1(p) + Z_2(p). \end{aligned}$$

Если последовательно соединены R, L и C , то

$$Z(p) = R + Lp + \frac{1}{Cp}.$$

При параллельном соединении двух элементов с операторными сопротивлениями $Z_1(p), Z_2(p)$:

$$\begin{aligned} U(p) &= Z_1(p)I_1(p) = Z_2(p)I_2(p), \\ I_1(p) + I_2(p) &= I(p), & \frac{1}{Z(p)} &= \frac{1}{Z_1(p)} + \frac{1}{Z_2(p)}, \end{aligned}$$

$\frac{1}{Z(p)}$ называют *полной операторной проводимостью*.

Рассмотрим некоторые частные случаи.

1. Пусть в колебательный контур включается постоянный ток: $u(t) = E$.

Тогда $U(p) = \frac{E}{p}$ и операторный ток будет равен

$$I(p) = \frac{U(p)}{Z(p)} = \frac{E}{p(R + Lp + \frac{1}{Cp})} = \frac{E}{Lp} + \frac{1}{p^2 + \frac{R}{L}p + \frac{1}{LC}}.$$

Используя таблицы, найдём:

$$1) i(t) = \frac{E}{L\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}} \cdot e^{-\frac{R}{2L}t} \cdot \sin\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}t, \text{ если } \frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2} > 0.$$

$$2) i(t) = \frac{E}{L}t \cdot e^{-\frac{R}{2L}t}, \text{ если } \frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2} = 0.$$

$$3) i(t) = \frac{E}{L\sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}}} e^{-\frac{R}{2L}t} \cdot \text{sh}\sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}} \cdot t, \text{ если } \frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2} < 0.$$

Случай (1) соответствует затухающим гармоническим колебаниям; случай (2) и случай (3) – затухающим непериодическим процессам.

Рассмотрим ещё одну задачу.

Пусть колебательный контур состоит из R , L и C . В этот контур в момент $t = 0$ включают некоторую электродвижущую силу $u(t)$. Требуется найти напряжение на зажимах катушки.

Пусть $i(t)$ – ток, идущий по контуру, $I(p)$ – его изображение (операторный ток). Обозначим через $U(p)$ – изображение для функции $u(t)$; $v(t)$ – напряжение на зажимах катушки, $V(p)$ – его изображение. Тогда операторный ток, как было показано выше, будет равен

$$I(p) = \frac{U(p)}{Z(p)} = \frac{U(p)}{R + Lp + \frac{1}{Cp}}.$$

Так как

$$v(t) = L \frac{di(t)}{dt}, \text{ то } V(p) = LpI(p).$$

Следовательно,

$$V(p) = LpI(p) = Lp \frac{U(p)}{R + Lp + \frac{1}{Cp}} = \frac{p^2 U(p)}{p^2 + \frac{Rp}{L} + \frac{1}{CL}}.$$

Применяя теорему обращения, найдём

$$v(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\gamma-j\infty}^{\gamma+j\infty} \frac{p^2 U(p)}{p^2 + \frac{Rp}{L} + \frac{1}{CL}} \cdot e^{pt} dp.$$

В частности, если $u(t) = u_0 \sigma_0(t)$, то $U(p) = \frac{u_0}{p}$. Тогда

$$V(p) = \frac{pu_0}{p^2 + \frac{Rp}{L} + \frac{1}{CL}}.$$

Обозначим $\frac{R}{2L} = a$, $\frac{1}{CL} = w$ и будем считать, что R достаточно мало, чтобы пренебречь величиной a^2 по сравнению с w^2 . Тогда выражение для $V(p)$ можно привести к виду

$$V(p) = \frac{pu_0}{(p+a)^2 + w^2}$$

или

$$V(p) = \frac{u_0(p+a)}{(p+a)^2 + w^2} - \frac{au_0}{(p+a)^2 + w^2}.$$

По таблице соответствий найдём

$$v(t) = u_0 e^{-at} \left(\cos wt - \frac{a}{w} \sin wt \right) \sigma_0(t).$$

Если величина a мала в сравнении с w и ею можно пренебречь, то получим ещё более простое выражение для $v(t)$:

$$v(t) = u_0 e^{-at} \cos wt \cdot \sigma_0(t).$$

Ответы к упражнениям для самостоятельного решения

§ 2.1. 1.1. $y(t) = e^{-t} - e^{-2t}$.

1.2. $y(t) = -2 \sin t - \cos 2t$.

1.3. $y(t) = -\frac{1}{2} e^{2t} - \frac{1}{2} e^{-2t} - 1$.

1.4. $y(t) = 1 + e^{2t} - 2e^t - t^2 e^{2t}$.

1.5. $y(t) = \frac{1}{3} (4 \sin t + 12 \cos 2t - 4 \sin 2t)$.

1.6. $y(t) = e^t$.

2.a) $x(t) = e^t \cos t, \quad y(t) = e^t \sin t$.

2.б) $x(t) = e^t, \quad y(t) = e^t$.

2.в) $x(t) = 4t + 2 - 2 \cos t - 3 \sin t, \quad y(t) = 2 \sin t - 2t$.

§ 2.3. 1.1. $y(t) = \begin{cases} 1 - e^{-t}, & 0 < t < 2, \\ e^{-(t-2)} - e^{-t} = e^{-t}(e^2 - 1), & t > 2. \end{cases}$

1.2. $y(t) = \begin{cases} 0, & 0 < t < 1, \\ 1 - \cos(t-1), & 1 < t < 4, \\ -\cos(t-1) + \cos(t-3), & t > 4. \end{cases}$

Приложение А

Таблица А.1 – Таблица основных формул соответствия

Номер формулы	Оригинал	Изображение
1	1	$\frac{1}{p}$
2	$e^{\alpha t}$	$\frac{1}{p - \alpha}$
3	$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$
4	$\cos \omega t$	$\frac{p}{p^2 + \omega^2}$
5	$sh \omega t$	$\frac{\omega}{p^2 - \omega^2}$
6	$ch \omega t$	$\frac{p}{p^2 - \omega^2}$
7	$e^{\alpha t} \cdot \sin \omega t$	$\frac{\omega}{(p - \alpha)^2 + \omega^2}$
8	$e^{\alpha t} \cdot \cos \omega t$	$\frac{p - \alpha}{(p - \alpha)^2 + \omega^2}$
9	$e^{\alpha t} \cdot \sin(\omega t + \varphi)$	$\frac{\omega \cos \varphi + (p - \alpha) \sin \varphi}{(p - \alpha)^2 + \omega^2}$
10	$e^{\alpha t} \cdot \cos(\omega t + \varphi)$	$\frac{(p - \alpha) \cos \varphi - \omega \sin \varphi}{(p - \alpha)^2 + \omega^2}$
11	t	$\frac{1}{p^2}$
12	t^n	$\frac{n!}{p^{n+1}}$
13	$t^n \cdot e^{\alpha t}$	$\frac{n!}{(p - \alpha)^{n+1}}$
14	$t \cdot \sin \omega t$	$\frac{2p\omega}{(p^2 + \omega^2)^2}$
15	$t \cdot \cos \omega t$	$\frac{p^2 - \omega^2}{(p^2 + \omega^2)^2}$

Продолжение таблицы А.1

16	$t \cdot sh \omega t$	$\frac{2p\omega}{(p^2 - \omega^2)^2}$
17	$t \cdot ch \omega t$	$\frac{p^2 + \omega^2}{(p^2 - \omega^2)^2}$
18	$t^k (k > -1)$	$\frac{\Gamma(k+1)}{p^{k+1}}$

ЛИТЕРАТУРА

1. Араманович И.Г., Лунц Г.Л., Эльсгольц Л.З. Операционное исчисление.– М: Наука, 1968. – 416с.
2. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления. Части 1, 2.– М: Наука 1976.
3. Пчелин В.К. Специальные разделы высшей математики.– М: Наука, 1985.–576с.
4. Анго А. Математика для электро- и радиоинженеров.– М: Наука, 1964.
5. Деч Г. Руководство к практическому применению преобразований Лапласа.– М: Наука, 1965.
6. Иванов В.А. (Медведев В.С., Чемоданов Б.К., Ющенко А.С.).– Математические основы теории автоматического регулирования: т.2.– М.: Высш. шк., 1977.– 455с.

Учебное издание

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

ОПЕРАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ И ЕГО ПРИМЕНЕНИЯ

Учебно-методическое пособие

Составители: Подолян С.В.
Юрченко И.В.

Редактор Т.Л. Матеуш
Технический редактор А.А. Щербакова

Подписано в печать 14.01.09. Формат 60x84 1/16.
Бумага офсетная. Гарнитура Таймс. Печать трафаретная.
Усл.печ.л. 3,3 Уч.-изд.л. 3,5
Тираж 80 экз. Заказ 4.

Учреждение образования
«Могилевский государственный университет продовольствия».
212027, Могилев, пр-т Шмидта, 3.
ЛИ № 02330/0131913 от 08.02.2007.

Отпечатано на ризографе редакционно-издательского отдела
учреждения образования
«Могилевский государственный университет продовольствия».
212027, Могилев, пр-т Шмидта, 3.