Министерство образования республики Беларусь

Учреждение образования
«Могилевский государственный университет продовольствия»

Кафедра высшей математики

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

Методические указания
к практическим занятиям
по теме
«Функции нескольких переменных»
для студентов всех специальностей

Могилев
МГУП
2016

УДК 519.21
ББК 22.1

Рассмотрено и рекомендовано к изданию на заседании кафедры высшей математики
Протокол № 12 от 30. 05. 2016 г.

Составители:
старший преподаватель Юрченко И. В.
старший преподаватель Шендрикова О. А.

Рецензент
д.ф.-м. н., доцент Гальмак А. М.

УДК51
ББК 22.1

Функции нескольких переменных

1 Функция двух переменных. Основные понятия

Большинство закономерностей в природе и обществе описываются различными функциональными зависимостями, в которых одна величина (зависимая переменная) зависит от двух и более величин (независимых переменных). Например, площадь произвольного прямоугольника зависит от двух величин – длины x и ширины y. Соответственно, можно считать, что площадь S представляет собой функцию двух переменных: $S = S(x; y) = x \cdot y$.

Пусть задано множество D упорядоченных пар чисел $(x; y)$.

Определение. Соответствие f, которое каждой паре чисел $(x; y) \in D$ сопоставляет одно и только одно число $z \in$ R, называется *функцией двух переменных*, определенной на множестве D со значениями в R, и записывается в виде $z = f(x; y)$ или f: $D \to$ R. При этом x и y называются *независимыми переменными* (*аргументами*), а z – *зависимой переменной* (*функцией*).

Множество $D = D(f)$ называется *областью определения функции*. Множество значений, принимаемых z в области определения, называется *областью изменения* этой функции, обозначается $E(f)$ или E.

Область определения $D(f)$ геометрически может представлять собой всю плоскость или некоторую ее часть, ограниченную некоторыми линиями.

Линию, ограничивающую область, называют *границей области*. Точки области, не лежащие на границе, называются *внутренними точками области*. Область, состоящая из одних внутренних точек, называется *открытой* или *незамкнутой*. Область с присоединенной к ней границей, называется *замкнутой* и обозначается $\overline{D}$.

Пример. Найти область определения функции $z = \ln(4 - x^2 - y^2)$.

Решение. Функция z принимает действительные значения при условии$4 - x^2 - y^2 > 0$, т.е. $x^2 + y^2 < 4$. Областью определения заданной функции является круг радиусом $R = 2$ с центром в начале координат, не включая граничную окружность.

2 Понятие предела и непрерывности функции двух переменных

Для функции нескольких переменных вводится понятие предела функции и непрерывности, аналогично случаю функции одной переменной.

Определение. δ-*окрестностью точки* $M_0(x_0, y_0)$ называется множество всех точек $M(x; y)$ плоскости, координаты которых удовлетворяют неравенству

$$\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta.$$

Другими словами, δ-*окрестность точки* M_0 – это все внутренние точки круга с центром в точке M_0 и радиусом δ.

Пусть функция $z = f(x; y)$ определена в некоторой окрестности точки $M_0(x_0, y_0)$, кроме, быть может, самой этой точки.

Определение. Число A называется *пределом функции* $z = f(x; y)$ при $M \to M_0$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$, такое, что для всех точек удовлетворяющих неравенству $0 < \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta$ выполняется неравенство $|f(x; y) - A| < \varepsilon$.

$$\forall\ \varepsilon > 0,\ \exists\ \delta > 0,\ \forall M,\ 0 < \rho(M, M_0) < \delta \Rightarrow |f(x; y) - A| < \varepsilon.$$

Обозначение: $A = \lim\limits_{M \to M_0} f(M)$ или $A = \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y)$.

Предел функции двух переменных обладает свойствами, аналогичными свойствам предела функции одной переменной.

Определение. Функция $z = f(x; y)$ (или $f(M)$) называется *непрерывной в точке* $M_0(x_0, y_0)$, если выполняются следующие три условия:

1) $f(M)$ – определена в точке M_0 и некоторой ее окрестности;
2) существует предел $\lim\limits_{M \to M_0} f(M)$;
3) $\lim\limits_{M \to M_0} f(M) = f(M_0)$.

Функция, непрерывная в каждой точке некоторой области, называется *непрерывной в этой области*.

Точки, в которых непрерывность нарушается (не выполняется хотя бы одно из условий непрерывности функции в точке), называются *точками разрыва* этой функции. Точки разрыва могут образовывать целые линии разрыва.

Пример. Вычислить предел $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \dfrac{x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2 + 4} - 2}$.

Решение. Преобразуем выражение под знаком предела, домножив числитель и знаменатель дроби на выражение $\sqrt{x^2 + y^2 + 4} + 2$, сопряженное знаменателю. Получим

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \frac{x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2 + 4} - 2} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \frac{(x^2 + y^2)(\sqrt{x^2 + y^2 + 4} + 2)}{(\sqrt{x^2 + y^2 + 4} - 2)(\sqrt{x^2 + y^2 + 4} - 2)} =$$

$$= \lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \frac{(x^2 + y^2)(\sqrt{x^2 + y^2 + 4} + 2)}{x^2 + y^2 + 4 - 4} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \frac{(x^2 + y^2)(\sqrt{x^2 + y^2 + 4} + 2)}{x^2 + y^2} =$$

$$= \lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} (\sqrt{x^2 + y^2 + 4} + 2) = 4.$$

Пример. Найти точки разрыва функции $z = \dfrac{1}{(x-2)^2 + y^2}$.

Решение. Данная функция определена на R^2 всюду, кроме точки $M(2; 0)$, которая и является точкой разрыва функции.

3 Частные производные функции двух переменных

Пусть задана функция $z = f(x; y)$. Так как x и y – независимые переменные, то одна из них может изменяться, а другая сохранять свое значение.

Дадим независимой переменной x приращение Δx, сохраняя значение y неизменным. Тогда z получит приращение, которое называется *частным приращением* z по x и обозначается $\Delta_x z$:

$$\Delta_x z = f(x + \Delta x, y) - f(x, y).$$

Аналогично получаем частное приращение z по y:

$$\Delta_y z = f(x, y + \Delta y) - f(x, y).$$

Полное приращение Δz функции z определяется равенством:

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y).$$

Определение. *Частной производной* функции $z = f(x; y)$ в точке $M(x; y)$ называется предел отношения частного приращения функции к приращению соответствующего аргумента, когда приращение аргумента стремится к нулю:

$$z_x' = \frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x},$$

$$z_y' = \frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}.$$

Частная производная функции нескольких переменных определяется как производная функции одной из этих переменных при условии постоянства значений остальных независимых переменных. Поэтому частные производные функции $z = f(x; y)$ находят по формулам и правилам вычисления производных функции одной переменной (при этом соответственно x или y считается постоянной величиной).

Пример. Найти частные производные функции

$$z = \ln(x^6 + y^5 - 3xy + 2x - 5y).$$

Решение

$$\frac{\partial z}{\partial x} = (y = \text{const}) = \frac{1}{x^6 + y^5 - 3xy + 2x - 5y} \cdot (x^6 + y^5 - 3xy + 2x - 5y)'_x =$$

$$= \frac{1}{x^6 + y^5 - 3xy + 2x - 5y} \cdot (6x^5 - 3y + 2) = \frac{6x^5 - 3y + 2}{x^6 + y^5 - 3xy + 2x - 5y}.$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = (x = \text{const}) = \frac{1}{x^6 + y^5 - 3xy + 2x - 5y} \cdot (x^6 + y^5 - 3xy + 2x - 5y)'_y =$$

$$= \frac{1}{x^6 + y^5 - 3xy + 2x - 5y} \cdot (5y^4 - 3x - 5) = \frac{5y^4 - 3x - 5}{x^6 + y^5 - 3xy + 2x - 5y}.$$

Частными производными второго порядка называются частные производные, взятые от частных производных первого порядка:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = z''_{xx};$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = z''_{yy}.$$

Частная производная второго и более высокого порядка, взятая по различным переменным, называется *смешанной частной производной*.

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = z''_{xy};$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = z''_{yx}.$$

Если частные производные высшего порядка непрерывны, то смешанные производные одного порядка, отличающиеся лишь порядком дифференцирования, равны между собой.

Пример. Найти частные производные второго порядка функции $z = 5x^3y^2 + 3xy + 5x - 2y$.

Решение. Найдем частные производные первого порядка:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = (y = \text{const}) = (5x^3y^2 + 3xy + 5x - 2y)'_x = 15x^2y^2 + 3y + 5;$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = (x = \text{const}) = (5x^3y^2 + 3xy + 5x - 2y)'_y = 10x^3y + 3x - 2.$$

Найдем частные производные второго порядка:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = (15x^2y^2 + 3y + 5)'_x = 30xy^2;$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = (10x^3y + 3x - 2)'_y = 10x^3;$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = (15x^2y^2 + 3y + 5)'_y = 30x^2y + 3;$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = (10x^3y + 3x - 2)'_x = 30x^2y + 3.$$

Сравнивая последние два выражения, видим, что $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$.

4 Полный дифференциал функции двух переменных

Полным приращением функции $z = f(x; y)$ называется разность

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y).$$

Главная часть полного приращения функции $z = f(x; y)$, линейно зависящая от приращения независимых переменных Δx и Δy, называется *полным дифференциалом функции* и обозначается dz. Если функция имеет непрерывные частные производные, то полный дифференциал существует и равен

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot dx + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot dy,$$

где $dx = \Delta x$, $dy = \Delta y$ – произвольные приращения независимых переменных, называемые их дифференциалами.

Пример. Найти полный дифференциал функции $z = e^{x^3 - y^3}$.

Решение. Найдем частные производные функции:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \left(e^{x^3-y^3}\right)'_x = e^{x^3-y^3}\left(x^3 - y^3\right)'_x = e^{x^3-y^3}\cdot 3x^2,$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \left(e^{x^3-y^3}\right)'_y = e^{x^3-y^3}\left(x^3 - y^3\right)'_y = e^{x^3-y^3}\cdot 3y^2.$$

Тогда

$$dz = 3x^2\cdot e^{x^3-y^3}\,dx + 3y^2\cdot e^{x^3-y^3}\,dy.$$

Задачи для самостоятельного решения

1 Найти и изобразить область определения функции:

а) $z = \ln(9 - x^2 - y^2)$;

б) $z = \sqrt{x^2 + y^2 - 4}$;

в) $z = \ln(x^2 + y^2 - 9) + \dfrac{1}{\sqrt{16 - x^2 - y^2}}$;

г) $z = \ln(y - x)$;

д) $z = \arcsin(x - y)$;

е) $z = 2x + \dfrac{y}{\sqrt{1 - x - y}}$;

ж) $z = 5x + \dfrac{1 + y}{3 - x + y}$.

2 Найти частные производные функции:

а) $z = x^4y^3 - 7xy + 3x - 5y + 9$;

б) $z = (x^4 + y^4 - xy^3)^3$;

в) $z = \sqrt{x^2 + y^2 - 2xy}$;

г) $z = \ln(3x + 5y - x^3 - y^5)$;

д) $z = \cos(x^2 - \sqrt{xy})$;

е) $z = e^{\frac{x+y}{x-y}}$;

ж) $z = arctg\,\dfrac{y}{x}$.

3 Вычислить значение частных производных функции $z = 2x + 3y - \sqrt{x^2 + y^2}$ в точке $M(4; -3)$.

4 Вычислить $\dfrac{\partial z}{\partial x} + \dfrac{\partial z}{\partial y}$ в точке $M(1; 1)$, если $z = \ln(2 + x + y^2)$.

5 Показать, что функция $z = y \cdot e^{x^2 - y^2}$ удовлетворяет уравнению $\dfrac{1}{x} \cdot \dfrac{\partial z}{\partial x} + \dfrac{1}{y} \cdot \dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{z}{y^2}$.

6 Найти частные производные второго порядка функции:

а) $z = x^3 y - 3xy^2 + x^2 y^4$;

б) $z = x^y$;

в) $z = \sin xy$;

г) $z = 3^{\frac{x}{y}}$

д) $z = \mathrm{arctg}\sqrt{x^2 y^2 - 1}$.

7 Проверить, удовлетворяет ли функция $z = \dfrac{y}{x}$ уравнению $x^2 \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2xy \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + y^2 \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$.

8 Найти полный дифференциал функции:

а) $z = \cos(x^2 + y^2)$;

б) $z = \arcsin\sqrt{x^2 + y^2}$

в) $z = x\sqrt{y} + \dfrac{y}{\sqrt{x}}$.

5 Экстремум функции двух переменных

Пусть функция $z = f(x; y)$ определена в некоторой области D, точка $M_0(x_0, y_0) \in D$.

Определение. Точка (x_0, y_0) называется *точкой максимума* (*минимума*) функции $z = f(x; y)$, если существует такая δ-окрестность точки (x_0, y_0), что для каждой точки (x; y), отличной от (x_0, y_0), из этой окрестности выполняется неравенство $f(x; y) < f(x_0, y_0)$ ($f(x; y) > f(x_0, y_0)$).

Значение функции в точке максимума (минимума) называется *максимумом* (*минимумом*) функции. Максимум и минимум функции называют ее *экстремумами*.

Необходимые условие экстремума. Если функция $z = f(x; y)$ имеет в точке $M_0(x_0, y_0)$ экстремум, то ее частные производные в этой точке равны нулю либо не существуют:

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{M_0} = 0,\ \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{M_0} = 0.$$

Точки, в которых частные производные первого порядка функции $z = f(x; y)$ равны нулю, называются *стационарными (критическими) точками* функции.

Достаточные условие экстремума. Пусть функция $z = f(x; y)$ в некоторой области, содержащей точку M_0, имеет непрерывные частные производные до второго порядка включительно и частные производные в этой точке равны нулю. Обозначим через $A = \left.\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_{M_0}$, $B = \left.\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right|_{M_0}$, $C = \left.\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right|_{M_0}$, $\Delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = AC - B^2$.

Тогда:

1) если $\Delta > 0$, то функция $z = f(x; y)$ в точке $M_0(x_0, y_0)$ имеет экстремум: максимум, если$A < 0$; минимум, если $A > 0$;
2) если $\Delta < 0$, то функция в точке M_0 экстремума не имеет;
3) если $\Delta = 0$, то экстремум в точке M_0 может быть, может не быть. Необходимы дополнительные исследования.

Схема исследования функции на экстремум:

1) найти область определения функции;
2) определить критические точки функции, для этого найти частные производные, приравнять их к нулю и решить полученную систему;
3) найти частные производные второго порядка и вычислить их значения в критических точках;
4) выяснить знак выражения $AC - B^2$ и сделать вывод на основании достаточных условий;
5) вычислить значение функции в точках экстремума.

Пример. Найти локальные экстремумы функции двух переменных

$$z = xy\,(x + y - 1)\ (x>0;\ y>0).$$

Решение. Если дифференцируемая функция $z = f(x,y)$ имеет в точке $M_0(x_0; y_0)$ локальный экстремум, то в этой точке обе ее частные производные первого порядка, если они существуют, равны нулю, т.е. $z'_x(M_0) = 0$,

$z'_y(M_0)=0$, либо хотя бы одна из этих частных производных в этой точке не существует.

Точки, принадлежащие области определения, в которых частные производные равны нулю или хотя бы одна из них не существует, называются *критическими.*

Находим частные производные данной функции:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2xy + y^2 - y,$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = x^2 + 2xy - x.$$

Приравнивая частные производные к нулю, получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} y(2x+y-1)=0; \\ x(x+2y-1)=0. \end{cases}$$

Так как (x>0; y>0), то система имеет одно решение, которое дает критическую точку: $M_0\left(\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right)$.

Вычислим частные производные второго порядка функции z = $f(x,y)$:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2y;\ \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}'' = 2x + 2y - 1;\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2x,$$

и для критической точки M_0вычислим соответствующее значение Δ:

$$M_0\left(\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right):\ \ A=\frac{2}{3},\ B=\frac{1}{3},\ C=\frac{2}{3},$$

тогда

$$\Delta(\mathrm{M}_0)=\begin{vmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{vmatrix}=\frac{1}{3}>0,\ A=\frac{2}{3}>0,$$

то в точке M_0 имеем точку локального минимума функции, в которой

$$\mathrm{Z}_{\min}\left(\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right) = -\frac{1}{27}.$$

Задачи для самостоятельного решения

Исследовать на экстремум функции:

1 $z = x^2 + xy + y^2 - 2x - y$;

2 $z = 2x^3 - 12x^2 y + 16y^3 - 9x^2$;

3 $z = x^3 - xy^2 + 3x^2 + y^2 - 1, \quad x \ge 0, y \ge 0$;

4 $z = x^2 + xy + y^2 - 2x - y$;

5 $z = x^2 y - 2y^3 - x^2 - 5y^2,\ x \ge 0, y \ge 0$;

6 $z = xy(6 - x - 5y)$;

7 $z = x^3 + y^2 - 6xy - 39x + 18y + 20$;

8 $z = e^x (y^2 - 2y + x)$;

9 $z = 2x^3 - xy^2 + 5x^2 + y^2,\ x \ge 0, y \ge 0$;

10 $z = y\sqrt{x} - 2y^2 - x + 14y$.

6 Производная по направлению и градиент

Частная производная функции $z = f(x; y)$ выражает скорость изменения функции в соответствующем направлении:

$z_x' = \dfrac{\partial z}{\partial x}$ – определяет скорость изменения функции в направлении оси Ox,

$z_y' = \dfrac{\partial z}{\partial y}$ – определяет скорость изменения функции в направлении оси Oy.

Рассмотрим функцию $z = f(x; y)$, определенную и дифференцируемую в некоторой окрестности точки M_0.

Производной функции $z = f(x; y)$ *в точке* $M_0(x_0; y_0)$ *по направлению вектора* $\vec{l} = \overrightarrow{M_0M}$ называется предел

$$\frac{\partial z}{\partial l} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta z}{\Delta l} = \lim_{\left|\overrightarrow{M_0M}\right| \to 0} \frac{f(M) - f(M_0)}{\left|\overrightarrow{M_0M}\right|},$$

где $\Delta l = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$.

Производная по направлению l, определяемому единичным вектором $\vec{l_0}$ = (cosα; cosβ) (cosβ = sinα) определяется по формуле

$$\left.\frac{\partial z}{\partial l}\right|_{M_0} = \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{M_0} \cdot \cos\alpha + \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{M_0} \cdot \cos\beta,$$

где α, β – углы, образованные вектором $\vec{l_0}$ с осями Ox и Oy соответственно.

Производная по направлению характеризует скорость изменения функции в точке M_0 в направлении вектора $\vec{l_0}$.

Если производная $\left.\dfrac{\partial z}{\partial l}\right|_{M_0}$ функции в точке M_0 по направлению l больше нуля, то в точке M_0 функция возрастает в направлении вектора, если же меньше нуля, то убывает в направлении этого вектора.

Вектор

$$\mathbf{grad}\ z = \left(\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{M_0}; \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{M_0} \right),$$

координатами которого являются частные производные функции $z = f(x; y)$, называется *градиентом* функции в точке M_0.

Определим связь между градиентом и производной по направлению.

$$\left.\frac{\partial z}{\partial l}\right|_{M_0} = \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{M_0} \cdot \cos\alpha + \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{M_0} \cdot \cos\beta = (\mathbf{grad}\ z, \vec{l_0}),$$

то есть производная по направлению $\vec{l_0}$ в точке M_0 равна скалярному произведению вектора градиента и вектора $\vec{l_0}$, направления l.

С другой стороны, по определению скалярного произведения

$$(\mathbf{grad}\ z, \vec{l_0}) = |\mathbf{grad}\ z| \cdot |\vec{l_0}| \cdot \cos\varphi = |\mathbf{grad}\ z| \cdot \cos\varphi = \text{пр}_l \mathbf{grad}\ z.$$

$$\frac{\partial z}{\partial l} = |\mathbf{grad}\ z| \cdot \cos\varphi.$$

Из последнего равенства следует, что производная функции по направлению будет наибольшей по величине при $\cos\varphi = 1$ ($\varphi = 0$), то есть когда направление вектора $\vec{l_0}$ совпадает с направлением **grad**z, при этом

$$\frac{\partial z}{\partial l} = |\mathbf{grad} z|.$$

Таким образом, градиент функции в точке характеризует направление и величину максимального роста этой функции в точке.

Пример. Найти производную функции $z = x^2 + y^2 - 2x - y$ в точке $M(3; -2)$ по направлению вектора $\vec{l}$, составляющем с положительным направлением оси Ox угол $\alpha = 30°$.

Решение. Найдем значения частных производных функции в точке M:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x - 2, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 2y - 1,$$

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_M = 4, \quad \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_M = -5.$$

Так как $\cos\alpha = \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos\beta = \sin\alpha = \sin 30° = \frac{1}{2}$, то

$$\frac{\partial z}{\partial l} = 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + (-5) \cdot \frac{1}{2} = 2\sqrt{3} - \frac{5}{2}.$$

Пример. Найти производную функции $z=\sqrt{x^2+y^2}$ в точке $M(4;\,3)$ по направлению градиента функции z.

Решение. По условию вектор $\vec{l}$ совпадает с градиентом функции $z=\sqrt{x^2+y^2}$ в точке $M(4;\,3)$. Найдем градиент функции в точке M:

$$\mathbf{grad}\ z = \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_M + \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_M = \left.\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right|_M \vec{i} + \left.\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right|_M \vec{j} = \frac{4}{5}\vec{i} + \frac{3}{5}\vec{j}.$$

Следовательно,

$$\frac{\partial z}{\partial l} = |\mathbf{grad}\ z| = \sqrt{\left(\frac{4}{5}\right)^2+\left(\frac{3}{5}\right)^2} = 1.$$

Задачи для самостоятельного решения

1 Найти производную функции $z=\ln(x^2+3y^2-xy)$ в точке $M(1;\,-1)$ по направлению вектора $\overrightarrow{NP}$, если $N(3;\,2)$, $P(1;\,4)$.

2 Найти производную функции $z=arctg\dfrac{x}{y}$ в точке $M(1;\,1)$ по направлению вектора $\vec{l}=(-3;\,1)$.

3 Найти производную функции $z=x+3y-\sqrt{2xy}$ в точке $M(1;\,2)$ по направлению вектора $\vec{l}$, составляющему с положительным направлением оси Ox угол $\alpha = 60°$.

4 Найти производную функции $z=\sqrt{x^2+y^2+4}$ в точке $M(-2;\,1)$ по направлению градиента функции z.

5 Найти производную функции $z=x^y$ в точке $M(4;\,3)$ по направлению градиента функции $z=\sin(x+\cos y)$ в точке $N\left(\dfrac{\pi}{3};\dfrac{\pi}{2}\right)$.

6 Найти градиент функции $z=e^{x^2-4y^2}$ в точке $M(2;\,1)$.

7 Найти градиент функции $z=2x^3y+y^2-\sqrt{xy}$ в точке $M(-1;\,-1)$.

8 Найти величину градиента функции $z=\arcsin\dfrac{x}{x+y}$ в точке $M(2;\,1)$.

9 Найти величину и направление градиента функции $z=arctg(x-y)$ в точке $M(1;\,1)$.

10 Найти величину и направление градиента функции $z=tgx-x-\sin^3 y$ в точке $M\left(\dfrac{\pi}{4};\dfrac{\pi}{3}\right)$.

Список использованных источников

1 Гусак А.А. Высшая математика: учебник для вузов. В 2-х томах / А.А. Гусак. – Минск: Тетра Системс, 2003.

2 Письменный Д.Т. Конспект лекций по высшей математике: полный курс / – 9-е изд. – М.: Айрис-пресс, 2009. – 603 с.

3 Шипачев В.С. Высшая математика: учеб. для немат. спец. вузов / Под ред. акад. А.Н. Тихонова. 2-е изд., стер. – М.: Высш. шк., 1990. – 479 с.

4 Индивидуальные задания по высшей математике: учеб. пособие. В 4 ч. Ч. 2. Комплексные числа. Неопределенный и определенный интегралы. Функции нескольких переменных. Обыкновенные дифференциальные уравнения / А.П. Рябушко [и др.]; под общ. ред. А.П. Рябушко. – 3-е изд., испр. – Минск: Выш. шк., 2007. – 396 с.: ил.

Учебное издание

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

Методические указания

Составители:
Юрченко Ирина Викторовна
Шендрикова Ольга Александровна

Редактор *А.А. Щербакова*
Технический редактор *Н.Г. Тверская*

Подписано в печать 03.10.2016. Формат 60×84 1/16.
Бумага офсетная. Гарнитура Таймс. Ризография.
Уч.-изд. л. 0,7. Усл.печ.л. 0,9.
Тираж 46 экз. Заказ 152.

Учреждение образования
«Могилевский государственный университет продовольствия».
Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя,
распространителя печатных изданий № 1/272 от 04.04.2014 г.
Пр-т Шмидта, 3, 212027, Могилев.

Отпечатано в учреждении образования
«Могилевский государственный университет продовольствия».
Пр-т Шмидта, 3, 212027, Могилев.