Министерство образования республики Беларусь

Учреждение образования
«Могилевский государственный университет продовольствия»

Кафедра высшей математики

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

Методические указания
для подготовки к аудиторной контрольной работе
студентов всех специальностей
заочной формы получения высшего образования

В трех частях

Часть 3

Могилев
МГУП
2016

УДК 519.21
ББК 22.171

Рассмотрено и рекомендовано к изданию
на заседании кафедры высшей математики
Протокол № 3 от 23. 10. 2015 г.

Составители:
д.ф.-м. н., доцент А.М. Гальмак
старший преподаватель И.В. Юрченко
старший преподаватель О.А. Шендрикова
ассистент Ю.М. Гребенцов

Рецензент
к.ф.-м. н., доцент В.Э. Гарист

Методические указания содержат теоретические вопросы, задания для самостоятельного решения и образцы решения заданий, вопросы для подготовки к экзамену и список используемых источников.

УДК51
ББК 22.171

© Учреждение образования
«Могилевский государственный
университет продовольствия», 2016

Студенты второго курса заочной формы получения высшего образования на базе общего среднего образования и третьего курса на базе среднего специального образования для выполнения аудиторной контрольной работы по курсу «Высшая математика», «Математика» должны **знать и уметь**:

Тема 1. Числовые и функциональные ряды

1 Находить члены числовых рядов.

2 Определять, какой ряд является знакопеременным, знакочередующимся, гармоническим, обобщенным гармоническим.

3 Знать определение сходящегося ряда.

4 Знать и уметь применять необходимый признак сходимости ряда.

5 Знать и уметь применять достаточные признаки сходимости положительных рядов: признаки сравнения, признак Даламбера, признак Коши, интегральный признак сходимости.

6 Знать и уметь применять признак Лейбница сходимости знакочередующегося ряда.

7 Определять коэффициенты степенного ряда.

8 Находить радиус сходимости степенного ряда.

9 Находить интервал сходимости степенного ряда.

10 Находить область сходимости степенного ряда.

11 Знать определение ряда Тейлора, ряда Маклорена.

Задачи для самостоятельного решения

1 Записать первые пять членов ряда по заданному общему члену:

а) $a_n = \dfrac{n}{3n+2}$; б) $a_n = \dfrac{n+1}{n!}$ где $n! = 1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot n$; в) $a_n = \dfrac{(-1)^{n+1}}{2n+1}$.

2 Исследовать сходимость ряда, используя следствие из необходимого признака сходимости ряда:

а) $\sum\limits_{\text{ï}=1}^{\infty}\dfrac{3\text{ï}-1}{4\text{ï}+3}$; б) $\sum\limits_{\text{ï}=1}^{\infty} n\sin\dfrac{1}{n}$.

3 Исследовать сходимость ряда с помощью достаточных признаков сходимости:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2n+1}{3^n}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n!}{2n+1}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{n^3+3}$; г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{3n-1}{n^2+2}$;

д) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{n+1}{4n-3}\right)^n$; е) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{n\ln^3 n}$.

4 Исследовать на абсолютную или условную сходимость ряд:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n+3}}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n}{2n+5}$.

5 Определить коэффициенты степенного ряда:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n5^n x^n$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x+1)^n}{2^n(n+3)}$.

6 Найти радиус сходимости степенного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x-2)^n}{(5n+1)3^n}$.

7 Найти интервал сходимости степенного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n^2+1}x^n$.

8 Найти область сходимости степенного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x+3)^n}{n^3}$.

9 Найти первые четыре члена ряда Тейлора для функции $f(x)=\frac{1}{x+3}$ в окрестности точки $x = 2$.

Образцы решений

Задание 1. Записать первые три члена ряда, общий член которого

$$a_n=\frac{(-1)^n}{(3n-2)\cdot 5^n}$$

Решение. Полагая в данной формуле n = 1, 2, 3, получаем:

$$a_1=\frac{(-1)^1}{(3\cdot 1-2)\cdot 5^1}=-\frac{1}{1\cdot 5}=-\frac{1}{5};$$

$$a_2=\frac{(-1)^2}{(3\cdot 2-2)\cdot 5^2}=\frac{1}{4\cdot 25}=\frac{1}{100};$$

$$a_3=\frac{(-1)^3}{(3\cdot 3-2)\cdot 5^3}=-\frac{1}{7\cdot 125}=-\frac{1}{875}.$$

Задание 2. Найти формулу общего члена ряда

$$1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\dots$$

Решение. Каждый член данного ряда представляет собой дробь, числитель которой равен единице, а знаменатель – квадрат натурального числа. Тогда $a_n = \frac{1}{n^2}$. Данный ряд можно записать также в виде $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

Задание 3. Исследовать ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{2n+1}$ на сходимость.

Решение. Заметим, что предел общего члена рассматриваемого ряда $\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{2n+1} = \frac{1}{2} \neq 0$. Поэтому, согласно необходимому признаку сходимости, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{2n+1}$ не может сходиться, т.е. он расходится.

Задание 4. Исследовать на сходимость ряд

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{12} + \frac{1}{32} + \frac{1}{80} + \ldots$$

Решение. Заданный ряд запишем в виде

$$1 + \frac{1}{2\cdot 2} + \frac{1}{3\cdot 2^2} + \frac{1}{4\cdot 2^3} + \frac{1}{5\cdot 2^4} + \ldots + \frac{1}{n\cdot 2^{n-1}} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n 2^{n-1}}$$

и сравним его с рядом

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}}$ сходится, т.к. является геометрическим рядом со знаменателем $q = \frac{1}{2}$. Кроме того, $\frac{1}{n\cdot 2^{n-1}} \le \frac{1}{2^{n-1}}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$. Значит, согласно признаку сравнения, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\cdot 2^{n-1}}$ сходится.

Задание 5. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n+1}{n^3+5n-1}$.

Решение. Возьмем для сравнения ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, который сходится как обобщенный гармонический ряд, у которого α = 2 > 1.

$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3n+1}{n^3+5n-1} : \dfrac{1}{n^2} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(3n+1)n^2}{n^3+5n-1} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3n^3+n^2}{n^3+5n-1} = 3$. Значит, согласно предельному признаку сравнения, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{3n+1}{n^3+5n-1}$ сходится.

Задание 6. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n}{2^n}$.

Решение. Запишем $a_n = \dfrac{n}{2^n}$. Чтобы получить выражение для a_{n+1}, необходимо в формулу n-го члена ряда подставить $n + 1$ вместо n: $a_{n+1} = \dfrac{n+1}{2^{n+1}}$.

Имеем: $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{\grave{a}_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n+1)2^n}{2^{n+1}n} = \dfrac{1}{2} \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n+1}{n} = \dfrac{1}{2} < 1.$

По признаку Даламбера данный ряд сходится.

Задание 7. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n!}{7^{n+1}}$.

Решение. $a_n = \dfrac{n!}{7^{n+1}}$, $a_{n+1} = \dfrac{(n+1)!}{7^{n+2}}$.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!\, 7^{n+1}}{7^{n+2}\, n!} = \frac{1}{7} \lim_{n\to\infty} (n+1) = \infty.$$

Данный ряд расходится.

Задание 8. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{n}{3n+1}\right)^n$.

Решение. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\dfrac{n}{3n+1}\right)^n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{3n+1} = \dfrac{1}{3} < 1.$

По признаку Коши ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{n}{3n+1}\right)^n$ сходится.

Задание 9. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\arcsin \dfrac{1}{n}\right)^n$.

Решение. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \arcsin \dfrac{1}{n} = 0 < 1$. Данный ряд сходится.

Задание 10. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}$.

Решение

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{2^n}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n} = \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} = \frac{1}{2}\cdot e>1.$$

Согласно признаку Коши ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}$ расходится.

Задание 11. Исследовать на сходимость ряд

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}+\ldots$$

Решение. Данный ряд является знакочередующимся, исследуем его по признаку Лейбница:

а)$1>\frac{1}{2}>\frac{1}{3}>\ldots>\frac{1}{n}>\ldots$;б) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$.

Итак, данный ряд сходится.

Выясним вопрос об условной или абсолютной сходимости ряда $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}+\ldots$.

Ряд сходится условно, т.к. он сходится по признаку Лейбница, а ряд, составленный из его модулей $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots$, расходится, так как является гармоническим рядом.

Задание 13. Найти радиус и интервал сходимости степенного ряда и исследовать сходимость ряда на концах интервала сходимости $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+2)^n}{5^n\sqrt{n+3}}$.

Решение. Для определения радиуса сходимости степенного ряда воспользуемся формулой: $R = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$.

Так как $a_n = \frac{1}{5^n\sqrt{n+3}}$ и $a_{n+1} = \frac{1}{5^{n+1}\sqrt{n+4}}$, то

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{5^{n+1}\sqrt{n+4}}{5^n\sqrt{n+3}}\right| =5\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+4}}{\sqrt{n+3}} =5\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{n+4}{n+3}} =5\sqrt{\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{4}{n}}{1+\frac{3}{n}}} =5.$$

Итак, радиус сходимости ряда $R = 5$.

Определим интервал сходимости данного степенного ряда:

$$|x+2|<5 \Rightarrow -5<x+2<5 \Rightarrow -7<x<3.$$

Итак, (– 7; 3) – интервал сходимости степенного ряда.

Исследуем сходимость ряда на концах интервала сходимости, то есть в точках $x = -7$ и $x = 3$.

Пусть $x = -7$. Подставим это значение в исследуемый степенной ряд. Получим знакочередующийся числовой ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-5)^n}{5^n\sqrt{n+3}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n+3}}.$$

Так как $\frac{1}{2}>\frac{1}{\sqrt{5}}>\frac{1}{\sqrt{6}}>\ldots$ и $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n+3}}=0$, то согласно признаку Лейбница данный ряд сходится. Таким образом, $x = -7$ принадлежит области сходимости степенного ряда.

Пусть $x = 3$. Подставив это значение в исследуемый степенной ряд, получим числовой ряд с положительными членами:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n}{5^n\sqrt{n+3}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n+3}}.$$

Сравним данный ряд с обобщенным гармоническим рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ при $p=\frac{1}{2}<1$, который является расходящимся. Для исследования на сходимость применим предельный признак сравнения. Получим

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+3}}=1\neq 0.$$

Следовательно, оба ряда ведут себя одинаково и исследуемый ряд, как и вспомогательный ряд, расходится. Таким образом, $x = 3$ не принадлежит области сходимости степенного ряда.

Поэтому областью сходимости исследуемого степенного ряда является полуинтервал [– 7; 3).

Ответ: $R = 5$, [– 7; 3).

Тема 2. Кратные и криволинейные интегралы

1 Знать определения двойного и тройного интегралов и их свойства.
2 Уметь вычислять повторный интеграл.
3 Уметь расставлять пределы интегрирования в двойном интеграле.
4 Уметь вычислять площадь фигур с помощью двойного интеграла.

5 Знать определение криволинейного интеграла первого рода и его свойства.

6 Уметь вычислять криволинейный интеграл первого рода.

7 Знать определение криволинейного интеграла второго рода и его свойства.

8 Уметь вычислять криволинейный интеграл второго рода.

9 Знать и уметь применять формулу Грина.

Задачи для самостоятельного решения

1 Вычислить повторный интеграл:

а) $\int\limits_{2}^{4} dx \int\limits_{1}^{2} xydy$;

б) $\int\limits_{1}^{e} dx \int\limits_{4}^{6} \frac{y}{x} dy$;

в) $\int\limits_{3}^{4} dx \int\limits_{0}^{2} (x+y)dy$.

2 Расставить пределы интегрирования в том и другом порядке в повторном интеграле, к которому сводится двойной интеграл $\iint\limits_{(s)} f(x,y)dxdy$, где S ограничена линиями $y = x^2$, $y = 4$.

3 Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями:

$$xy = 4,\ x + y - 5 = 0.$$

4 Вычислить $\int\limits_{AB} \frac{yds}{\sqrt{x}}$, если AB – дуга полукубической параболы $y^2 = \frac{4}{9}x^3$ от $A(3,\ 2\sqrt{3})$ до $B(4;\ 2)$.

5 Вычислить криволинейный интеграл $\int\limits_{AB} (x^2 - y^2)dx + xydy$, если путь от $A(1;\ 1)$ до $B(3;\ 4)$ – отрезок прямой AB.

Образцы решений

Задание 1. Сделать чертёж области интегрирования. Изменить порядок интегрирования в двойном интеграле $I = \int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{8y^3}^{2y+6} f(x,y)dx$.

Решение

Зная пределы интегрирования, найдем границы области интегрирования D: $y = 0$, $y = 1$, $x = 8y^3$, $x = 2y + 6$ и построим их. Область D располагается в полосе $0 \le y \le 1$ и ограничена слева кубической параболой $x = 8y^3$, справа – прямой $x = 2y + 6$ (рисунок 1).

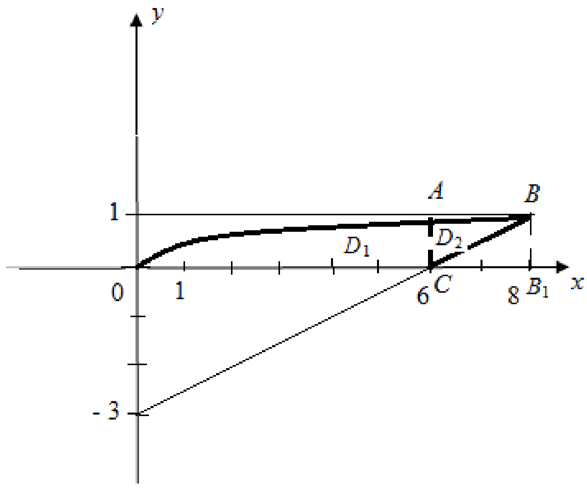


Рисунок 1

Спроектируем область D на ось Ox. Проекцией является отрезок OB_1, внутри которого находятся проекция точки A и точка C. Поэтому при изменении порядка интегрирования область D необходимо разбить прямой $x = 6$ на две: часть D_1 и D_2, в каждой из которых любая граница задается только одним уравнением.

Определим теперь новые пределы интегрирования. В области D_1 переменная x изменяется от 0 до 6. Уравнение нижней границы OC задается уравнением $y = 0$. Уравнение верхней границы OA находим, решая уравнение кубической параболы $x = 8y^3$ относительно y: $y = \frac{1}{2}\sqrt[3]{x}$.

В области D_2 переменная x изменяется от 6 до 8. Уравнение нижней границы CB $y = \frac{x-6}{2}$ (разрешили относительно y уравнение прямой $x = 2y + 6$); уравнение верхней границы AB: $y = \frac{1}{2}\sqrt[3]{x}$.

Таким образом, двойной интеграл I при изменении порядка интегрирования равен сумме двух интегралов:

$$I = \int_0^6 dx \int_0^{\frac{\sqrt[3]{x}}{2}} f(x;y)dy + \int_6^8 dx \int_{\frac{x-6}{2}}^{\frac{\sqrt[3]{x}}{2}} f(x;y)dy.$$

Задание 2. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями: $x^2 + y^2 = 9$, $z = y^2$, $z = 0$.

Решение

По уравнениям заданных поверхностей изобразим схематично тело. Поверхность $x^2 + y^2 = 9$– цилиндр с образующими параллельными оси Oz; $z = y^2$–

параболический цилиндр с образующими параллельными оси *Ox*; $z = 0$ – плоскость *xOy*.

Тело, ограниченное данными поверхностями, представляет собой правильную область *V*, ограниченную снизу плоскостью $z = 0$, сверху – поверхностью $z = y^2$ (рисунок 2) и проектируется на плоскость *XOY* в плоскую область *D*, представляющую собой круг, ограниченный окружностью $x^2 + y^2 = 9$ (рисунок 3).

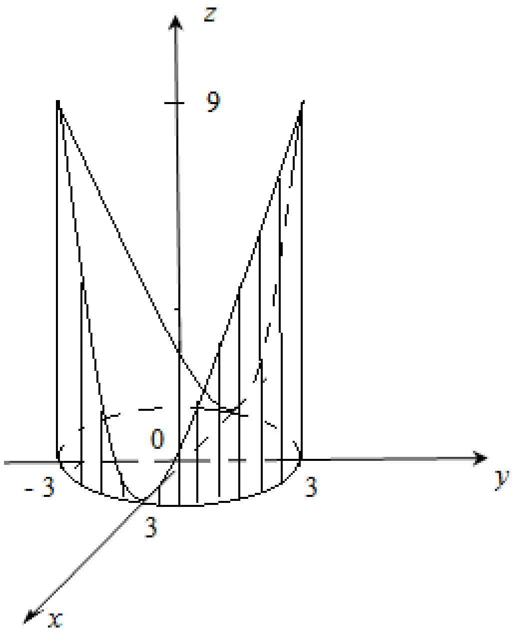


Рисунок 2

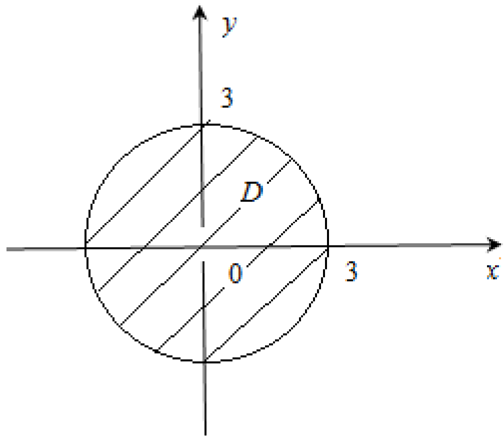


Рисунок 3

Объем тела найдем с помощью тройного интеграла по формуле:

$$V = \iiint\limits_V dxdydz\,.$$

Так как проекцией тела на плоскость *XOY* является круг, то для данной области *V* этот интеграл проще вычисляется в цилиндрических координатах, связанных с декартовыми координатами формулами:

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi, \\ y = r\sin\varphi, \\ z = z, \end{cases}$$ где r – полярный радиус, φ – полярный угол.

Для данной области *V*: $0 \le \varphi \le 2\pi,\ 0 \le r \le 3,\ 0 \le z \le y^2,\ y^2 = r^2\sin^2\varphi$.

Следовательно,

$$V = \iiint\limits_V r dr d\varphi dz = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^3 r dr \int\limits_0^{r^2\sin^2\varphi} dz = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^3 r dr \cdot z\Big|_0^{r^2\sin^2\varphi} = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^3 r^3 \sin^2\varphi\, dr =$$

$$=\int_0^{2\pi}\sin^2\varphi d\varphi\cdot\frac{r^4}{4}\Bigg|_0^3=\frac{81}{4}\cdot\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(1-\cos 2\varphi)d\varphi=\frac{81}{8}\left(\varphi-\frac{1}{2}\sin 2\varphi\right)\Bigg|_0^{2\pi}=$$

$$=\frac{81}{8}\left(2\pi-\frac{1}{2}\sin 4\pi+\frac{1}{2}\sin 0\right)=\frac{81}{8}\cdot 2\pi=\frac{81}{4}\pi \quad \text{(ед.куб.)}$$

Задание 3. Вычислить $\int\limits_L (x-y)ds,$ где L – отрезок прямой от $A(0;\,0)$ до $B(4;\,3)$.

Решение

Уравнение прямой AB имеет вид $y=\frac{3}{4}x.$ Находим $y'=\frac{3}{4}$ и, следовательно,

$$\int\limits_L (x-y)ds=\int_0^4 (x-\frac{3}{4}x)\sqrt{1+\frac{9}{16}}dx=\frac{5}{16}\int_0^4 xdx=\frac{5}{32}x^2\Bigg|_0^4=\frac{5}{2}.$$

Задание 4. Вычислить криволинейный интеграл $\int\limits_{AB}(x-y)dx+dy$, где AB – дуга параболы $y=2x^2$ от точки $A(1;\,2)$ до точки $B\,(2;\,8)$.

Решение

Изобразим кривую, вдоль которой ведется интегрирование (рисунок 4).

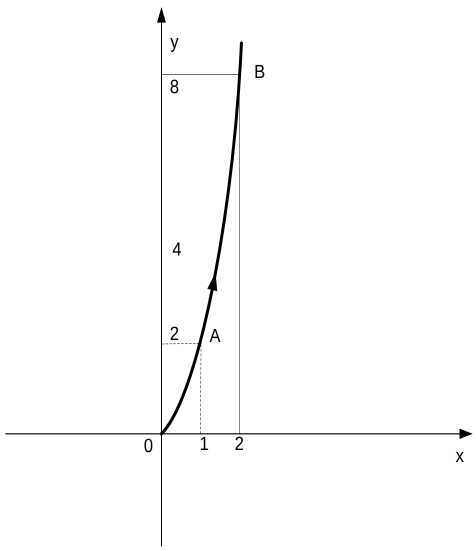


Рисунок 4

Вычисление криволинейного интеграла $\int\limits_{AB}(x-y)dx+dy$ сведем к вычислению определенного интеграла по формуле

$$\int\limits_{AB}P(x;y)dx+Q(x;y)dy = \int\limits_{x_A}^{x_B}(P(x;y(x))+Q(x;y(x))\cdot y'(x))dx.$$

Так как AB – дуга параболы, заданной уравнением $y=2x^2$ от точки $A(1;\,2)$ до точки $B(2;\,8)$, то $dy=y'dx=(2x^2)'dx=4xdx$, а переменная x меняется в пределах от 1 до 2. Следовательно,

$$\int\limits_{AB}(x-y)dx+dy=\int\limits_{1}^{2}((x-2x^2)dx+4xdx)=\int\limits_{1}^{2}(5x-2x^2)dx=\left(\frac{5x^2}{2}-\frac{2x^3}{3}\right)\Bigg|_1^2=$$

$$=\left(10-\frac{16}{3}\right)-\left(\frac{5}{2}-\frac{2}{3}\right)=10-\frac{16}{3}-\frac{5}{2}+\frac{2}{3}=\frac{15}{2}-\frac{14}{3}=\frac{45-28}{6}=\frac{17}{6}.$$

Тема 3. Теория вероятностей

1 Знать и уметь применять основные формулы комбинаторики.

2 Знать классическое, статистическое и геометрическое определения вероятности.

3 Знать и уметь применять теоремы сложения и умножения вероятностей.

4 Знать и уметь применять формулы полной вероятности и Байеса.

5 Знать и уметь применять формулу Бернулли.

6 Знать и уметь применять локальную и интегральную теоремы Муавра-Лапласа.

7 Знать и уметь применять формулу Пуассона.

8 Знать определение случайной величины.

9 Знать определение функции распределения и ее свойства.

10 Знать определение плотности распределения вероятности и ее свойства.

11 Знать определение математического ожидания, дисперсии и среднего квадратического отклонения случайной величины и их свойства.

Задачи для самостоятельного решения

1 Порядок выступления 8 участников конкурса определяется жребием. Сколько различных вариантов жеребьевки при этом возможно?

2 Расписание занятий одного дня состоит из 4 дисциплин. Сколькими способами может быть составлено расписание занятий при выборе из 15 дисциплин?

3 В шахматном турнире участвовало 12 шахматистов, каждый из них сыграл с каждым по одной партии. Сколько всего сыграно партий?

4 Из 20 студентов 5 имеют спортивные разряды. Какова вероятность того, что выбранные наудачу 2 студента – разрядники?

5 Среди 1000 новорожденных оказалось 487 девочек. Найти относительную частоту рождения девочки.

6 На отрезке L длины 30 см помещен меньший отрезок $l = 15$ см. Найти вероятность того, что точка, наудачу поставленная на больший отрезок, попадет также и на меньший отрезок. Предполагается, что вероятность попадания точки на отрезок пропорциональна длине отрезка и не зависит от его расположения.

7 Вероятность того, что студент сдаст первый экзамен, равна 0,9; второй – 0,8; третий – 0,7. Найти вероятность того, что студентом будут сданы: а) только первый экзамен; б) только один экзамен; в) три экзамена; г) по крайней мере два экзамена; д) хотя бы один экзамен.

8 Среди 1000 лотерейных билетов 25 выигрышных. Найти вероятность того, что два наудачу выбранные билета окажутся выигрышными.

9 В торговую фирму поступили телевизоры от трех поставщиков в отношении 1:4:5. Практика показала, что телевизоры, поступающие от 1-го, 2-го и 3-го поставщиков, не потребуют ремонта в течение гарантийного срока в 98 %, 88 % и 92 % случаев.

1) Найти вероятность того, что поступивший в торговую фирму телевизор не потребует ремонта в течение гарантийного срока.

2) Проданный телевизор потребовал ремонта в течение гарантийного срока. От какого поставщика вероятнее всего поступил этот телевизор?

10 В среднем 20 % пакетов акций на аукционах продаются по первоначально заявленной цене. Найти вероятность того, что из 8 пакетов акций в результате торгов по первоначально заявленной цене: 1) будет продано 2 пакета; 2) не будут проданы 5 пакетов.

11 По результатам проверок налоговыми инспекциями установлено, что в среднем каждое второе частное предприятие региона имеет нарушение финансовой дисциплины. Найти вероятность того, что из 100 зарегистрированных в регионе частных предприятий имеют нарушения финансовой дисциплины: а) 48 предприятий; б) от 48 до 55.

12 Завод отправил на базу 10000 стандартных изделий. Среднее число изделий, повреждаемых при транспортировке составляет 0,02 %. Найти вероятность того, что из 10000 изделий будет повреждено два изделия.

13 Дискретная случайная величина (СВ) X задана законом распределения

X	1	2	3	4
p	0,1	0,2	0,4	0,3

Найти математическое ожидание $M(x)$, дисперсию $D(x)$, функцию распределения $F(x)$ и построить ее график.

14 Случайная величина X задана функцией распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0, \ \ x < 1; \\ \dfrac{x-1}{3}, \ 1 \le x \le 5; \\ 1, \ x > 5. \end{cases}$$

Вычислить вероятности попадания СВ X в интервалы (1,5; 3,5) и (3,5; 5,5).

15 Случайная величина X задана функцией распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0, \ \ x < 1; \\ (x-1)^2, \ 1 \le x \le 2; \\ 1, \ x > 2. \end{cases}$$

Найти плотность распределения СВ X.

16 СВ X подчинена закону распределения с плотностью $f(x)$, причем

$$f(x) = \begin{cases} 0, \ \ x < 0; \\ a(2x - x^2), \ 0 \le x \le 2; \\ 0, \ x > 2. \end{cases}$$

Требуется: 1) найти коэффициент a; 2) найти вероятность попадания СВ X в промежуток (1; 2).

17 Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение СВ X, заданной законом распределения

X	– 3	– 1	1	2	5
p	0,2	0,1	0,3	0,15	0,25

18 СВ X в интервале (0; 3) задана плотностью распределения $f(x) = \dfrac{1}{9}x$, а вне этого интервала $f(x) = 0$. Найти математическое ожидание и дисперсию СВ X.

Образцы решений

Задание 1.Сколько существует способов распределить три премии между десятью сотрудниками отдела: а) одинакового размера; б) разных размеров; в) одинакового размера, если сотрудники могут быть премированы за различные показатели и более одного раза; г) разного размера, если сотрудники могут быть премированы за различные показатели и более одного раза?

Решение. Каждому работнику отдела поставим в соответствие некоторый номер – 1, 2, …, 10. Тогда любая тройка номеров из этого списка соответствует одному варианту распределения премий. Условимся также премии располагать слева направо в порядке убывания, когда они различаются по размеру.

а) если премии одинакового размера, то наборы номеров, например, (1, 2, 3); (1, 3, 2); (2, 1, 3); (2, 3, 1) неразличимы (они соответствуют факту награждения первых трёх сотрудников по списку). Поэтому здесь важен только состав, порядок расположения элементов в наборе роли не играет. Значит, способов распределить три премии одинакового размера столько же, сколько сочетаний «из 10 по 3», $C_{10}^{3}=\frac{10!}{7!3!}=\frac{10\cdot 9\cdot 8}{3\cdot 2\cdot 1}=120$.

б) если премии разного размера, то наборы номеров, например, (1, 2, 3); (1, 3, 2) разные (для 2-го и 3-го сотрудников). Поэтому здесь важен не только состав, но и порядок расположения элементов в наборе. Значит, способов распределить три премии разного размера столько же, сколько размещений «из 10 по 3», $A_{10}^{3}=\frac{10!}{(10-3)!}=\frac{10!}{7!}=\frac{10\cdot 9\cdot 8}{1}=720$.

в) если премии одинакового размера, а сотрудники могут быть премированы и более одного раза, то наборы номеров, например (1, 1, 3); (1, 3, 1), неразличимы. В обоих случаях 2 премии получил работник с № 1 и 1 премию – работник № 3. Значит, способов распределить три премии одинакового размера в этом случае столько же, сколько существует сочетаний с повторениями «из 10 по 3», $\overline{C}_{10}^{3}=\frac{(10+3-1)!}{(10-1)!3!}=\frac{12!}{9!3!}=\frac{12\cdot 11\cdot 10}{3\cdot 2\cdot 1}=220$

г) если премии разного размера, а сотрудники могут быть премированы и более одного раза, то наборы номеров, например (1, 1, 3); (1, 3, 1), различные. В первом варианте 1-й работник имеет премию максимальную и 2-ю по величине, во 2-м варианте 1-й работник имеет премию максимальную и 3-ю по величине. Значит, наборы представляют собой размещения с повторениями. Поэтому способов распределить три премии разного размера, столько же, сколько существует размещений с повторениями «из 10 по 3», $\overline{A}_{10}^{3}=10^{3}=1000$.

Задание 2. Сколько трехзначных чисел можно составить из множества цифр $\{1,2,3,4,5,6\}$:

а) без повторений; б) с повторениями?

Решение. а) Так как числа 123 и 321 разные, то порядок расположения внутри набора существенен. Поэтому чисел можно составить столько, сколько будет размещений «из 6 по 3», $A_{6}^{3}=\frac{6!}{(6-3)!}=\frac{6!}{3!}=\frac{6\cdot 5\cdot 4}{1}=120$.

б) Если цифры повторяются, то важен и состав, и порядок в наборе. Поэтому чисел можно составить столько, сколько будет размещений с повторениями «из 6 по 3», то есть $\overline{A}_6^3 = 6^3 = 216$.

Задание 3. В отделении банка работают 25 человек, 10 из них мужчины. Для перевода в другое отделение банка необходимо отобрать 5 сотрудников. Какова вероятность того, что среди отобранных сотрудников три женщины?

Решение. Пусть событие A означает, что из 5 отобранных для перевода в другое отделение сотрудников три женщины. Тогда

$$P(A) = \frac{m}{n}.$$

Общее число n способов выбора 5 сотрудников из 25 равно числу сочетаний из 25 по 5, т.е. C_{25}^5. Определим число m исходов благоприятствующих наступлению события A – «среди отобранных 5 сотрудников будут 3 женщины». Число способов выбрать 3 женщины из 15 равно C_{15}^3. Каждому такому выбору соответствует C_{10}^2способов выбора 2-х мужчин из 10. Следовательно, $m = C_{15}^3 C_{10}^2$. Тогда

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{C_{15}^3 \cdot C_{10}^2}{C_{25}^5} = \frac{15! \cdot 10! \cdot 5! \cdot (25-5)!}{3! \cdot (15-3)! \cdot 2! \cdot (10-2)! \cdot 25!} = \frac{15! \cdot 10! \cdot 5! \cdot 20!}{3! \cdot 12! \cdot 2! \cdot 8! \cdot 25!} =$$

$$= \frac{13 \cdot 14 \cdot 15 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 4 \cdot 5}{2 \cdot 21 \cdot 22 \cdot 23 \cdot 24 \cdot 25} = \frac{195}{506} \approx 0{,}38.$$

Ответ: $P(A) = 0{,}38$.

Задание 5. Вероятности попадания в цель каждым из четырёх независимо друг от друга стреляющих стрелков соответственно равны: 0,9; 0,8; 0,6; 0,7. Стрелки выстрелили в цель одновременно. Найти вероятность того, что произойдёт:

а) хотя бы одно попадание;

б) не более двух попаданий.

Решение. Пусть A_i, $i = 1, 2, 3, 4$ – события, означающие попадания в цель каждым из четырёх стрелков соответственно, которые являются независимыми в совокупности. Тогда $P(A_1) = 0{,}8$, $P(A_2) = 0{,}9$, $P(A_3) = 0{,}6$, $P(A_4) = 0{,}7$. Обозначим $\overline{A_i}$, $i = 1, 2, 3, 4$ – события, означающие непопадания в цель каждым из четырёх стрелков.

$P(\overline{A_1}) = 1 - 0{,}8 = 0{,}2$; $P(\overline{A_2}) = 1 - 0{,}9 = 0{,}1$; $P(\overline{A_3}) = 1 - 0{,}6 = 0{,}4$;
$P(\overline{A_4}) = 1 - 0{,}7 = 0{,}3$.

а) Событие, состоящее в попадании в цель хотя бы одним стрелком, есть сумма событий: $A_1 + A_2 + A_3 + A_4$. Противоположным для этого события является событие, состоящее в том, что ни один из стрелков не попадёт в цель. Оно может быть представлено в виде произведения независимых в совокупности событий: $\overline{A_1} \cdot \overline{A_2} \cdot \overline{A_3} \cdot \overline{A_4}$. По теореме о вероятности произведения независимых в совокупности событий имеем:

$$P(A_1 + A_2 + A_3 + A_4) = 1 - P(\overline{A_1 + A_2 + A_3 + A_4}) = 1 - P(\overline{A_1} \cdot \overline{A_2} \cdot \overline{A_3} \cdot \overline{A_4}) =$$
$$= 1 - P(\overline{A_1}) \cdot P(\overline{A_2}) \cdot P(\overline{A_3}) \cdot P(\overline{A_4}) = 1 - 0{,}2 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}3 = 0{,}9976.$$

б) Событие A, состоящее в том, что будет не более двух попаданий, есть сумма несовместных событий, означающих, что попаданий будет или ровно 2, или только 1, или вообще не будет попадания. В символьной записи имеем:

$$A = (A_1 \cdot A_2 \cdot \overline{A_3} \cdot \overline{A_4} + A_1 \cdot \overline{A_2} \cdot A_3 \cdot \overline{A_4} + A_1 \cdot \overline{A_2} \cdot \overline{A_3} \cdot A_4 + \overline{A_1} \cdot A_2 \cdot A_3 \cdot \overline{A_4} +$$

$$+ \overline{A_1} \cdot A_2 \cdot \overline{A_3} \cdot A_4 + \overline{A_1} \cdot \overline{A_2} \cdot A_3 \cdot A_4) + (A_1 \cdot \overline{A_2} \cdot \overline{A_3} \cdot \overline{A_4} + \overline{A_1} \cdot A_2 \cdot \overline{A_3} \cdot \overline{A_4} +$$

$$+ \overline{A_1} \cdot \overline{A_2} \cdot A_3 \cdot \overline{A_4} + \overline{A_1} \cdot \overline{A_2} \cdot \overline{A_3} \cdot A_4) + \overline{A_1} \cdot \overline{A_2} \cdot \overline{A_3} \cdot \overline{A_4}.$$

Применяя теорему о вероятности суммы несовместных событий и теорему о вероятности произведения независимых событий, получим:

$$P(A) = P(A_1 \cdot A_2 \cdot \overline{A_3} \cdot \overline{A_4}) + P(A_1 \cdot \overline{A_2} \cdot A_3 \cdot \overline{A_4}) + P(A_1 \cdot \overline{A_2} \cdot \overline{A_3} \cdot A_4) + P(\overline{A_1} \cdot A_2 \cdot A_3 \cdot \overline{A_4}) +$$

$$+ P(\overline{A_1} \cdot A_2 \cdot \overline{A_3} \cdot A_4) + P(\overline{A_1} \cdot \overline{A_2} \cdot A_3 \cdot A_4) + P(A_1 \cdot \overline{A_2} \cdot \overline{A_3} \cdot \overline{A_4}) + P(\overline{A_1} \cdot A_2 \cdot \overline{A_3} \cdot \overline{A_4}) +$$

$$+ P(\overline{A_1} \cdot \overline{A_2} \cdot A_3 \cdot \overline{A_4}) + P(\overline{A_1} \cdot \overline{A_2} \cdot \overline{A_3} \cdot A_4) + P(\overline{A_1} \cdot \overline{A_2} \cdot \overline{A_3} \cdot \overline{A_4}) =$$

$$= P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(\overline{A_3}) \cdot P(\overline{A_4}) + P(A_1) \cdot P(\overline{A_2}) \cdot P(A_3) \cdot P(\overline{A_4}) +$$

$$+ P(A_1) \cdot P(\overline{A_2}) \cdot P(\overline{A_3}) \cdot P(A_4) + P(\overline{A_1}) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3) \cdot P(\overline{A_4}) +$$

$$+ P(\overline{A_1}) \cdot P(A_2) \cdot P(\overline{A_3}) \cdot P(A_4) + P(\overline{A_1}) \cdot P(\overline{A_2}) \cdot P(A_3) \cdot P(A_4) +$$

$$+ P(A_1) \cdot P(\overline{A_2}) \cdot P(\overline{A_3}) \cdot P(\overline{A_4}) + P(\overline{A_1}) \cdot P(A_2) \cdot P(\overline{A_3}) \cdot P(\overline{A_4}) +$$

$$+ P(\overline{A_1}) \cdot P(\overline{A_2}) \cdot P(A_3) \cdot P(\overline{A_4}) + P(\overline{A_1}) \cdot P(\overline{A_2}) \cdot P(\overline{A_3}) \cdot P(A_4) +$$

$$+ P(\overline{A_1}) \cdot P(\overline{A_2}) \cdot P(\overline{A_3}) \cdot P(\overline{A_4}) = 0{,}8 \cdot 0{,}9 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}3 + 0{,}8 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}3 + 0{,}8 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}7 +$$

$$+ 0{,}2 \cdot 0{,}9 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}3 + 0{,}2 \cdot 0{,}9 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}7 + 0{,}2 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}7 + 0{,}8 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}3 +$$

$$+ 0{,}2 \cdot 0{,}9 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}3 + 0{,}2 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}3 + 0{,}2 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}7 + 0{,}2 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}3 = 0{,}2572.$$

Ответ: а) 0,9976; б) 0,2572.

Задание 6. В цехе работают три станка-автомата, которые штампуют однотипные детали. Производительность станков относится как 2 : 3 : 5. Вероятность брака для первого станка равна 0,05, для второго – 0,03, для третьего – 0,02. Изготовленные детали складывают в один ящик. Найти вероятность того, что:

1) взятая наугад из ящика деталь будет бракованной;

2) наугад взятая бракованная деталь изготовлена на втором станке.

Решение. Пусть A – событие состоящее в том, что взятая наугад из ящика деталь будет бракованной. Можно сделать три предположения:

B_1 – взятая деталь изготовлена первым станком;

B_2 – взятая деталь изготовлена вторым станком;

B_3 – взятая деталь изготовлена третьим станком.

Исходя из того, что производительность станков относится как 2 : 3 : 5, найдем вероятности этих событий:

$$P(B_1) = \frac{2}{10} = 0{,}2;\ P(B_2) = \frac{3}{10} = 0{,}3;\ P(B_3) = \frac{5}{10} = 0{,}5.$$

По условию задачи $P_{B_1}(A) = 0{,}05; P_{B_2}(A) = 0{,}3; P_{B_3}(A) = 0{,}02.$

1) Вероятность события A определяем по формуле полной вероятности:

$$P(A) = P(B_1)P_{B_1}(A) + P(B_2)P_{B_2}(A) + P(B_3)P_{B_3}(A) =$$

$$= 0{,}2 \cdot 0{,}05 + 0{,}3 \cdot 0{,}03 + 0{,}5 \cdot 0{,}02 = 0{,}029.$$

2) Искомую вероятность $P_A(B_2)$ определяем по формуле Байеса:

$$P_A(B_2) = \frac{P(B_2)P_{B_2}(A)}{P(A)} = \frac{0{,}3 \cdot 0{,}03}{0{,}029} = 0{,}31.$$

Ответ: 1) 0,029; 2) 0,31.

Задание 7. Хлопок определённого сорта имеет 60 % коротких волокон. Определите вероятность того, что из 6 случайно взятых волокон будет:

а) хотя бы одно короткое волокно;

б) ровно 3 коротких волокна;

в) не более 3 коротких волокон.

Решение. Так как $n = 6 < 10$, то надо воспользоваться формулой Бернулли. По условию короткие волокна составляют 60 %. Значит, вероятность того, что случайным образом взятое волокно будет коротким, равна $p = 0{,}6$, следовательно, $q = 1 – 0{,}6 = 0{,}4$.

а) Вероятность того, что хотя бы одно из 6 случайно взятых волокон будет коротким, вычисляется по формуле

$P_6(m \geq 1) = 1 – P_6(0) = 1 – q^6 = 1 – 0{,}4^6 = 1 – 0{,}004096 = 0995904 \approx 0{,}996.$

б) Вероятность того, что среди 6 случайно взятых волокон будет ровно 3 коротких, равна

$$P_6(3) = C_6^3 \cdot p^3 \cdot q^3 = \frac{6!}{3!\,3!} \cdot 0{,}6^3 \cdot 0{,}6^3 = 20 \cdot 0{,}013824 = 0{,}27448 \approx 0{,}28.$$

в) Вероятность того, что среди 6 случайно взятых волокон будет не более 3 коротких волокон, равна

$$P_6(m \leq 3) = P_6(0) + P_6(1) + P_6(2) + P_6(3) = 0{,}4^6 + C_6^1 \cdot 0{,}6^1 \cdot 0{,}4^5 + C_6^2 \cdot 0{,}6^2 \cdot 0{,}4^4 +$$

$$+ C_6^3 \cdot 0{,}6^3 \cdot 0{,}4^3 = 0{,}004096 + 0{,}036864 + 0{,}13824 + 0{,}27648 = 0{,}45568 \approx 0{,}46.$$

Ответ: а) 0,996; б) 0,28; в) 0,46.

Задание 8. Коммерческая фирма рассылает по почте своим клиентам $n = 500$ писем с проспектами новой продукции. Вероятность того, что при пересылке письмо потеряется, равна $p = 0{,}001$. Найти вероятность того, что при пересылке по почте потеряется:

а) хотя бы одно письмо с проспектами;

б) ровно 3 письма с проспектами;

в) не более 3 писем с проспектами.

Решение. Количество посланных по почте писем $n = 500$ велико, а вероятность того, что при пересылке по почте письмо потеряется, $p = 0{,}001$, мала и $\lambda = np = 0{,}5 < 10$. Следовательно, надо воспользоваться формулой Пуассона:

$$P_n(m) \approx \frac{\lambda^m}{m!}e^{-\lambda}, \text{ где } \lambda = np = 0{,}5.$$

а) Найдём вероятность того, что при пересылке потеряется хотя бы одно письмо.

$$P_{500}(m \geq 1) = 1 - P_{500}(0) = 1 - \frac{0{,}5^0}{0!}e^{-0{,}5} = 1 - \frac{1}{\sqrt{e}} = 1 - 0{,}60653 \approx 0{,}40$$

(*по определению* $0! = 1$).

б) Найдём вероятность того, что при пересылке по почте потеряется ровно 3 письма:

$$P_{500}(3) \approx \frac{0{,}5^3}{3!}e^{-0{,}5} = 0{,}125 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{\sqrt{e}} \approx 0{,}01.$$

в) Найдём вероятность того, что при пересылке по почте потеряется не более 3 писем:

$$P_{500}(m \leq 3) = P_{500}(0) + P_{500}(1) + P_{500}(2) + P_{500}(3) = 0{,}61 + \frac{0{,}5^1}{1!}e^{-0{,}5} + \frac{0{,}5^2}{2!}e^{-0{,}5} +$$

$$+ \frac{0{,}5^3}{3!}e^{-0{,}5} = 0{,}61 + 0{,}3 + 0{,}08 + 0{,}01 = 1.$$

Ответ: а) 0,40; б) 0,01; в) 1.

Задание 9. Пусть вероятность того, что покупателю необходимо купить обувь 27 размера, равна 0,2. Найти вероятность того, что из 400 покупателей, зашедших в магазин, потребуют обувь 27 размера:

а) хотя бы один покупатель;

б) ровно 90 покупателей;

в) не более 90 покупателей.

Решение. Так как $n = 400$ велико, $p = 0{,}2$ и $\lambda = np = 80 > 10$, то для нахождения требуемых вероятностей необходимо воспользоваться локальной и интегральной теоремами Муавра-Лапласа. По условию задачи

$$\sqrt{npq} = \sqrt{400 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8} = \sqrt{64} = 8.$$

а) Найдём вероятность того, что из 400 покупателей, зашедших в магазин, хотя бы одному потребуется обувь 27 размера:

$$P_{400}(m \geq 1) = 1 - P_{400}(0) = 1 - \frac{1}{\sqrt{npq}}\,\varphi\left(\frac{0-np}{\sqrt{npq}}\right) = 1 - \frac{1}{8}\cdot\varphi\left(\frac{0-400\cdot 0{,}2}{8}\right) =$$

$$= 1 - \frac{1}{8}\cdot\varphi(-10) \approx 1 - 0 = 1.$$

б) Найдём вероятность того, что из 400 покупателей, зашедших в магазин, ровно для 90 покупателей потребуется обувь 27 размера:

$$P_{400}(90) = \frac{1}{\sqrt{400\cdot 0{,}2\cdot 0{,}8}}\cdot\varphi\left(\frac{90-400\cdot 0{,}2}{8}\right) = \frac{1}{8}\cdot\varphi\left(\frac{10}{8}\right) = \frac{1}{8}\cdot\varphi(1{,}25) =$$

$$= \frac{1}{8}\cdot 0{,}1826 \approx 0{,}0228.$$

в) Найдём вероятность того, что из 400 покупателей, зашедших в магазин, не более 90 потребуют обувь 27 размера. Здесь $k_1 = 0$, $k_2 = 90$. Тогда

$$P_{400}(0;\,90) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1),$$

где $x_1 = \dfrac{k_1 - np}{\sqrt{npq}} = \dfrac{0-80}{8} = -10$, $x_2 = \dfrac{k_2 - np}{\sqrt{npq}} = \dfrac{90-80}{8} = 1{,}25$.

По таблице значений функции Лапласа находим: $\Phi(x_2) = \Phi(1{,}25) = 0{,}3944$, $\Phi(x_1) = \Phi(-10) = -\Phi(10) = -0{,}5$. Поэтому

$$P_{400}(0;\,90) \approx 0{,}3944 - (-0{,}5) = 0{,}8944.$$

Ответ: а) 1; б) 0,0228; в) 0,8944.

Задание 10. Дискретная случайная величина X задана рядом распределения

X	-1	0	1	2
p	0,2	0,3	0,1	p_4

Найти: а) p_4; б) $M(X)$; в) $D(X)$.

Решение: а) Так как для закона распределения дискретной случайной величины должно выполняться условие $\sum\limits_{i=1}^{n} p_i = 1$, то в данном случае имеем:

$$\sum_{i=1}^{4} p_i = 0{,}2 + 0{,}3 + 0{,}1 + p_4 = 1, \text{ то есть } 0{,}6 + p_4 = 1$$

и, следовательно, $p_4 = 0{,}4$.

б) Найдём математическое ожидание $M(X)$:

$$M(X) = \sum_{i=1}^{4} x_i p_i = -1\cdot 0{,}2 + 0\cdot 0{,}3 + 1\cdot 0{,}1 + 2\cdot 0{,}4 = 0{,}7.$$

в) Найдём дисперсию $D(X)$:

$$D(X) = \sum_{i=1}^{4} x_i^{\,2} p_i - (M(X))^2 = (-1)^2 \cdot 0{,}2 + (0)^2 \cdot 0{,}3 + (1)^2 \cdot 0{,}1 + (2)^2 \cdot 0{,}4 - (0{,}7)^2 = 1{,}41.$$

Ответ: а) $p_4 = 0{,}4$; б) $M(X) = 0{,}7$; в) $D(X) = 1{,}41$.

Задание 11. Вероятность того, что при составлении бухгалтерского баланса не допущена ошибка, равна 0,9. Аудитору на заключение представлено 4 баланса предприятия. Составьте закон распределения случайной величины X – числа положительных заключений на проверяемые балансы. Найдите:

1) числовые характеристики этого распределения: $M(X)$, $D(X)$;
2) функцию распределения $F(X)$ и постройте ее график.

Решение. Составим закон распределения случайной величины X – числа положительных заключений на проверяемые балансы. Из четырех проверяемых балансов положительное заключение может получить ни один баланс, один, два, три и все четыре баланса, т.е.

$$x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = 2, x_4 = 3, x_5 = 4.$$

Вероятности вычислим по формуле Бернулли $P_n(m) = C_n^m \cdot p^m \cdot q^{n-m}$, при этом $n = 4,\ p = 0{,}9,\ q = 0{,}1$.

$$p_1 = P(X = 0) = C_4^0 p^0 q^4 = \frac{4!}{0! \cdot (4-0)!} \cdot (0.9)^0 (0{,}1)^4 = 0{,}0001;$$

$$p_2 = P(X = 1) = C_4^1 p^1 q^3 = \frac{4!}{1! \cdot (4-1)!} \cdot 0{,}9 \cdot (0{,}1)^3 = 0{,}0036;$$

$$p_3 = P(X = 2) = C_4^2 p^2 q^2 = \frac{4!}{2! \cdot (4-2)!} \cdot (0{,}9)^2 \cdot (0{,}1)^2 = 0{,}0486;$$

$$p_4 = P(X = 3) = C_4^3 p^3 q = \frac{4!}{3! \cdot (4-3)!} \cdot (0{,}9)^3 \cdot (0{,}1) = 0{,}2916;$$

$$p_5 = P(X = 4) = C_4^4 p^4 q^0 = \frac{4!}{4! \cdot (4-4)!} \cdot (0{,}9)^4 \cdot (0{,}1)^0 = 0{,}6561.$$

Проверим выполнение соотношения $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$.

$$\sum_{i=1}^{5} p_i = 0{,}0001 + 0{,}0036 + 0{,}0486 + 0{,}2916 + 0{,}6561 = 1.$$

Тогда ряд распределения случайной величины X – числа положительных заключений на проверяемые балансы примет вид

X	0	1	2	3	4
p	0,0001	0,0036	0,0486	0,2916	0,6561

1) Найдём математическое ожидание $M(X)$.

$$M(X) = \sum_{i=1}^{4} x_i p_i = 0 \cdot 0{,}0001 + 1 \cdot 0{,}0036 + 2 \cdot 0{,}0486 + 3 \cdot 0{,}2916 + 4 \cdot 0{,}6561 = 3{,}6$$

Найдём дисперсию $D(X)$.

$$D(X)=\sum_{i=1}^{n} x_i^2 p_i-(M(X))^2=(0)^2\cdot 0{,}0001+(1)^2\cdot 0{,}0036+(2)^2\cdot 0{,}0486+$$

$$+(3)^2\cdot 0{,}2916+(4)^2\cdot 0.6561-(3{,}6)^2=0{,}36.$$

Замечание. Так как случайная величина X имеет *биномиальное распределение*, то числовые характеристики можно вычислять по формулам:

$$M(X)=np,\quad D(X)=npq.$$

2) Найдём функцию распределения $F(x)$.

$$F(x)=\begin{cases} 0, & \text{если } x\le 0,\\ 0{,}0001, & \text{если } 0<x\le 1,\\ 0{,}0001+0{,}0036, & \text{если } 1<x\le 2,\\ 0{,}0001+0{,}0036+0{,}0486, & \text{если } 2<x\le 3,\\ 0{,}0001+0{,}0036+0{,}0486+0{,}2916, & \text{если } 3<x\le 4,\\ 0{,}0001+0{,}0036+0{,}0486+0{,}2916+0{,}6561, & \text{если } x>4 \end{cases}$$

или

$$F(x)=\begin{cases} 0, & \text{если } x\le 0,\\ 0{,}0001, & \text{если } 0<x\le 1,\\ 0{,}0037, & \text{если } 1<x\le 2,\\ 0{,}0523, & \text{если } 2<x\le 3,\\ 0{,}3439, & \text{если } 3<x\le 4,\\ 1, & \text{если } x>4. \end{cases}$$

Построим график функции $F(x)$.

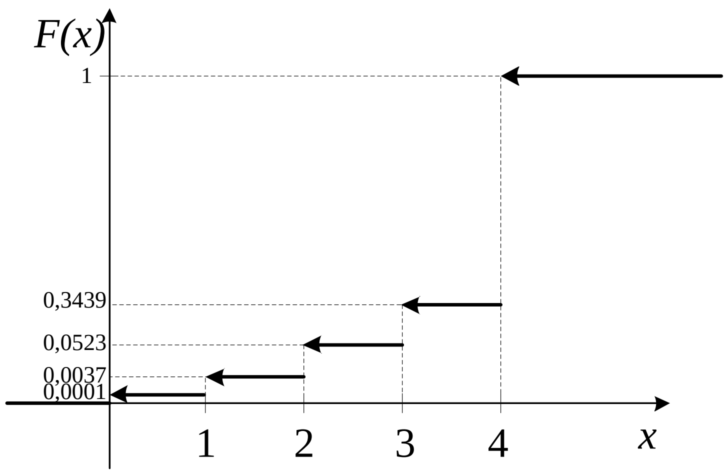


Рисунок 5 – График функции $F(x)$

Задание 12. Дана функция распределения случайной величины X:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ ax^5, & 0 < x \le 1, \\ 1, & x > 1. \end{cases}$$

Найти:
а) коэффициент a;
б) $M(X)$;
в) $P(0{,}5 < X \le 2)$.

Решение. Предварительно найдём вид функции плотности распределения вероятностей:

$$f(x) = F'(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ 5ax^4, & 0 < x \le 1, \\ 0, & x > 1. \end{cases}$$

а) Коэффициент a найдем, используя свойство нормированности функции плотности распределения вероятностей: $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$.

В нашем случае $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{0} 0dx + \int\limits_{0}^{1} 5ax^4dx + \int\limits_{1}^{+\infty} 0dx = ax^5\Big|_0^1 = a - 0 = 1.$

Итак, $a = 1$. Следовательно,

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ x^5, & 0 < x \le 1, \\ 1, & x > 1. \end{cases} \qquad f(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ 5x^4, & 0 < x \le 1, \\ 0, & x > 1. \end{cases}$$

б) Математическое ожидание $M(X)$ найдём по формуле:

$$M(X) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x)dx.$$

В нашем случае

$$M(X) = \int\limits_{0}^{1} x \cdot 5x^4dx = 5\frac{x^6}{6}\Bigg|_0^1 = \frac{5}{6}.$$

в) Для нахождения вероятности попадания случайной величины X в интервал (0,5; 2) воспользуемся формулой: $P(\alpha < X < \beta) = F(\beta) - F(\alpha)$.

В нашем случае:

$P(0{,}5 < X < 2) = F(2) - F(0{,}5) = 1 - 0{,}5^5 = 1 - 0{,}0312 = 0{,}96875 \approx 0{,}969$.

Ответ: а) $a = 1$; б) $M(X) = \frac{5}{6}$; в) $P(0{,}5 < X < 2) \approx 0{,}969$.

Задание 13. Дана функция распределения непрерывной СВ X:

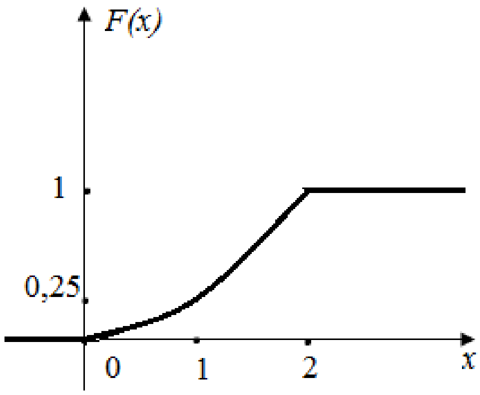
$$F(x)=\begin{cases}0, & \text{если } x\le 0,\\ \frac{1}{4}x^2, & \text{если } 0<x\le 2,\\ 1, & \text{если } x>2.\end{cases}$$

Найти функцию плотности распределения $f(x)$. Построить графики функций $F(x)$ и $f(x)$.

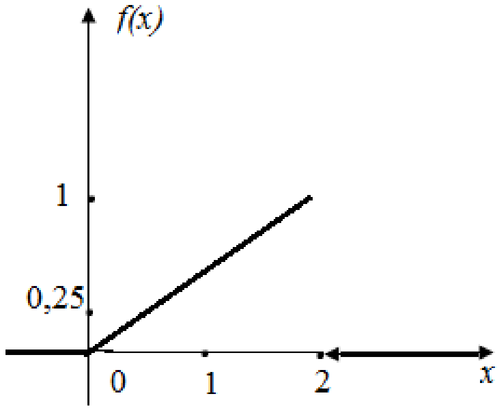
Решение. Найдем функцию плотности распределения вероятностей заданной случайной величины.

$$f(x)=F'(x)=\begin{cases}0, & \text{если } x\le 0,\\ \frac{1}{2}x, & \text{если } 0<x\le 2,\\ 0, & \text{если } x>2.\end{cases}$$

Построим графики функций $F(x)$ и $f(x)$ (рисунки 6а, 6б)



а)



б)

Рисунок 6 – Графики функций $F(x)$ и $f(x)$

Тема 4. Математическая статистика

Знания на уровне понятий, определений, формулировок, описаний

1 Генеральная и выборочная совокупность, частота варианты, относительная частота варианты.

2 Выборки повторные и бесповторные. Репрезентативность выборки. Статистическое распределение выборки, вариационный ряд.

3 Теоретическая и эмпирическая функции распределения.

4 Графическое представление выборки: полигон и гистограмма.

5 Числовые характеристики выборки: выборочная средняя, выборочная дисперсия и исправленная выборочная дисперсия, выборочное среднее квадратическое отклонение и исправленное выборочное среднее квадратическое от-

клонение, выборочная мода, выборочная медиана, эмпирические начальные и центральные моменты различных порядков.

6 Точечные оценки неизвестных параметров генеральной совокупности. Метод моментов и метод максимального правдоподобия получения точечных оценок.

7 Интервальные оценки неизвестных параметров генеральной совокупности: доверительный интервал, доверительная вероятность

8 Требования, предъявляемые к оценкам: несмещённость, эффективность, состоятельность.

9 Доверительный интервал для неизвестного математического ожидания нормально распределённой генеральной совокупности при известной генеральной дисперсии.

10 Доверительный интервал для неизвестного математического ожидания нормально распределённой генеральной совокупности при неизвестной генеральной дисперсии.

11 Доверительный интервал для неизвестного среднеквадратического отклонения нормально распределённой генеральной совокупности.

12 Понятие статистической гипотезы. Гипотезы простые и сложные, параметрические и непараметрические. Нулевая гипотеза, альтернативная гипотеза, ошибки первого и второго рода.

13 Уровень значимости и мощность критерия.

14 Методика проверки статистической гипотезы. Статистический критерий, область принятия решения, критическая область, критическая точка, односторонние и двусторонние критические области.

15 Проверка гипотезы о равенстве генерального среднего конкретному значению.

16 Проверка гипотезы о равенстве генеральных средних двух генеральных совокупностей

17 Проверка гипотезы о равенстве дисперсий двух генеральных совокупностей.

18 Критерии согласия: χ^2 Пирсона и Колмогорова.

19 Зависимости функциональные, статистические и корреляционные.

20 Линейная регрессия случайных величин X и Y

21 Выборочный коэффициент корреляции. Проверка гипотезы о наличии или отсутствии зависимости между случайными величинами с помощью выборочного коэффициента корреляции

22 Прямые линейной эмпирической регрессии «X на Y» и «Y на X».

Знания на уровне доказательств и выводов

1 Построение доверительного интервала для неизвестного математического ожидания нормально распределённой генеральной совокупности при известной генеральной дисперсии.

2 Построение доверительного интервала для неизвестного математического ожидания нормально распределённой генеральной совокупности при неизвестной генеральной дисперсии.

Умения в решении задач

1 Строить полигон и гистограмму по выборке

2 Строить эмпирическую функцию распределения и её график по выборке

3 Вычислять числовые характеристики выборки: выборочную среднюю, выборочную дисперсию и исправленную выборочную дисперсию, выборочное среднее квадратическое отклонение и исправленное выборочное среднее квадратическое отклонение, выборочную моду, выборочную медиану.

4 Строить доверительный интервал для неизвестного математического ожидания нормально распределённой генеральной совокупности при известной генеральной дисперсии

5 Строить доверительный интервал для неизвестного математического ожидания нормально распределённой генеральной совокупности при неизвестной генеральной дисперсии

6 Проверять гипотезу о равенстве генеральных средних двух генеральных совокупностей

7 Проверять гипотезу о равенстве дисперсий двух генеральных совокупностей.

8 Проверять гипотезу о законе распределения по критерию согласия χ^2.

9 По данным двумерной выборки строить эмпирическую простую линейную регрессию.

Задачи для самостоятельного решения

(Здесь N – номер студента по списку).

1 Пусть выборка задана таблицей 1. Найти её числовые характеристики.

Таблица 1

x_i	$-1+N$	$0+N$	$1+N$	$2+N$
m_i	3	5	1	1

2 Найти доверительный интервал для неизвестного математического ожидания нормально распределённой генеральной совокупности с надёжностью $\gamma = 0{,}95$ при известной генеральной дисперсии $\sigma^2 = 64 + N$, выборочном среднем $\overline{x} = N$, найденным по выборке объёма n = 121.

3 Найти доверительный интервал для неизвестного математического ожидания нормально распределённой генеральной совокупности при неизвестной генеральной дисперсии с надёжностью $\gamma = 0{,}95$, выборочном среднем $\overline{x} = N$ и выборочной дисперсии $s^2 = 0{,}49 \cdot N^2$, найденных по выборке объёма n = 25.

4 Для проверки эффективности новой технологии отбираются две группы рабочих. В первой группе (где она применяется) численностью $n_1 = 2N$ человек средняя выработка $\overline{X} = 3N$ шт., $S_X = 10$ шт. Эти же показатели для другой

группы (без применения новой технологии) численностью $n_2 = N + 10$ человек: $\overline{Y} = 2N$ шт., $S_Y = 9$ шт. На уровне значимости $\alpha = 0{,}05$ определить, действительно ли новая технология влияет на производительность.

5 При уровне значимости $\alpha = 0{,}05$ проверить гипотезу о нормальном распределении генеральной совокупности по эмпирическим и теоретическим частотам:

Таблица 2

n_i	$6+N$	$12+N$	$16+N$	$40+N$	$13+N$
n_i'	4	6	15	25	10

Образцы решений

Задание1. Пусть выборка задана таблицей 3. Найти её числовые характеристики.

Таблица 3

x_i	–1	0	1	2
m_i	3	5	1	1

Решение. Выборочная средняя $\overline{x} = \frac{1}{ï}\sum_{i=1}^{k} n_i x_i = \frac{-1\cdot 3 + 0\cdot 5 + 1\cdot 1 + 2\cdot 1}{3+5+1+1} = 0$,

выборочная дисперсия

$$s^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} n_i x_i^2 - (\overline{x})^2 = \frac{(-1)^2\cdot 3 + 0^2\cdot 5 + 1^2\cdot 1 + 2^2\cdot 1}{3+5+1+1} - 0^2 = 0{,}8,$$

исправленная выборочная дисперсия $S^2 = \frac{10}{9}s^2 = \frac{10}{9}\cdot 0{,}8 = \frac{8}{9}$,

выборочное среднеквадратическое отклонение $s = \sqrt{0{,}8} \approx 0{,}89$,

исправленное выборочное среднеквадратическое отклонение $S = \sqrt{\frac{8}{9}} \approx 0{,}94$,

выборочная мода $x_{MO} = 0$,

выборочная медиана $x_{ME} = \frac{x_5 + x_6}{2} = \frac{0+0}{2} = 0$.

Задание 2. Найти доверительный интервал для неизвестного математического ожидания нормально распределённой генеральной совокупности с надёжностью $\gamma = 0{,}99$ при известной генеральной дисперсии $\sigma^2 = 64$, выборочном среднем $\overline{x} = 9{,}5$, найденным по выборке объёма n = 128.

Решение. Искомый доверительный интервал имеет вид:

$$\left(\bar{x}-u_{\gamma}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}};\bar{x}+u_{\gamma}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right).$$

Квантиль стандартного нормального распределения u_{γ} может быть найден, например, по таблицам значений функции Лапласа $\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^x e^{\frac{-t^2}{2}}dt$ как решение уравнения $\Phi\left(u_{\gamma}\right)=\frac{\gamma}{2}$. Здесь $u_{0,99}\approx 2{,}58$. Подставляя в формулу данные задачи, получим: $(7{,}68;\ 11{,}32)$.

Задание 3. Найти доверительный интервал для неизвестного математического ожидания нормально распределённой генеральной совокупности при неизвестной генеральной дисперсии с надёжностью $\gamma=0{,}99$, выборочном среднем $\bar{x}=10$ и выборочной дисперсии $s^2=0{,}49$, найденных по выборке объёма n = 20.

Решение. Искомый доверительный интервал имеет вид:

$$\left(\bar{x}-t_{\gamma,n-1}\cdot\frac{S}{\sqrt{n}};\bar{x}+t_{\gamma,n-1}\cdot\frac{S}{\sqrt{n}}\right).$$

Квантиль распределения Стьюдента, соответствующий надёжности $\gamma=0{,}99$ для числа степеней свободы $n-1$ = 19, возьмём из соответствующей таблицы: $t_{0,99;19}=2{,}86$. Исправленное выборочное среднеквадратичное отклонение

$$S=\sqrt{\frac{n}{n-1}}\cdot s=\sqrt{\frac{20}{19}}\cdot 0{,}7\approx 0{,}718.$$

Подставляя, получим: $(9{,}54;\ 10{,}46)$.

Задание 4. Для проверки эффективности новой технологии отбираются две группы рабочих. В первой группе (где она применяется) численностью n_1 = 54 человека средняя выработка $\overline{X}=80$ шт., $S_X=7$ шт. Эти же показатели для другой группы (без применения новой технологии) численностью n_2 = 56 человек: $\overline{Y}=77$ шт., $S_Y=6$ шт. На уровне значимости $\alpha=0{,}05$ определить, действительно ли новая технология влияет на производительность.

Решение. Для проверки гипотезы о равенстве генеральных средних двух генеральных совокупностей (новая технология не влияет на производительность) вычислим статистику:

$$Z_{экс} = \frac{\overline{X} - \overline{Y}}{\sqrt{n_1 \cdot S_X^2 + n_2 \cdot S_Y^2}} \cdot \frac{\sqrt{n_1 + n_2 - 2}}{\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}}$$

и сравним её с $Z_{КРИТ} = u_{1-\alpha}$ – квантилью стандартного нормального распределения. Квантиль стандартного нормального распределения $u_{u_{1-\alpha}}$ может быть найден, например, по таблицам значений функции Лапласа $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{\frac{-t^2}{2}} dt$ как решение уравнения $\Phi\left(u_{u_{1-\alpha}}\right) = \frac{1-\alpha}{2}$. Подставляя, получим: $Z_{экс} = 2{,}41$. При этом $Z_{КРИТ} = u_{0,95} = 1{,}96$. Так как $\left|Z_{экс}\right| > Z_{КРИТ}$, то выдвинутую гипотезу об отсутствии влияния отклоняем.

Задание 5. При уровне значимости $\alpha = 0{,}05$ проверить гипотезу о нормальном распределении генеральной совокупности по эмпирическим и теоретическим частотам:

Таблица 4

n_i	6	12	16	40	13	8	5
n_i'	4	11	15	43	15	6	6

Решение. Необходимые вычисления проведём в таблице 5.

Таблица 5

№	1	2	3	4	5	6	7	$\sum$
n_i	6	12	16	40	13	8	5	
n_i'	4	11	15	43	15	6	6	
$n_i - n_i'$	2	1	1	-3	-2	2	-1	
$\left(n_i - n_i'\right)^2$	4	1	1	9	4	4	1	
$\frac{\left(n_i - n_i'\right)^2}{n_i'}$	1	0,09	0,07	0,21	0,27	0,67	0,17	2,47

Видно, что наблюдаемое значение критерия $\chi^2_{набл} = 2{,}47$. Заданному уровню значимости $\alpha = 0{,}05$ и числу степеней свободы $\nu = 7 - 2 - 1 = 4$ соответствует $\chi^2_{крит} = \chi^2_{0,05;4} = 9{,}49$. Так как $\chi^2_{набл} < \chi^2_{крит}$, то нет оснований отклонить гипотезу о нормальном распределении генеральной совокупности на данном уровне значимости.

Задание 6. По данным корреляционной таблицы 6 построить выборочные уравнения регрессии.

Таблица 6

Себестоимость, у.е. y	Производительность труда, x					$\sum$
	11	13	15	17	19	
7			1	1	2	4
9			3	4	1	8
11		3	7	4		14
13	2	4	5			11
15	2	1				3
$\sum$	4	8	16	9	3	40

Решение. Уравнение регрессии «*Y* на *X*»: $y-\overline{y}=r_{XY}\dfrac{s_y}{s_x}\left(x-\overline{x}\right)$, «*X* на *Y*»:
$x-\overline{x}=r_{XY}\dfrac{S_X}{S_Y}\left(y-\overline{y}\right)$.

Для удобства выпишем распределения составляющих:

Таблица 7

x	11	13	15	17	19
m_x	4	8	16	9	3

Таблица 8

y	7	9	11	13	15
m_y	4	8	14	11	3

По таблицам 7 и 8 рассчитаем

$\overline{x}=14{,}95,\ \overline{x^2}=228, S_X^2=\overline{x^2}-\left(\overline{x}\right)^2=4{,}50,\ S_X=\sqrt{S_X^2}=2{,}12,$

$\overline{y}=11{,}05,\ \overline{y^2}=126{,}8,\ S_Y^2=\overline{y^2}-\left(\overline{y}\right)^2=4{,}70,\ S_Y=\sqrt{S_Y^2}=2{,}17,$

$\sum xy=6472,\ \overline{xy}=161{,}8,$

$K_{XY}=\overline{xy}-\overline{x}\,\overline{y}=-\,3{,}40,$

$r_{XY}=\dfrac{K_{XY}}{S_X\cdot S_Y}=-\,0{,}74,$

$r\dfrac{S_Y}{S_X}=-\,0{,}76;\ r\dfrac{S_X}{S_Y}=-\,0{,}72.$

Тогда уравнение регрессии «*Y* на *X*»:

$$y-11{,}05=-\,0{,}76(x-14{,}95),$$

«*X* на *Y*»:

$$x-14{,}95=-\,0{,}72(y-11{,}05).$$

Тема 5. Математическое программирование

1 Уметь построить область допустимых планов, которая задается системой линейных уравнений и неравенств.

2 Уметь построить вектор-градиент целевой функции и линию нулевого уровня.

3 Знать различные формы записи задачи линейного программирования (ЗЛП).

4 Уметь переходить от одной формы ЗЛП к другой.

5 Знать алгоритм симплекс-метода.

6 Знать критерий оптимальности решения ЗЛП на максимум.

7 Уметь для ЗЛП, заданной в симметричной форме, построить двойственную ей задачу.

8 Уметь построить начальный опорный план транспортной задачи (ТЗ) методом северо-западного угла и методом минимального элемента.

9 Знать критерий оптимальности решения ТЗ.

10 Уметь перейти к нехудшему опорному решению ТЗ.

Задачи для самостоятельного решения

1 Решить задачу линейного программирования графическим методом:

$a)$ $z = 6x_1 - 2x_2 \to \max$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 \le 1, \\ 3x_1 - x_2 \le ,6 \end{cases}$$

$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0;$

$б)$ $z = 2x_1 - 6x_2 \to \min$

$$\begin{cases} -x_1 - x_2 \le -2, \\ -x_1 + x_2 \le 1, \end{cases}$$

$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0;$

в) $z = 2x_1 + x_2 \to \min\ (\max)$,

$$\begin{cases} 4x_1 + x_2 \ge 13, \\ x_1 - 2x_2 \le 1, \\ 2x_1 + 5x_2 \le 29. \end{cases}$$

2 Решить задачу линейного программирования симплекс-методом:

$z = x_1 + x_2 \to \max$

$$\begin{cases} x_1 + (N+1) \cdot x_2 \le 1, \\ (N+1)x_1 + x_2 \le 1, \end{cases}$$

(здесь N – номер студента по списку)

$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$

3 Для приведённых ЗЛП написать двойственную:

а) $z = 6x_1 - 2x_2 \to \max$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 \le 1, \\ 3x_1 - x_2 \le 6, \end{cases}$$

$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0;$

б) $z = 2x_1 - 6x_2 \to \min$

$$\begin{cases} -x_1 - x_2 \le -2, \\ -x_1 + x_2 \le 1, \end{cases}$$

$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0;$

в) $z = 6x_1 - 2x_2 + 4x_3 \to \max$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 \le 1, \\ 3x_1 - x_2 \le 8, \\ x_1 - x_2 + 14x_3 \le 10, \end{cases}$$

$x_j \ge 0 \quad \forall j$

г) $z = -2x_1 + 5x_2 + 4x_3 \to \min$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 \ge 1, \\ 3x_1 - 9x_2 \ge 7, \\ -0{,}5x_1 - x_2 + 11x_3 \le 10, \end{cases}$$

$x_j \ge 0 \quad \forall j.$

4 Составить первоначальный план ТЗ методом северо-западного угла и(или) методом минимального элемента по следующим данным:

а)

A_i \ B_j		1	2	3
		65	158	63
1	175	7	2	3
2	37	4	7	5
3	195	6	5	6

б)

A_i \ B_j		1	2	3
		48	144	175
1	68	3	5	7
2	34	7	5	3
3	141	1	2	3

в)

A_i \ B_j		1	2	3	4
		92	29	114	199
1	21	5	1	4	6
2	72	0	7	3	3
3	95	4	6	3	1

Образцы решений

Задание 1. Решить задачу линейного программирования графическим методом:

$$\max(\min)Z = 3x_1 + 2x_2,$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \geq 14, \\ x_1 - 4x_2 \geq -22, \\ x_1 - x_2 \leq 2, \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0.$$

Решение. Построим область допустимых решений Ω. Из теории следует, что это будет выпуклое множество. Для этого запишем уравнения границ области допустимых решений. Заменив в ограничениях знак неравенства знаком равенства

$$x_1 + 2x_2, = 14, \text{ (I)}$$

$$x_1 - 4x_2, = -22, \text{ (II)}$$

$$x_1 - x_2, = 2, \text{ (III)}$$

построим эти прямые.

Определим полуплоскости, удовлетворяющие неравенствам-ограничениям. Пересечение этих полуплоскостей образует треугольник *ABC*, который и является областью допустимых решений Ω. Покажем ее на рисунке 6 штриховкой.

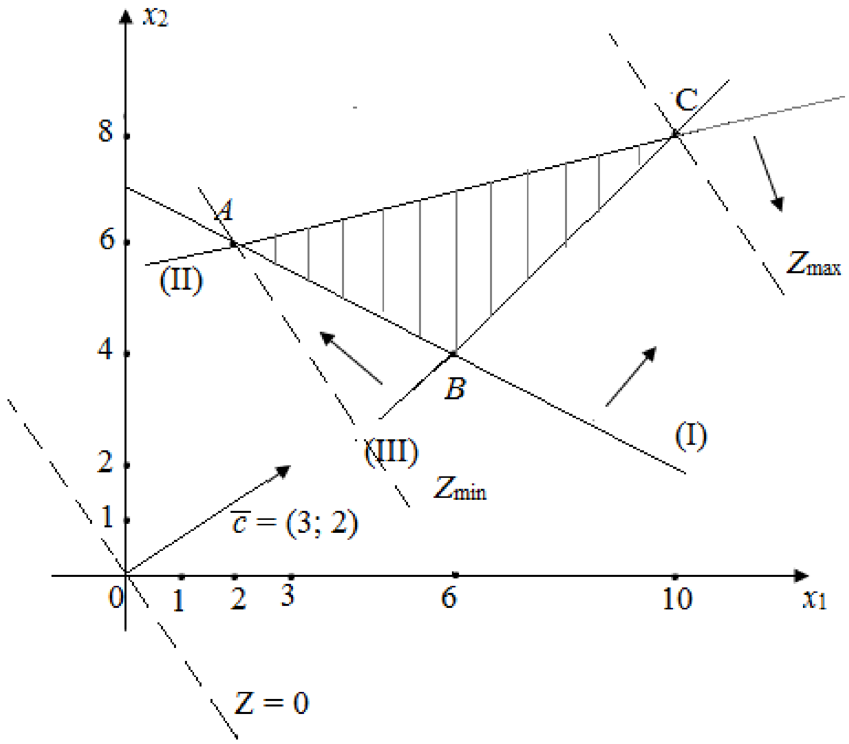


Рисунок 6 – Область допустимых решений Ω

Строим вектор $\vec{c}$ = (3; 2) – градиент целевой функции $Z(x_1; x_2)$.

Далее проводим линию нулевого уровня $3x_1 + 2x_2, = 0$, перпендикулярную вектору $\vec{c} = (3; 2)$.

Перемещаем линию нулевого уровня в направлении вектора $\vec{c}$. Первой точкой контакта линии уровня с треугольником *ABC* является точка *A* и, следовательно, $Z_{\min} = Z(A)$. Последняя точка контакта – точка С и, следовательно, $Z_{\max} = Z(C)$.

Найдем координаты точек *A* и *C* и вычислим экстремальные значения целевой функции.

Точка *A* – точка пересечения прямых (I) и (II).

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 14, \\ x_1 - 4x_2 = -22, \end{cases} \begin{cases} x_1 = 2, \\ x_2 = 6, \end{cases}$$

$A(2; 6)$, $Z_{\min} = Z(A) = Z(2; 6) = 3\cdot 2 + 2\cdot 6 = 18$.

Точка *C* – точка пересечения прямых (II) и (III).

$$\begin{cases} x_1 - 4x_2 = -22, \\ x_1 - x_2 = 2, \end{cases} \begin{cases} x_1 = 10, \\ x_2 = 8, \end{cases}$$

$C(10; 8)$, $Z_{\max} = Z(C) = Z(10; 8) = 3\cdot 10 + 2\cdot 8 = 46$.

Ответ: $Z_{\min} = 18$, $Z_{\max} = 46$.

Задание 2

Для изготовления 4-х видов продукции используют три вида сырья. Количество сырья вида i $(i = \overline{1,3})$, необходимое для изготовления единицы продукции вида j $(j = \overline{1,4})$ a_{ij}, запасы сырья b_i и прибыль от реализации единицы продукции вида j c_j заданы матрицей

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 & 5 & 60 \\ 2 & 3 & 4 & 2 & 40 \\ 3 & 4 & 5 & 2 & 40 \\ 6 & 9 & 6 & 8 & Z \end{bmatrix}.$$

Требуется:

1) составить экономико-математическую модель задачи, пользуясь которой можно найти план выпуска продукции, при котором общая прибыль *Z* будет наибольшей;

2) симплексным методом найти оптимальный план выпуска продукции и максимальную величину прибыли;

3) составить задачу, двойственную к исходной, и пояснить ее экономическую суть. Используя теорию двойственности, установить соответствие между переменными прямой и двойственной задач, найти двойственные оценки;

4) с помощью двойственных оценок исследовать:

а) степень полезности отдельных видов ресурсов в условиях производства;

б) величину финансовых потерь в расчете на единицу продукции в случае, если предприятие вынуждено будет производить невыгодные ему виды продукции. При необходимости такого производства обосновать цены на готовую продукцию.

Решение

1) Составим экономико-математическую модель задачи. Обозначим через X_1, X_2, X_3, X_4 количество весовых единиц четырех видов продукции, которые планируется изготовить. Тогда прибыль, полученная от реализации выпущенной продукции, будет равна:

$$Z = 6X_1 + 9X_2 + 6X_3 + 8X_4 \to \max \qquad (1)$$

Переменные X_1, X_2, X_3, X_4 должны удовлетворять ограничениям, накладываемым на расход имеющихся в распоряжении предприятия ресурсов сырья, что выражается неравенствами:

$$\begin{cases} 4X_1 + 2X_2 + X_3 + 5X_4 \le 60, \\ 2X_1 + 3X_2 + 4X_3 + 2X_4 \le 40, \\ 3X_1 + 4X_2 + 5X_3 + 2X_4 \le 40. \end{cases} \qquad (2)$$

По смыслу задачи

$$X_1 \ge 0, \quad X_2 \ge 0, \quad X_3 \ge 0, \quad X_4 \ge 0. \qquad (3)$$

Таким образом, условия (1) – (3) определяют экономико-математическую модель поставленной задачи.

2) Решим задачу линейного программирования (1) – (3) симплексным методом. Для этого перейдем к канонической форме записи задачи линейного программирования, введя дополнительные (балансовые) переменные X_5, X_6, X_7, которые означают возможные остатки ресурсов сырья:

$$Z = 6X_1 + 9X_2 + 6X_3 + 8X_4 + 0X_5 + 0X_6 + 0X_7 \to \max; \qquad (1')$$

$$\begin{cases} 4X_1 + 2X_2 + X_3 + 5X_4 + X_5 = 60, \\ 2X_1 + 3X_2 + 4X_3 + 2X_4 + X_6 = 40, \\ 3X_1 + 4X_2 + 5X_3 + 2X_4 + X_7 = 40. \end{cases} \qquad (2')$$

$$X_j \ge 0 \qquad (j = \overline{1,7}). \qquad (3')$$

Составим начальную симплексную таблицу по данным математической модели (1′) – (3′).

Таблица 9

БП	$C_Б$	Ao	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	Θ
			6	9	6	8	0	0	0	
X_5	0	60	4	2	1	5	0	0	0	$\frac{60}{2}=30$
X_6	0	40	2	3	4	2	0	1	0	$\frac{40}{3}=13,3$
X_7	0	40	3	4	5	2	0	0	1	$\frac{40}{4}=10$
$Z_j - C_j$		0	–6	–9	–6	–8	0	0	0	

Этой симплексной таблице соответствует опорный план $\overline{X_0} = (0,0,0,0,60,40,40)$, который не является оптимальным, так как в индексной строке $Z_j - C_j$ есть отрицательные элементы. Построим новый опорный план, более близкий к оптимальному. Для этого выполним симплексные преобразования таблицы 9. Наибольший по модулю отрицательный элемент индексной строки (–9) указывает на то, что переменную X_2 надо ввести в число базисных переменных (т.е. столбец, соответствующий переменной X_2, берем в качестве разрешающего). Чтобы определить переменную, которую необходимо вывести из числа базисных, составляем симплексные отношения и выбираем наименьшее из них:

$$\min\left\{\frac{60}{2};\frac{40}{3};\frac{40}{4}\right\} = \frac{40}{4} = 10.$$

Следовательно, из базиса выводим переменную X_7, а соответствующий столбец называем разрешающим. На пересечении разрешающего столбца и разрешающей строки находится разрешающий (ключевой) элемент 4. С помощью разрешающего элемента выполняем симплексные преобразования, которые приводят к таблице 10.

Таблица 10

БП	СБ	Ао	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	Θ
			6	9	6	8	0	0	0	
X_5	0	40	2,5	0	–1,5	4	1	0	–0,5	$\frac{40}{4}=10$
X_6	0	10	–0,25	0	0,25	0,5	0	1	–0,75	$\frac{10}{0,5}=20$
X_2	9	10	0,75	1	1,25	0,5	0	0	0,25	$\frac{10}{0,5}=20$
Zj – Cj		90	0,75	0	5,25	–3,5	0	0	2,25	

Полученный опорный план $\overline{X_1} = (0,10,0,0,40,10,0)$ не является оптимальным, так как в индексной строке есть отрицательный элемент (– 3,5), который соответствует переменной X_4 (а соответствующий столбец будет разрешающим). Определим разрешающую строку, выбрав из симплексных отношений наименьшее:

$$\min\left\{\frac{40}{4};\frac{10}{0,5};\frac{10}{0,5}\right\} = \min\{10;20;20\} = 10.$$

Таким образом, в качестве разрешающей строки необходимо взять строку, соответствующую переменной X_5. Это означает, что базисную переменную X_5 необходимо заменить свободной переменной X_4. Проводя симплексные преобразования, мы придем к таблице 11.

Таблица 11

БП	$C_Б$	Ао	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	Θ
			6	9	6	8	0	0	0	
X_4	8	10				1				
X_6	0	5				0				
X_2	9	5				0				
Zj – Cj		125	2,94	0	3,94	0	0,88	0	1,81	
			Y_4	Y_5	Y_6	Y_7	Y_1	Y_2	Y_3	

В полученной симплексной таблице в индексной строке нет отрицательных элементов, поэтому опорный план

$$\overline{X}_3^* = \left(X_1^*, X_2^*, X_3^*, X_4^*, X_5^*, X_6^*, X_7^*\right) = (0;5;0;10;0;5;0)$$

является оптимальным, он является единственным, так как все индексные оценки свободных переменных больше 0.

Вывод. Максимальная возможная прибыль предприятия (в имеющихся условиях) будет 125 денежных единиц, если оно произведёт 5 единиц измерения продукции 2-го вида и 10 единиц измерения продукции 4-го вида, а продукцию 1-го и 3-го видов вообще выпускать не будет. При таком плане производства ресурсы 1-го и 3-го видов будут израсходованы полностью ($\tilde{O}_5^*$ = $\tilde{O}_7^*$ = 0), но останется неизрасходованным ресурс 2-го вида в объеме 5 единиц измерения ($\tilde{O}_6^*$ = 5).

3) Составим математическую модель двойственной задачи. Запишем матрицу математической модели исходной задачи:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 & 5 & 60 \\ 2 & 3 & 4 & 2 & 40 \\ 3 & 4 & 5 & 2 & 40 \\ 6 & 9 & 6 & 8 & Z \end{bmatrix}.$$

Тогда, чтобы получить матрицу математической модели двойственной задачи, необходимо матрицу A транспонировать (т.е. поменять местами соответствующие строки и столбцы):

$$A^T = A' = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 3 & 6 \\ 2 & 3 & 4 & 9 \\ 1 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 2 & 2 & 8 \\ 60 & 40 & 40 & f \end{bmatrix}.$$

Обозначив через Y_1, Y_2, Y_3 – (прикидочные) цены ресурсов, по матрице A^T строим математическую модель двойственной задачи.

$$f = 60Y_1 + 40Y_2 + 40Y_3 \to \min \qquad (4)$$

$$\begin{cases} 4Y_1 + 2Y_2 + 3Y_3 \ge 6, \\ 2Y_1 + 3Y_2 + 4Y_3 \ge 9, \\ Y_1 + 4Y_2 + 5Y_3 \ge 6, \\ 5Y_1 + 2Y_2 + 2Y_3 \ge 8. \end{cases} \qquad (5)$$

$$Y_j \ge 0, \qquad (j = \overline{1,7}). \qquad (6)$$

Перейдем к канонической форме записи математической модели двойственной задачи введя дополнительные (балансовые) переменные Y_4, Y_5, Y_6, Y_7, которые означают возможные превышения затрат на производство 1 единицы измерения каждого вида продукции над прибылью, получаемой предприятием.

$$f = 60Y_1 + 40Y_2 + 40Y_3 + 0Y_4 + 0Y_5 + 0Y_6 + 0Y_7 \to \min \qquad (4')$$

$$\begin{cases} 4Y_1 + 2Y_2 + 3Y_3 - Y_4 = 6, \\ 2Y_1 + 3Y_2 + 4Y_3 - Y_5 = 9, \\ Y_1 + 4Y_2 + 5Y_3 - Y_6 = 6, \\ 5Y_1 + 2Y_2 + 2Y_3 - Y_7 = 8. \end{cases} \qquad (5')$$

$$Y_j \ge 0, \qquad (j = \overline{1,7}). \qquad (6')$$

Из 1-й теоремы двойственности следует, что если решена одна из пары взаимодвойственных задач симплексным методом, то по последней симплексной таблице можем получить и компоненты оптимального плана двойственной задачи (они находятся в индексной строке). При этом необходимо использовать соответствие между переменными пары взаимодвойственных задач:

$$\underbrace{\overbrace{\begin{matrix} X_1 & X_2 & X_3 & X_4 \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\ Y_4 & Y_5 & Y_6 & Y_7 \end{matrix}}^{\text{СП}}}_{\text{БП}} \quad \underbrace{\overbrace{\begin{matrix} X_5 & X_6 & X_7 \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\ Y_1 & Y_2 & Y_3 \end{matrix}}^{\text{БП}}}_{\text{СП}} .$$

Для нашей задачи имеем оптимальный план двойственной задачи:

$$\overline{Y}^* = \left(Y_1^*, Y_2^*, Y_3^*, Y_4^*, Y_5^*, Y_6^*, Y_7^*\right) = (0,88;\ 0;\ 1,81;\ 2,94;\ 0; 3,\ 94;\ 0).$$

4) Оценки для 1-го и 3-го видов ресурсов положительные. Это указывает, что эти виды ресурсов наиболее дефицитные (и используются полностью).

Увеличение объема ресурса 1-го вида на одну единицу измерения позволило бы получить увеличение максимальной прибыли предприятия на 0,88 денежных единиц; а для ресурса 3-го вида соответственно на 1,81 денежную единицу. Равенство нулю оценки для ресурса 2-го вида ($Y_2^* = 0$) говорит о том, что дальнейшее увеличение объема этого вида ресурса не повлияет на прибыль предприятия (ресурс 2-го вида при оптимальном плане производства остается в избытке).

Дополнительные двойственные переменные являются мерой убыточности продукции, которую согласно оптимальному плану нецелесообразно выпускать. Так как Y_4^* = 2,94, то это говорит, что на производстве 1 единицы продукции 1-го вида терпит убытки в количестве 2,94 денежные единицы. Следовательно, при необходимости производства продукции 1-го вида для ее рентабельности необходимо повысить цену на эту продукцию не менее чем на 2,94 денежные единицы.

Так как Y_6^*=3,94, то это говорит, что на производстве 1-й единицы продукции 3-го вида предприятие терпело убытки в объеме 3,94 денежные единицы (поэтому оно и не планирует эту продукцию производить). При необходимости производство этого вида продукции цена ее реализации должна быть увеличена не менее чем на 3,94 денежные единицы.

Алгоритм симплексных преобразований (перехода к нехудшему опорному плану)

Рассматривается задача линейного программирования на максимум. Приводим ее к каноническому виду и заносим в симплексную таблицу. Если все $\Delta_j \geq 0$, то начальный опорный план X_0 оптимален. Если же существуют $\Delta_j < 0$, то план неоптимален и его нужно улучшить. Среди отрицательных оценок находим максимальную по абсолютной величине:

$$\max_{\Delta_j < 0} \left|\Delta_j\right| = \left|\Delta_{j_0}\right| .$$

Столбец j_0 называется *разрешающим*.

(Если задача решается на минимум, то разрешающий столбец выбирается из условия $\max\limits_{\Delta_j > 0} \Delta_j = \Delta_{j_0}$).

Переменную x_{j_0}, соответствующую разрешающему столбцу, следует ввести в базис. Для определения переменной, выводимой из базиса, находят отношения $\dfrac{b_i}{a_{ij_0}}$ для *i*, у которых $a_{ij_0} > 0$ (они называются *симплексными*).

Среди симплексных отношений определяют наименьшее, т.е.

$$\min \frac{b_i}{a_{ij_0}} = \frac{b_{i_0}}{a_{i_0 j_0}} = \theta.$$

Оно и укажет строку, в которой содержится исключаемая из базиса переменная x_{i_0}. Строка i_0, соответствующая минимальному симплексному отношению, называется *разрешающей*. Элемент, стоящий на пересечении разрешающего столбца и разрешающей строки, также называется *разрешающим*. Чтобы завершить шаг преобразований, ведущий к новому опорному плану, составляем новую симплексную таблицу по следующим правилам.

1 Элементы строки i_0 новой таблицы равны соответствующим элементам разрешающей строки старой таблицы, делённым на разрешающий элемент.

2 Все элементы столбца j_0 новой таблицы равны нулю, за исключением

$$a'_{i_0 j_0} = 1.$$

3 Чтобы получить все остальные элементы (включая элементы индексной строки) новой таблицы, надо из соответствующего элемента прежней таблицы вычесть произведение элемента разрешающей строки на элемент разрешающего столбца, разделенное на разрешающий элемент:

$$\begin{array}{ccc} a_{ij} & \_\_\_\_ & a_{ij_0} \\ | & & | \\ | & & | \\ | & & | \\ a_{i_0 j} & \_\_\_\_ & a_{i_0 j_0} \end{array},$$

$$a'_{ij} = \frac{a_{i_0 j_0} \cdot a_{ij} - a_{i_0 j} \cdot a_{ij_0}}{a_{i_0 j_0}} = a_{ij} - \frac{a_{i_0 j} a_{ij_0}}{a_{i_0 j_0}}.$$

Для контроля вычислений элементов индексной строки применяют формулы:

$$\Delta_0 = \overrightarrow{C_Б} \cdot \overrightarrow{A_0}; \qquad \Delta_j = \overrightarrow{C_Б} \cdot \overrightarrow{A_j} - C_j.$$

Задание 3

Имеется три поставщика и пять потребителей некоторой продукции. Количество груза a_i, которое может отгрузить поставщик i $(i = \overline{1,3})$, стоимость перевозки из пункта i в пункт j единицы груза c_{ij} и потребности потребителей в грузе b_j $(j = \overline{1,5})$ заданы матрицей:

$$\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} & c_{15} & a_1 \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} & c_{25} & a_2 \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & c_{34} & c_{35} & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 & Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 2 & 4 & 1 & 310 \\ 3 & 8 & 6 & 10 & 5 & 360 \\ 1 & 2 & 3 & 5 & 4 & 230 \\ 140 & 190 & 180 & 170 & 220 & Z \end{bmatrix}.$$

Составить экономико-математическую модель задачи и найти методом потенциалов оптимальный план перевозки груза, при котором общие транспортные затраты будут наименьшими.

Решение

Строим математическую модель задачи. Через X_{ij} обозначим объем продукции, доставленной от поставщика A_i ($i = 1, 2, 3$) потребителю B_j ($j = \overline{1, 5}$). Отметим, что в данном случае сумма количества продукции, которую могут отгрузить все поставщики, совпадает с суммой потребностей потребителей:

$$310 + 360 + 230 = 140 + 190 + 180 + 170 + 220 = 900.$$

Значит, задача закрытого типа и имеет решение. Математическая модель задачи принимает вид:

$$Z = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{5} C_{ij}X_{ij} \to \min; \tag{7}$$

$$\begin{cases} X_{11} + X_{12} + X_{13} + X_{14} + X_{15} = 310, \\ X_{21} + X_{22} + X_{23} + X_{24} + X_{25} = 360, \\ X_{31} + X_{32} + X_{33} + X_{34} + X_{35} = 230, \\ X_{11} + X_{21} + X_{31} = 140, \\ X_{12} + X_{22} + X_{32} = 190, \\ X_{13} + X_{23} + X_{33} = 180, \\ X_{14} + X_{24} + X_{34} = 170, \\ X_{15} + X_{25} + X_{35} = 220, \end{cases} \tag{8}$$

$$X_{ij} \ge 0 \ (i = 1, 2, 3; \ \ j = \overline{1, 5}). \tag{9}$$

Строим начальную распределительную таблицу 12:

Таблица 12

A_i \ B_j	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	a_i	U_i
A_1	5	3	2 **90**	4	1 **220**	310	– 4
A_2	+ 3 *	– 8 **100**	6 **90**	10 **170**	5	360	0
A_3	– 1 **140**	+ 2 **90**	3	5	4	230	– 6
b_j	140	190	180	170	220	900	
V_j	7	8	6	10	5		

Построенному опорному решению отвечают затраты:

$$Z_1 = 90 \cdot 2 + 220 \cdot 1 + 100 \cdot 8 + 90 \cdot 6 + 170 \cdot 10 + 140 \cdot 1 + 90 \cdot 2 = 3760.$$

Проверим полученный опорный план на оптимальность. Для этого *i*-й строке и *j*-му столбцу ставим в соответствие числа U_i и V_j (потенциалы). Для каждой базисной переменной X_{ij} потенциалы должны удовлетворять условию

$$U_i + V_j = C_{ij}.$$

Получаем систему

$$\begin{aligned}
&U_1 + V_3 = 2,\\
&U_1 + V_5 = 1,\\
&U_2 + V_2 = 8,\\
&U_2 + V_3 = 6,\\
&U_2 + V_4 = 10,\\
&U_3 + V_1 = 1,\\
&U_3 + V_2 = 2.
\end{aligned}$$

Так как система состоит из 7 уравнений, а неизвестных 8, то, чтобы найти численное решение этой системы одно из неизвестных зададим произвольно, тогда остальные переменные найдутся из системы однозначно.

Пусть $U_2 = 0$, тогда $V_2 = 8$, $V_3 = 6$, $V_4 = 10$, $U_1 = -4$, $U_3 = -6$, $V_1 = 7$, $V_5 = 5$. Теперь для небазисных переменных (свободных клеток) найдем оценки

$$S_{ij} = C_{ij} - (U_i + V_j).$$

$$\begin{aligned}
&S_{11} = 5 - (-4 + 7) = 2,\\
&S_{12} = 3 - (-4 + 8) = -1,\\
&S_{14} = 4 - (-4 + 10) = -2,\\
&S_{21} = 3 - (0 + 7) = -4,\\
&S_{25} = 5 - (0 + 5) = 0,\\
&S_{33} = 3 - (-6 + 6) = 3,\\
&S_{34} = 5 - (-6 + 10) = 1.
\end{aligned}$$

В силу критерия оптимальности опорного плана (все оценки S_{ij} неотрицательны) делаем вывод, что построенный план не оптимален, т.к. среди оценок есть отрицательные.

В базис введем переменную X_{21} (отвечающую наибольшей по модулю отрицательной оценке) и строим замкнутый контур с вершинами в загруженных клетках. Присваиваем клеткам в вершинах контура поочередно по часовой стрелке знаки «+» и «–», начиная с (2,1), которой присваиваем знак «+». Выбираем наименьшее значение из клеток со знаком «–» (min(140, 100) = 100) и перераспределим продукцию вдоль контура: прибавляя 100 к значениям в клетках со знаком «+» и вычитая из значений в клетках со знаком «–». В результате приходим к таблице 13.

Таблица 13

A_i \ B_j	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	a_i	U_i
A_1	5	3	2 **90**	4	1 **220**	310	–4
A_2	+ 3 **100**	8	6 **90**	– 10 **170**	5	360	0
A_3	– 1 **40**	2 **190**	3	+ 5 *	4	230	-2
b_j	140	190	180	170	220	900	
V_j	3	4	6	10	5		

Полученному решению отвечают затраты:

$$Z_2 = 90 \cdot 2 + 220 \cdot 1 + 100 \cdot 3 + 90 \cdot 6 + 170 \cdot 10 + 40 \cdot 1 + 190 \cdot 2 = 3360.$$

Проверяем полученный план на оптимальность и получаем, что $S_{34} = -3 < 0$. Значит, решение неоптимальное, и строим в таблице 13 новый цикл пересчета для клетки (3, 4). Так как min(170, 40) = 40 = X_{31} ,то перераспределяем продукцию вдоль контура, прибавляя 40 к значениям в клетках со знаком «+» и вычитая из значений в клетках со знаком «–». В результате получаем таблицу 14.

Таблица 14

A_i \ B_j	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	a_i	U_i
A_1	5	3	– 2 **90**	+ 4 *	1 **220**	310	–4
A_2	3 **140**	8	+ 6 **90**	– 10 **130**	5	360	0
A_3	1	2 **190**	3	5 **40**	4	230	–5
b_j	140	190	180	170	220	900	
V_j	3	7	6	10	5		

Полученному решению отвечают затраты:

$$Z_3 = 90 \cdot 2 + 220 \cdot 1 + 140 \cdot 3 + 90 \cdot 6 + 130 \cdot 10 + 190 \cdot 2 + 40 \cdot 5 = 3240.$$

Аналогично предыдущему проверяем полученный план на оптимальность. Получаем, что $S_{14} = -2 < 0$. Теперь для улучшения плана загрузим клетку (1, 4). В итоге приходим к таблице 15.

Таблица 15

$A_i \backslash B_j$	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	a_i	U_i
A_1	5	3	2	+ 4 **90**	– 1 **220**	310	–6
A_2	3 **140**	8	6 **180**	– 10 **40**	+ 5 *	360	0
A_3	1	2 **190**	3	5 **40**	4	230	–5
b_j	140	190	180	170	220	900	
V_j	3	7	6	10	7		

$$Z_4 = 90\cdot4 + 220\cdot1 + 140\cdot3 + 180\cdot6 + 40\cdot10 + 190\cdot2 + 40\cdot5 = 3060.$$

Среди оценок свободных клеток имеем $S_{25} = -2 < 0$, следовательно, полученный план перевозок не является оптимальным, и для его улучшения необходимо загрузить клетку (2, 5). В итоге вычислений приходим к таблице 16.

Таблица 16

$A_i \backslash B_j$	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	a_i	U_i
A_1	5	3	2	4 **130**	1 **180**	310	–4
A_2	3 **140**	8	6 **180**	10	5 **40**	360	0
A_3	1	2 **190**	3	5 **40**	4	230	–3
b_j	140	190	180	170	220	900	
V_j	3	5	6	8	5		

$$Z_5 = 130\cdot4 + 180\cdot1 + 140\cdot3 + 180\cdot6 + 40\cdot5 + 190\cdot2 + 40\cdot5 = 2980.$$

Полученный план оказывается оптимальным, так как все оценки незагруженных клеток неотрицательны. По этому плану перевозок 1-й поставщик отправляет 130 ед. продукции потребителю B_4 и 180 ед. – B_5; 2-й поставщик – 140 ед. потребителю B_1, 180 ед. потребителю B_3 и 40 ед. потребителю B_5; 3-й поставщик – 190 ед. потребителю B_2 и 40 ед. потребителю B_4.

Вопросы для подготовки к экзамену

Тема 1. Числовые и функциональные ряды

1 Числовые ряды. Сходимость ряда и его сумма.

2 Необходимый признак сходимости. Гармонический ряд.

3 Достаточные признаки сходимости рядов с неотрицательными членами: Даламбера, Коши, интегральный признак Коши, признаки сравнения.

4 Ряд Дирихле и его сходимость.

5 Знакочередующиеся ряды. Признак Лейбница.

6 Знакопеременные ряды. Абсолютная и условная сходимость.

7 Функциональные ряды. Основные понятия. Область сходимости.

8 Степенные ряды. Радиус и интервал сходимости. Теорема Абеля.

9 Разложение функций в степенные ряды. Ряд Тейлора и Маклорена.

10 Применение степенных рядов к приближенным вычислениям.

11 Разложение функций в ряды Фурье.

Тема 2. Кратные и криволинейные интегралы

1 Двойные интегралы, их свойства и вычисление в декартовых координатах.

2 Тройные интегралы, их свойства и вычисление в декартовых координатах.

3 Понятие о криволинейных координатах, якобиане преобразования. Замена переменных в двойном и тройном интегралах.

4 Двойной интеграл в полярной системе координат.

5 Тройной интеграл в цилиндрической системе координат.

6 Тройной интеграл в сферической системе координат.

7 Приложения двойных и тройных интегралов.

8 Определение криволинейного интеграла 1-го рода, свойства, вычисление, применение.

9 Определение криволинейных интегралов 2-го рода, свойства, вычисление, применение.

10 Формула Грина.

Тема 3. Теория вероятностей

1 Элементы комбинаторики.

2 Предмет и задачи теории вероятностей.

3 Пространство элементарных событий. Алгебра событий.

4 Классическое, статистическое, аксиоматическое и геометрическое определения вероятности события.

5 Теоремы сложения вероятностей.

6 Условная вероятность. Теоремы умножения вероятностей.

7 Формула полной вероятности. Формула Байеса.

8 Схема испытаний Бернулли. Формула Бернулли.

9 Предельные теоремы в схеме Бернулли: Пуассона, Муавра-Лапласа.

10 Наивероятнейшее число появлений события при повторных испытаниях по схеме Бернулли.

11 Случайные величины (СВ) дискретные и непрерывные.

12 Закон распределения СВ, ряд распределения дискретной случайной величины.

13 Функция распределения СВ и её свойства.

14 Числовые характеристики дискретных случайных величин и их свойства.

15 Законы распределения конкретных дискретных случайных величин, имеющих биномиальное распределение, геометрическое распределение, распределение Пуассона, их числовые характеристики.

16 Непрерывные случайные величины. Дифференциальная функция распределения непрерывной СВ (плотность распределения СВ), её свойства.

17 Непрерывные СВ, имеющие равномерное, показательное распределения, их числовые характеристики.

18 Непрерывные СВ, имеющие нормальное распределение, числовые характеристики нормального распределения.

19 Свойства и график плотности нормально распределенной СВ, вероятность попадания в интервал.

Тема 4. Математическая статистика

1 Предмет и задачи математической статистики. Генеральная и выборочная совокупности. Статистическое распределение выборки.

2 Полигон и гистограмма. Эмпирическая функция распределения и её свойства.

3 Числовые характеристики вариационных рядов. Точечные оценки параметров распределения по опытным данным.

4 Основные законы распределения СВ, используемые в математической статистике: распределение χ^2, Стьюдента, Фишера.

5 Интервальные оценки параметров распределения по опытным данным. Понятие доверительного интервала, доверительной вероятности.

6 Доверительный интервал для неизвестного математического ожидания нормально распределённой СВ при известной и неизвестной дисперсии.

7 Доверительный интервал для неизвестного среднего квадратичного отклонения.

8 Статистическая проверка гипотез, основные понятия.

9 Критерии согласия Пирсона, Колмогорова.

10 Функциональная, статистическая и корреляционная зависимости.

11 Коэффициент корреляции.

Тема 5. Математическое программирование

1 Базисные и опорные решения системы линейных уравнений.

2 Постановка задачи линейного программирования (ЗЛП), различные формы записи ЗЛП.

3 Графический метод решения задачи линейного программирования.

4 Симплексный метод решения задачи линейного программирования.

5 Двойственность в линейном программировании. Правила построения двойственной задачи.

6 Основные теоремы двойственности.

7 Постановка и математическая модель транспортной задачи (ТЗ).

8 Открытая и закрытая модели транспортной задачи.

9 Методы северо-западного угла и минимального элемента построения плана ТЗ.

10 Метод потенциалов решения ТЗ.

11 Сетевой график комплекса операций. Временные параметры сетевого графика.

12 Основные понятия теории игр: стратегия игрока, платёжная матрица, седловая точка матричной игры, упрощение матричной игры.

13 Сведение матричной игры к ЗЛП.

14 Статистические игры. Критерии Байеса, Лапласа, Вальда, Сэвиджа, Гурвица решения статистических игр.

15 Задачи нелинейного программирования (ЗНП). Метод множителей Лагранжа.

16 Понятие о градиентных методах решения ЗНП.

17 Элементы финансово-экономических расчетов. Простые проценты. Сложные проценты. Формулы наращения.

Список использованных источников

1 Гусак, А.А. Высшая математика: в 2т / А.А. Гусак. – Минск: Выш.шк.,1976. – 2003. – Т.2 – 327 с.

2 Гмурман, В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика / В.Е. Гмурман. – М.: Высшая школа, 1977 – 2003. – 479 с.

3 Гмурман, В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике / В.Е. Гмурман.– М.: Высшая школа, 1975–2003. – 400 с.

4 Сборник индивидуальных заданий по теории вероятностей и математической статистике / А.П. Рябушко [и др.]; под общ.ред. А.П. Рябушко. – Минск: Выш.шк., 1992. – 191 с.

5 Шнейдер, В.Е. Краткий курс высшей математики / В.Е.Шнейдер, А.С. Слуцкий, А.С. Шумов: в 2т. – М.: Высшая школа, 1978. – Т.2. – 328 с.

6 Данко, П.Е. Высшая математика в упражнениях и задачах / Данко, П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. – М.: Высшая школа,1980 г. – Ч.1 – 320 с.; Ч.2. – 400 с.

7 Письменный, Д.Т. Конспект лекций по высшей математике: полный курс / Д.Т. Письменный. – 4-е изд. – М.: Айрис-пресс, 2006. – 608 с.

8 Кузнецов, А.В. Высшая математика: Математическое программирование.: учебник – 2-е изд., перераб. и доп. / А.В. Кузнецов, В.А. Сакович, Н.И. Холод; под общ.ред. А.В. Кузнецова. – Минск: Выш. шк., 2001. – 351 с.

9 Кузнецов, А.В. Руководство к решению задач по математическому программированию: учеб.пособие / А.В. Кузнецов, Н.И. Холод, Л.С. Костевич; под общ. ред. А.В. Кузнецова. – 2-е изд., перераб. и доп. – Минск: Выш. шк., 2001. – 448 с.

Учебное издание

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

Методические указания

Часть 3

Составители:
Гальмак Александр Михайлович
Юрченко Ирина Викторовна
Шендрикова Ольга Александровна
Гребенцов Юрий Михайлович

Подписано в печать Формат 60×84 1/16.
Бумага офсетная. Гарнитура Таймс. Ризография.
Уч.-изд. л. Усл.печ.л.
Тираж экз. Заказ .

Редактор *А.А. Щербакова*
Технический редактор *Н.Г. Тверская*

Учреждение образования
«Могилевский государственный университет продовольствия».
Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя, распространителя печатных изданий № 1/272 от 04.04.2014 г.
Пр-т Шмидта, 3, 212027, Могилев.

Отпечатано в учреждении образования
«Могилевский государственный университет продовольствия».
Пр-т Шмидта, 3, 212027, Могилев.