Министерство образования республики Беларусь

Учреждение образования
«Могилевский государственный университет продовольствия»

Кафедра высшей математики

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

Кратные и криволинейные интегралы.

Методические указания
к решению задач
для студентов всех форм обучения и специальностей

Могилёв
МГУП
2016

УДК 519.21
ББК 22.1

Рассмотрено и рекомендовано к изданию
на заседании кафедры высшей математики
Протокол № 5 от 18. 12. 2015 г.

Составители:
старший преподаватель И.В. Юрченко
старший преподаватель О.А. Шендрикова

Рецензент
д.ф.-м. н., доцент А.М. Гальмак

УДК 51
ББК 22.1

1 Тройной интеграл

1.1 Определение тройного интеграла

Тройной интеграл является аналогом двойного интеграла и вводится для функции трех переменных.

Пусть в некоторой замкнутой ограниченной области V пространства $Oxyz$ задана непрерывная функция $u = f(x; y; z)$. Разобьем область V произвольным образом гладкими поверхностями на n частичных областей $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$, не имеющих общих внутренних точек, с объемами $\Delta\sigma_1, \Delta\sigma_2, \ldots, \Delta\sigma_n$ соответственно. Выберем произвольным образом в каждой частичной области σ_i ($i = 1, 2, \ldots, n$) точку $N_i(x_i; y_i; z_i)$ и рассмотрим выражение

$$V_n = f(x_1; y_1; z_1)\cdot\Delta\sigma_1 + f(x_2; y_2; z_2)\cdot\Delta\sigma_2 + \ldots + f(x_n; y_n; z_n)\cdot\Delta\sigma_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i; y_i; z_i)\cdot\Delta\sigma_i,$$

которое называется *интегральной суммой* для функции $u = f(x; y; z)$ по области V.

Если предел интегральной суммы существует при неограниченном увеличении числа n таким образом, что каждая частичная область стягивается в точку (т.е. диаметр области d_i стремится к нулю), который не зависит ни от способа разбиения области V на частичные области σ_i, ни от выбора точек $N_i(x_i; y_i; z_i) \in \sigma_i$, то этот предел называется *тройным интегралом* от функции $u = f(x; y; z)$ по области V и обозначается символом

$$\iiint\limits_V f(x; y; z)dxdydz.$$

В этом случае функция $u = f(x; y; z)$ называется *интегрируемой* в области V, которая, в свою очередь, называется *областью интегрирования*.

Таким образом, по определению, имеем

$$\iiint\limits_V f(x; y; z)dxdydz = \lim_{\substack{n\to\infty \\ (\max d_i \to 0)}} \sum_{i=1}^{n} f(x_i; y_i; z_i)\cdot\Delta\sigma_i. \qquad (1)$$

1.2 Вычисление тройного интеграла с помощью повторного

В декартовых координатах вычисление тройного интеграла сводится к последовательному вычислению трех определенных интегралов.

Пусть область интегрирования V ограничена снизу и сверху поверхностями $z = z_1(x; y)$ и $z = z_2(x; y)$, а с боковых сторон цилиндрической поверхностью, и пусть область D – проекция области V на плоскость Oxy (рисунок 1), в которой определены и непрерывны функции $z_1(x; y)$ и $z_2(x; y)$. Предположим, что любая прямая, параллельная оси Oz, пересекает границу области V не более чем в двух точках. Тогда для любой функции $f(x; y; z)$, непрерывной в области V, имеет место формула

$$\iiint\limits_V f(x; y; z)dxdydz = \iint\limits_D dxdy \int\limits_{z_1(x;y)}^{z_2(x;y)} f(x; y; z)dxdydz, \qquad (2)$$

позволяющая свести вычисление тройного интеграла к последовательному вычислению внутреннего определенного интеграла по переменной z (при постоянных x и y) и внешнего двойного интеграла по области D.

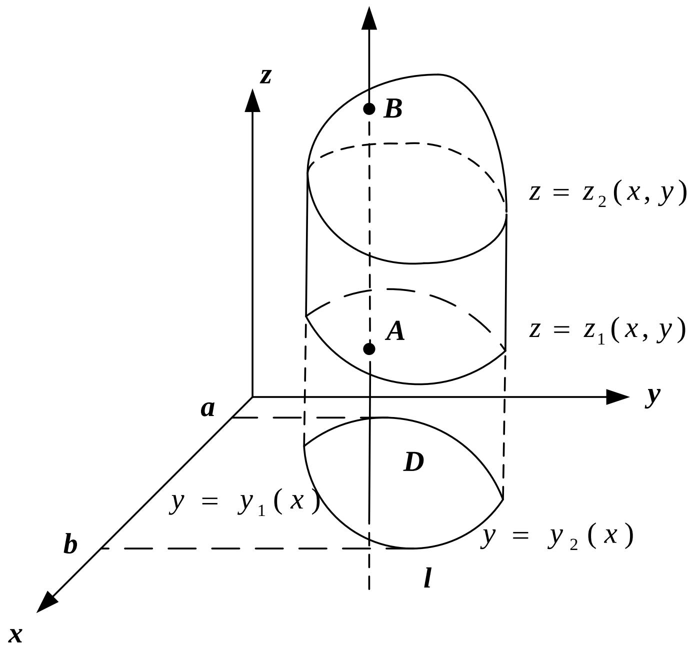

Рисунок 1 – Область интегрирования V

Если при этом область D ограничена линиями $x = a$, $x = b$, $y = y_1(x)$, $y = y_2(x)$, то переходя от двойного интеграла к повторному, в соответствии с формулой

$$\iint_D f(x;y)dxdy = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x;y)dy$$

получим формулу

$$\iiint_V f(x;y;z)dxdydz = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int_{z_1(x;y)}^{z_2(x;y)} f(x;y;z)dxdydz, \qquad (3)$$

сводящую вычисление тройного интеграла к последовательному вычислению трех определенных интегралов. Порядок интегрирования в формуле (3), при определенных условиях, может быть другим.

1.3 Свойства тройного интеграла

Свойства тройного интеграла являются обобщением свойств двойного интеграла и формулируются аналогично.

1) $\iiint_V c \cdot f(x;y;z)dxdydz = c \cdot \iiint_V f(x;y;z)dxdydz$, где c – const.

2) $\iiint_V (f_1(x;y;z) \pm f_2(x;y;z))dxdydz =$

$= \iiint_V f_1(x;y;z)dxdydz \pm \iiint_V f_2(x;y;z)dxdydz$.

3) $\iiint\limits_V f(x;y;z)dxdydz = \iiint\limits_{V_1} f(x;y;z)dxdydz + \iiint\limits_{V_2} f(x;y;z)dxdydz$,

если $V = V_1 \cup V_2$, а пересечение V_1 и V_2 состоит из границы, их разделяющей.

4) $\iiint\limits_V f(x;y;z)dxdydz \geq 0$, если в области V функция $f(x; y; z) \geq 0$.

Если в области интегрирования $f(x; y; z) \geq \varphi(x; y; z)$, то

$$\iiint\limits_V f(x;y;z)dxdydz \geq \iiint\limits_V \varphi(x;y;z)dxdydz.$$

5) $\iiint\limits_V dxdydz = \iiint\limits_V dv = V$, где$V$ – объем тела.

6) Оценка тройного интеграла:

$$m \cdot V \leq \iiint\limits_V dxdydz \leq M \cdot V,$$

где m и M – соответственно наименьшее и наибольшее значения функции $f(x; y; z)$ в области V.

7) ***Теорема о среднем значении***: если функция $f(x; y; z)$ непрерывна в замкнутой области V, то в этой области существует такая точка $N_0(x_0; y_0; z_0)$, что

$$\iiint\limits_V f(x;y;z)dxdydz = f(x_0; y_0; z_0) \cdot V,$$

где V – объем тела.

1.4 Замена переменных в тройном интеграле

Если ограниченная замкнутая область V пространства $(x; y; z)$ взаимно однозначно отображается на область V' пространства $(u; v; w)$ с помощью непрерывно дифференцируемых функций $x = x(u; v; w)$, $y = y(u; v; w)$, $z = z(u; v; w)$, причем якобиан этого преобразования

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix} \neq 0,$$

то справедлива формула

$$\iiint\limits_V f(x;y;z)dxdydz = \iiint\limits_{V'} f(x(u;v;w);y(u;v;w);z(u;v;w))|J|dudvdw.$$

При переходе от прямоугольных координат x, y, z к *цилиндрическим координатам* r, φ, z (рисунок 2), связанным с x, y, z формулами

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi, \\ y = r\sin\varphi, \\ z = z, \end{cases}$$

$$(0 \leq r < +\infty,\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi,\ -\infty < z < +\infty),$$

якобиан преобразования $J = r$, поэтому

$$\iiint\limits_{V} f(x;y;z)dxdydz = \iiint\limits_{V'} f(r\cos\varphi; r\sin\varphi); z)rdrd\varphi dz\,.$$

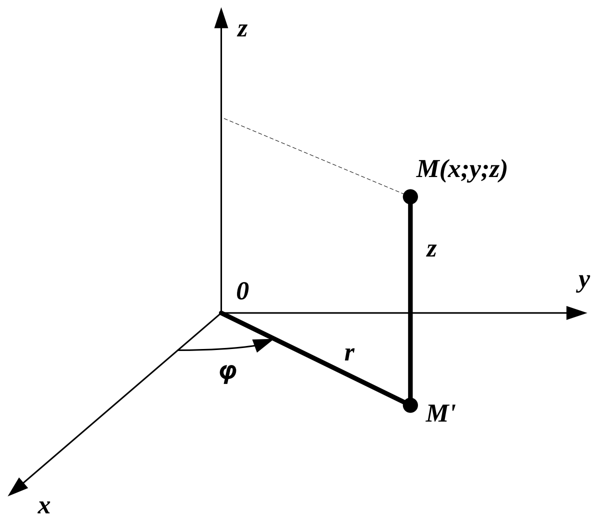

Рисунок 2 – Цилиндрические координаты

При переходе от прямоугольных координат *x*, *y*, *z* к сферическим координатам *r*, φ, θ (рисунок 3), связанным с *x*, *y*, *z* формулами

$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi, \\ y = r\sin\theta\sin\varphi, \\ z = r\cos\theta, \end{cases}$$

$$(0 \le r < +\infty,\ 0 \le \varphi \le 2\pi,\ 0 < \theta < \pi),$$

якобиан преобразования $J = r^2\sin\theta$, поэтому

$$\iiint\limits_{V} f(x;y;z)dxdydz = \iiint\limits_{V'} f(r\sin\theta\cos\varphi; r\sin\theta\sin\varphi; r\cos\theta)r^2\sin\theta drd\varphi d\theta\,.$$

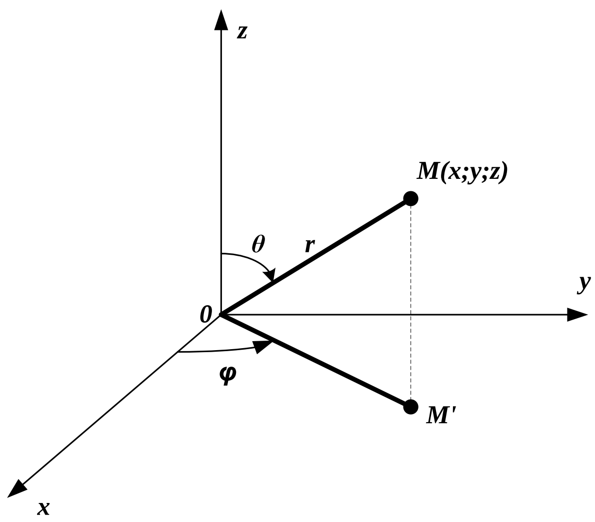

Рисунок 3 – Сферические координаты

Пример 1. Вычислить повторный интеграл $\int\limits_0^2 dx \int\limits_0^{2x} dy \int\limits_0^{\sqrt{x^2+y^2}} z dz$.

Решение

$$\int\limits_0^2 dx \int\limits_0^{2x} dy \int\limits_0^{\sqrt{x^2+y^2}} z dz = \int\limits_0^2 dx \int\limits_0^{2x} \left(\left. \frac{z^2}{2} \right|_0^{\sqrt{x^2+y^2}} \right) dy = \frac{1}{2} \int\limits_0^2 dx \int\limits_0^{2x} (x^2 + y^2) dy =$$

$$= \frac{1}{2} \int\limits_0^2 \left[\left. \left(x^2 y + \frac{y^3}{3} \right) \right|_0^{2x} \right] dx = \frac{1}{2} \int\limits_0^2 \left(2x^3 + \frac{8}{3} x^3 \right) dx = \frac{7}{3} \int\limits_0^2 x^3 dx = \frac{7}{3} \cdot \left. \left(\frac{x^4}{4} \right) \right|_0^2 =$$

$$= \frac{7}{3} \cdot \left(\frac{2^4}{4} - 0 \right) = \frac{28}{3}.$$

Пример 2. Расставить пределы интегрирования в тройном интеграле:

$$\iiint\limits_V f(x; y; z) dx dy dz,$$

где V – пирамида, ограниченная плоскостями $x = 0$, $y = 0$, $z = 1$, $x + y + z = 2$.

Решение. Изобразим область интегрирования V (рисунок 4). Область V ограничена снизу плоскостью $z = 1$,сверху – $z = 2 - x - y$. Следовательно, область V проецируется на плоскость Oxy в треугольник со сторонами $x = 0$, $y = 0$, $x + y = 1$. Проекция на ось Ox – отрезок $0 \le x \le 1$. Уравнение прямой AB:

$$y = 1 - x.$$

По формуле (3) получим:

$$\iiint\limits_V f(x; y; z) dx dy dz = \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{1-x} dy \int\limits_1^{2-x-y} f(x; y; z) dz.$$

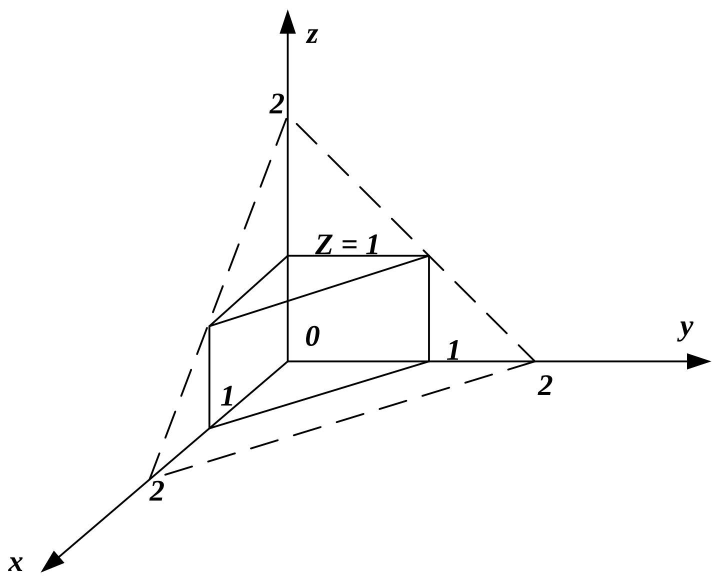

Рисунок 4 – Область интегрирования V

Пример 3. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями: $x^2 + y^2 = 9$, $z = y^2$, $z = 0$.

Решение. По уравнениям заданных поверхностей изобразим схематично тело. Поверхность $x^2 + y^2 = 9$– цилиндр с образующими параллельными оси Oz; $z = y^2$– параболический цилиндр с образующими параллельными оси Ox; $z = 0$ – плоскость Oxy.

Тело, ограниченное данными поверхностями, представляет собой правильную область V, ограниченную снизу плоскостью $z = 0$, сверху – поверхностью $z = y^2$ (рисунок 5) и проектируется на плоскость Oxy в плоскую область D, представляющую собой круг, ограниченный окружностью $x^2 + y^2 = 9$ (рисунок 6).

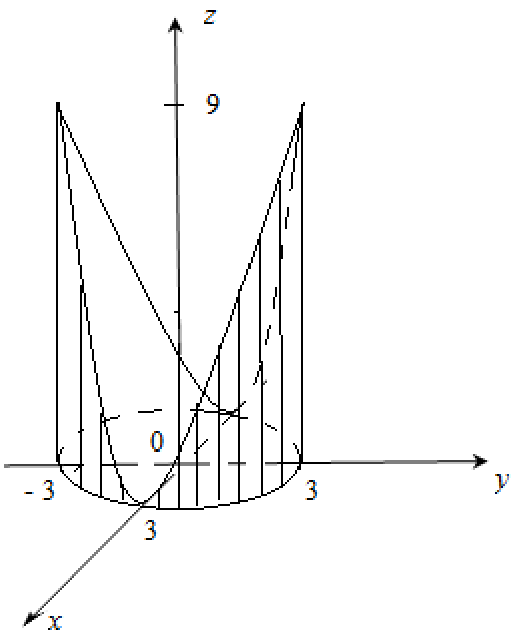

Рисунок 5 – Область интегрирования V

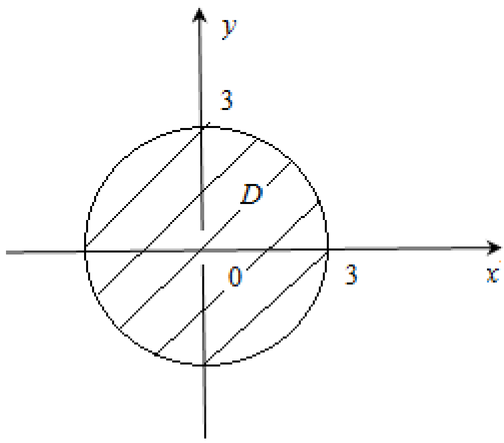

Рисунок 6 – Проекция D

Объем тела найдем с помощью тройного интеграла по формуле

$$V = \iiint\limits_V dxdydz\,.$$

Так как проекцией тела на плоскость XOY является круг, то для данной области V этот интеграл проще вычисляется в цилиндрических координатах, связанных с декартовыми координатами формулами:

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi, \\ y = r\sin\varphi, \\ z = z, \end{cases}$$

где r – полярный радиус, φ – полярный угол.

Для данной области V: $0 \le \varphi \le 2\pi,\ 0 \le r \le 3,\ 0 \le z \le y^2,\ y^2 = r^2\sin^2\varphi$.

Следовательно,

$$V=\iiint\limits_V r\,dr\,d\varphi\,dz=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^3 r\,dr\int_0^{r^2\sin^2\varphi}dz=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^3 r\,dr\cdot z\Big|_0^{r^2\sin^2\varphi}=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^3 r^3\sin^2\varphi\,dr=$$

$$=\int_0^{2\pi}\sin^2\varphi\,d\varphi\cdot\frac{r^4}{4}\Bigg|_0^3=\frac{81}{4}\cdot\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(1-\cos 2\varphi)d\varphi=\frac{81}{8}\left(\varphi-\frac{1}{2}\sin 2\varphi\right)\Bigg|_0^{2\pi}=$$

$$=\frac{81}{8}\left(2\pi-\frac{1}{2}\sin 4\pi+\frac{1}{2}\sin 0\right)=\frac{81}{8}\cdot 2\pi=\frac{81}{4}\pi \ \text{(ед.куб.)}$$

Задачи для самостоятельного решения

Вычислить повторные интегралы:

1 $\int_0^1 dx\int_0^2 dy\int_0^2(2x+y+3z)dz$.

2 $\int_0^2 dx\int_0^1 dy\int_0^{x+2y}dz$.

3 $\int_0^2 dx\int_0^{1-x}dy\int_0^{1-x-y}xyz\,dz$.

4 $\int_0^a dx\int_0^{\sqrt{ax}}dy\int_{a-x}^{2(a-x)}y\,dz$.

Расставить пределы интегрирования в тройном интеграле $\iiint\limits_V f(x;y;z)dxdydz$ для указанных областей:

5 V – область, ограниченная плоскостями $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $x + 2y + 3z = 6$.

6 V – область, ограниченная цилиндром $x^2 + y^2 = R^2$ и плоскостями $z = 0$, $z = a$.

7 V – область, ограниченная поверхностью $y = 4 - x^2 - z^2$ и плоскостью $y = 0$.

8 V – область, ограниченная эллипсоидом $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.

Вычислить тройные интегралы по указанным областям:

9 $\iiint\limits_V yz\,dxdydz$, V: $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $z \geq 0$.

10 $\iiint\limits_V (1+x+y+z)^{-3}dxdydz$, V: $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $x + y + z = 1$.

11 $\iiint\limits_V xy\,dxdydz$, V: $x^2 + y^2 = 1$, $z = 0$, $z = 1$, $x \geq 0$, $y \geq 0$.

12 $\iiint\limits_V (x^2+y^2+z^2)dxdydz$, V: $y^2 + z^2 = x^2$, $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, $x \geq 0$ (общая часть).

Вычислить тройные интегралы, перейдя к цилиндрическим координатам:

13 $\int\limits_{-2}^{2} dx \int\limits_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} dy \int\limits_{\frac{x^2+y^2}{2}}^{2} (x^2+y^2)dz$.

14 $\int\limits_{0}^{\sqrt{3}} dx \int\limits_{0}^{\sqrt{3-x^2}} dy \int\limits_{\frac{x^2+y^2}{3}}^{\sqrt{4-x^2-y^2}} (x^2+y^2)dz$.

15 $\iiint\limits_{V} (x^2-y^2)dxdydz$, V: $x^2 + y^2 = 2z$, $z = 2$.

16 $\iiint\limits_{V} (x^2+y^2+z^2)^3 dxdydz$, V: $x^2 + z^2 = 1$, $y\ \ 0$, $y = 2$.

Вычислить тройные интегралы, перейдя к сферическим координатам:

17 $\iiint\limits_{V} \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dxdydz$, V: $x^2 + y^2 + z^2 \le R^2$.

18 $\iiint\limits_{V} zdxdydz$, V: $x^2 + y^2 + z^2 \le R^2$, $x \ge 0$, $y \ge 0$, $z \ge 0$.

2 Криволинейные интегралы

2.*1 Определение криволинейного интеграла первого рода*

Пусть на плоскости Oxy задана непрерывная кривая AB (или L) длины l. Рассмотрим непрерывную функцию $f(x; y)$, определенную в точках дуги AB. Разобьем кривую AB произвольно на n частей точками $M_0 = A$, M_1, M_2, … , M_{n-1}, $M_n = B$. Выберем на каждой из частичных дуг $M_{i-1}M_i$ произвольную точку $M_i^*(x_i; y_i)$ (рисунок 7) и составим сумму

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i; y_i) \cdot \Delta l_i, \tag{4}$$

где Δl_i – длина дуги $M_{i-1}M_i$. Сумма (4) называется *интегральной суммой* для функции $f(x; y)$ по кривой AB.

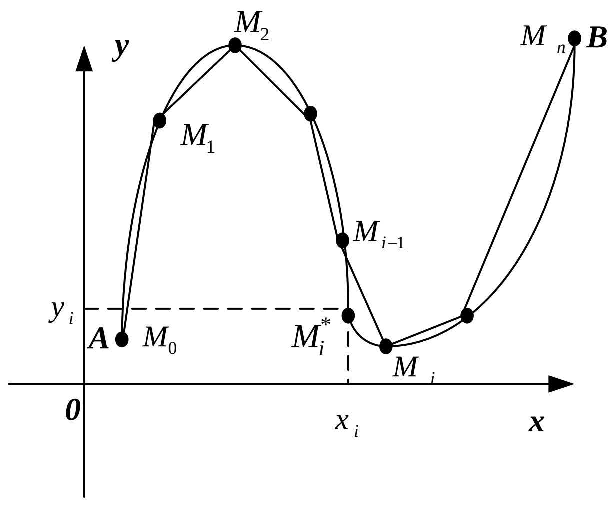

Рисунок 7 – Кривая интегрирования

Обозначим через λ наибольшую из длин частичных дуг $M_{i-1}M_i$ ($\lambda = \max\limits_{1\le i\le n} \Delta l_i$).

Если при $\lambda \to 0$ (тогда $n \to \infty$) существует конечный предел интегральных сумм (4), то его называют *криволинейным интегралом от функции* $f(x; y)$ *по длине кривой* AB (или I рода) и обозначают $\int\limits_{AB} f(x;y)dl$ (или $\int\limits_{L} f(x;y)dl$).

Таким образом, по определению

$$\int\limits_{AB} f(x;y)dl = \lim_{\substack{n\to\infty \\ (\lambda\to 0)}} \sum_{i=1}^{n} f(x_i;y_i)\Delta l_i.$$

Если функция $f(x; y)$ непрерывна в каждой точке гладкой кривой (в каждой точке $(x; y) \in L$ существует касательная к данной кривой и положение ее непрерывно меняется при перемещении точки по кривой), то криволинейный интеграл I рода существует, и его величина не зависит ни от способа разбиения кривой на части, ни от выбора точек в них.

Аналогично вводится понятие криволинейного интеграла от функции $f(x; y; z)$ по пространственной кривой L.

2.2 Свойства криволинейного интеграла I рода

1) Криволинейный интеграл I рода не зависит от направления пути интегрирования

$$\int\limits_{AB} f(x;y)dl = \int\limits_{BA} f(x;y)dl.$$

2) $\int\limits_{AB} cf(x;y)dl = c\int\limits_{AB} f(x;y)dl$, c – const.

3) $\int\limits_{AB} (f_1(x;y) \pm f_2(x;y))dl = \int\limits_{AB} f_1(x;y)dl \pm \int\limits_{AB} f_2(x;y)dl$.

4) Если путь интегрирования L разбит на части L_1 и L_2 такие, что $L = L_1 \cup L_2$ и L_1 и L_2 имеют единственную общую точку, то

$$\int\limits_{L} f(x;y)dl = \int\limits_{L_1} f(x;y)dl + \int\limits_{L_2} f(x;y)dl.$$

5) Если для точек кривой L выполнено неравенство $f_1(x; y) \le f_2(x; y)$, то

$$\int\limits_{L} f_1(x;y)dl \le \int\limits_{L} f_2(x;y)dl.$$

6) $\int\limits_{AB} dl = \lim\limits_{\substack{n\to\infty \\ (\lambda\to 0)}} \sum\limits_{i=1}^{n} \Delta l_i = l$, где l – длина кривой AB.

7) ***Теорема о среднем***. Если функция $f(x; y)$ непрерывна на кривой AB, то на этой кривой найдется точка $(x_c; y_c)$ такая, что

$$\int\limits_{AB} f(x;y)dl = f(x_c; y_c)\cdot l.$$

2.3 Вычисление криволинейного интеграла I рода

Вычисление криволинейного интеграла I рода сводится к вычислению определенного интеграла.

1) Если кривая AB задана параметрическими уравнениями

$$x = x(t),\ y = y(t),\ t \in [\alpha; \beta],$$

где $x(t)$ и $y(t)$ – непрерывно дифференцируемые функции параметра t, причем точке A соответствует $t = \alpha$, в точке B – значение $t = \beta$, то

$$\int\limits_{AB} f(x;y)dl = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f(x(t);y(t)) \cdot \sqrt{(x_t')^2 + (y_t')^2}\,dt. \qquad (5)$$

Аналогичная формула имеет место для криволинейного интеграла от функции $f(x; y; z)$ по пространственной кривой AB, задаваемой уравнениями $x = x(t), y = y(t), z = z(t), t \in [\alpha; \beta]$:

$$\int\limits_{AB} f(x;y;z)dl = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f(x(t);y(t);z(t)) \cdot \sqrt{(x_t')^2 + (y_t')^2 + (z_t')^2}\,dt.$$

2) Если кривая AB задана уравнением $y = \varphi(x)$, $x \in [a; b]$, где $\varphi(x)$ – непрерывно дифференцируемая функция, то

$$\int\limits_{AB} f(x;y)dl = \int\limits_{a}^{b} f(x;\varphi(x)) \cdot \sqrt{1 + (\varphi_x')^2}\,dx. \qquad (6)$$

3) Если плоская кривая AB задана уравнением $r = r(\varphi)$, $\alpha \le \varphi \le \beta$ в полярных координатах, то

$$\int\limits_{AB} f(x;y)dl = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f(r\cos\varphi; r\sin\varphi) \cdot \sqrt{r^2 + (r_\varphi')^2}\,d\varphi.$$

Пример 1. Вычислить интеграл $\int\limits_{AB} x^2 y dl$, где AB – часть окружности $x^2 + y^2 = R^2$, которая лежит в первой координатной плоскости.

Решение. Из формулы $x^2 + y^2 = R^2$ следует, что $y = \sqrt{R^2 - x^2}$, т.к. в первой четверти $y \ge 0$. Сначала вычислим

$$y'(x) = \left(\sqrt{R^2 - x^2}\right)' = -\frac{x}{\sqrt{R^2 - x^2}},$$

$$\sqrt{1 + (y'(x))^2} = \sqrt{1 + \frac{x^2}{R^2 - x^2}} = \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2}}.$$

Воспользовавшись формулой (6), получим

$$\int\limits_{AB} x^2 y dl = \int\limits_{0}^{R} x^2 \sqrt{R^2 - x^2} \cdot \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2}} dx = R\int\limits_{0}^{R} x^2 dx = R \cdot \left.\frac{x^3}{3}\right|_0^R = \frac{R^4}{3}.$$

Пример 2. Вычислить $\int\limits_{L} (3z - \sqrt{x^2 + y^2})dl$, где L – первый виток конической винтовой линии $x = t\cos t$, $y = t\sin t$, $z = t$, $0 \le t \le 2\pi$.

Решение. Находим

$$\sqrt{(x_t')^2+(y_t')^2+(z_t')^2} = \sqrt{(\cos t - t\sin t)^2+(\sin t + t\cos t)^2+1} = \sqrt{2+t^2}.$$

Тогда

$$\int_L (3z-\sqrt{x^2+y^2})dl = \int_0^{2\pi}(3t-t)\sqrt{2+t^2}\,dt = \int_0^{2\pi}2t\sqrt{2+t^2}\,dt = \frac{2}{3}(2+t^2)^{\frac{3}{2}}\Bigg|_0^{2\pi} =$$

$$= \frac{2}{3}\left(\sqrt{(2+4\pi^2)^3}-\sqrt{8}\right) = \frac{4\sqrt{2}}{3}\left(\sqrt{(1+2\pi^2)^3}-1\right).$$

Задачи для самостоятельного решения

Вычислить криволинейные интегралы:

1 $\int\limits_{AB}\frac{dl}{\sqrt{x^2+y^2}}$, где AB – отрезок прямой $y = \frac{1}{2}x-2$ от точки $A(0;-2)$ до точки $B(4;0)$.

2 $\int\limits_{AB} x\,dl$, где AB – дуга параболы $y = x^2$ от точки $A(2;-4)$ до точки $B(1;1)$.

3 $\int\limits_{AB}\frac{dl}{\sqrt{5}(x-y)}$, где AB – отрезок прямой, заключенной между точками $A(0;4)$ до точки $B(4;0)$.

4 $\int\limits_{L_{OAB}}(x+y)dl$, где L – контур треугольника с вершинами $O(0;0)$, $A(-2;0)$, $B(0;2)$.

5 $\int\limits_{L_{ABCD}} xy\,dl$, где L – контур прямоугольника с вершинами $A(3;0)$, $B(5;0)$, $C(5;4)$, $D(3;4)$.

6 $\int\limits_L (x^2+y^2+z^2)dl$, где L – дуга кривой $x = t\cos t$, $y = t\sin t$, $z = \sqrt{3}\,t$, $0 \le t \le 2\pi$.

7 $\int\limits_L \frac{z^2}{x^2+y^2}dl$, где L – первый виток конической винтовой линии $x = 2\cos t$, $y = 2\sin t$, $z = 2t$.

8 $\int\limits_L y^2 dl$, где L – первая арка циклоиды $x = t - \sin t$, $y = 1 - \cos t$.

9 $\int\limits_{AB}\frac{dl}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, где AB – отрезок прямой, соединяющей точки $A(1;1;1)$ и $B(2;2;2)$.

10 $\int\limits_L \frac{y\,dl}{\sqrt{x^2+y^2}}$, где L – дуга кардиоиды $r = 2(1+\cos\varphi)$, $0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$.

11 $\int\limits_L \frac{(y^2 - x^2)xy}{(x^2 + y^2)^2} dl$, где L – дуга кривой $r = 9\sin 2\varphi$, $0 \le \varphi \le \frac{\pi}{4}$.

12 $\int\limits_L (x + y) dl$, где L – дуга лемнискаты Бернулли $r^2 = \cos 2\varphi$, $-\frac{\pi}{4} \le \varphi \le \frac{\pi}{4}$.

2.4 Определение криволинейного интеграла второго рода

Криволинейный интеграл II рода определяется почти так же, как и интеграл I рода.

Пусть в плоскости Oxy задана непрерывная кривая AB (или L) длины l. Рассмотрим непрерывную функцию $P(x; y)$, определенную в каждой точке дуги AB. Разобьем кривую AB произвольно на n частей точками $M_0 = A$, M_1, M_2, … , M_{n-1}, $M_n = B$ в направлении от точки A к точке B. Выберем на каждой из частичных дуг $M_{i-1}M_i$ произвольную точку $M_i^*(x_i; y_i)$ (рисунок 8) и составим сумму вида

$$\sum_{i=1}^{n} P(x_i; y_i) \cdot \Delta x_i, \tag{7}$$

где $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ – проекция дуги $M_{i-1}M_i$ на ось Ox. Сумма (7) называется *интегральной суммой* для функции $P(x; y)$ по переменной x. Таких сумм можно составить бесчисленное множество.

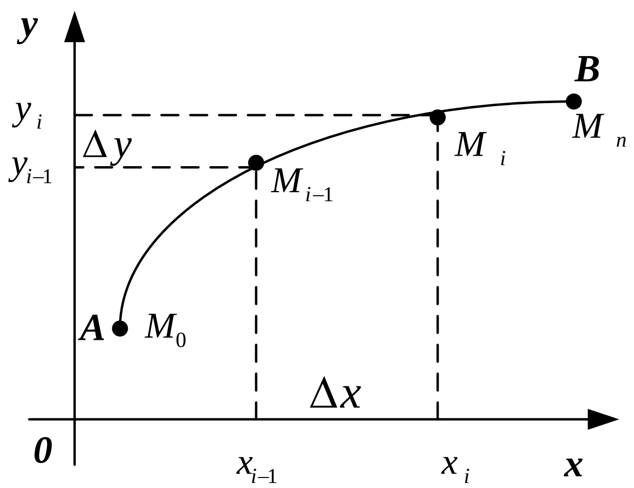

Рисунок 8 – Кривая *AB*

Если при $\lambda = \max\limits_{1 \le i \le n} \Delta x_i \to 0$ интегральная сумма (5) имеет конечный предел, не зависящий ни от способа разбиения кривой AB, ни от способа выбора точек $(x_i; y_i)$, то его называют *криволинейным интегралом по координате* x (или II рода) *от функции* $P(x; y)$ по кривой AB и обозначают $\int\limits_{AB} P(x; y) dx$ (или $\int\limits_L P(x; y) dx$).

Таким образом, по определению

$$\int\limits_{AB} P(x; y) dx = \lim_{\substack{n \to \infty \\ (\lambda \to 0)}} \sum_{i=1}^{n} P(x_i; y_i) \Delta x_i.$$

Аналогично вводится криволинейный интеграл от функции $Q(x; y)$ по координате y:

$$\int_{AB} Q(x;y)dy = \lim_{\substack{n\to\infty \\ (\lambda\to 0)}} \sum_{i=1}^{n} Q(x_i; y_i)\,\Delta y_i.$$

где Δy_i – проекция дуги $M_{i-1}M_i$ на ось Oy.

Криволинейный интеграл II рода общего вида

$$\int_{AB} P(x;y)dx + Q(x;y)dy$$

определяется равенством

$$\int_{AB} P(x;y)dx + Q(x;y)dy = \int_{AB} P(x;y)dx + \int_{AB} Q(x;y)dy.$$

Криволинейный интеграл $\int_{AB} P(x;y;z)dx + Q(x;y;z)dy + R(x;y;z)dz$ по пространственной кривой L определяется аналогично.

2.5 Свойства криволинейного интеграла II рода

1) Криволинейный интеграл II рода изменяет свой знак на противоположный при изменении направления пути интегрирования.

$$\int_{AB} P(x;y)dx + Q(x;y)dy = -\int_{BA} P(x;y)dx + Q(x;y)dy.$$

2) Если кривая AB точкой C разбита на две части AC и CB, то интеграл по всей кривой равен сумме интегралов по ее частям, т.е.

$$\int_{AB} P(x;y)dx + Q(x;y)dy = \int_{AC} P(x;y)dx + Q(x;y)dy + \int_{CB} P(x;y)dx + Q(x;y)dy.$$

2.6 Вычисление криволинейного интеграла II рода

1) Пусть кривая AB задана параметрическими уравнениями

$$x = x(t),\ y = y(t),\ t \in [\alpha; \beta],$$

где функции $x(t)$ и $y(t)$ непрерывны вместе со своими производными $x'(t)$ и $y'(t)$ на отрезке $[\alpha; \beta]$, причем начальной точке A кривой соответствует $t = \alpha$, а конечной точке B – значение $t = \beta$, то

$$\int_{AB} P(x;y)dx + Q(x;y)dy = \int_{\alpha}^{\beta} (P(x(t);y(t))x'(t) + Q(x(t);y(t))y'(t))dt. \qquad (8)$$

2) Если кривая AB задана уравнением $y = \varphi(x)$, $x \in [a; b]$, где $\varphi(x)$ и ее производная $\varphi'(x)$ непрерывны на отрезке $[a; b]$, то

$$\int_{AB} P(x;y)dx + Q(x;y)dy = \int_{a}^{b} [P(x;\varphi(x)) + Q(x;\varphi(x))\varphi'(x)]dx. \qquad (9)$$

Пример 1. Вычислить интеграл $\int\limits_{AB} x^2dx + \sqrt{x}ydy$, где AB – дуга окружности $x^2 + y^2 = R^2$, лежащая в первой координатной четверти и «пробегаемая» против хода часовой стрелки.

Решение. Из формулы $x^2 + y^2 = R^2$ следует, что $y = \sqrt{R^2 - x^2}$, т.к. дуга окружности в первой четверти $y \geq 0$. Так как

$$y'(x) = \left(\sqrt{R^2 - x^2}\right)' = -\frac{x}{\sqrt{R^2 - x^2}},$$

то согласно формуле (9) получим:

$$\int\limits_{AB} x^2dx + \sqrt{x}ydy = \int\limits_R^0 x^2dx + \sqrt{x} \cdot \sqrt{R^2 - x^2} \cdot \left(-\frac{x}{\sqrt{R^2 - x^2}}\right)dx = \int\limits_R^0 (x^2 - x\sqrt{x})dx =$$

$$= \left.\left(\frac{x^3}{3} - \frac{2x^{\frac{5}{2}}}{2}\right)\right|_R^0 = \frac{1}{15}R^2(6\sqrt{R} - 5R).$$

Пример 2. Вычислить интеграл $\oint \frac{(x+y)dx - (x-y)dy}{x^2 + y^2}$, где L – окружность $x^2 + y^2 = a^2$, «пробегаемая» против хода часовой стрелки.

Решение. Параметрические уравнения окружности L, по которой «пробегают» против хода часовой стрелки, при возрастании аргумента имеют вид

$$x = a\cos t,\ y = a\sin t,\ 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Тогда

$$dx = -a\sin t dt,\ dy = a\cos t dt.$$

Вычислим подынтегральное выражение на кривой L

$$\frac{(x+y)dx - (x-y)dy}{x^2 + y^2} = \frac{(a\cos t + a\sin t)(-a\sin t)dt - (a\cos t - a\sin t)a\cos t dt}{a^2\cos^2 t + a^2\sin^2 t} =$$

$$= \frac{-a^2\cos t\sin t dt - a^2\sin^2 t dt - a^2\cos^2 t dt + a^2\sin t\cos t dt}{a^2} = -dt.$$

Отсюда по формуле (8) получаем:

$$\oint \frac{(x+y)dx - (x-y)dy}{x^2 + y^2} = -\int\limits_0^{2\pi} dt = -2\pi.$$

Задачи для самостоятельного решения

Вычислить криволинейные интегралы:

1 $\int\limits_{AB}\left(x - \frac{1}{ó}\right)dy$, где AB – дуга параболы $y = x^2$, лежащая между точками $A(1;\ 1)$ и $B(2;\ 4)$.

2 $\int\limits_L xydx$, где L – дуга синусоиды $y = \sin x$ от $x = 2\pi$ до $x = 0$.

3 $\int\limits_L xd\acute{o}$, где L – контур треугольника, ограниченного прямыми $y = x$, $x = 2$, $y = 0$, при положительном направлении обхода.

4 $\int\limits_L (x^2 - \acute{o})d\tilde{o}$, где L – контур тпрямоугольника, ограниченного прямыми $x = 0$, y = 0, $x = 1$, $y = 2$, при положительном направлении обхода.

5 $\int\limits_L (x\acute{o} - \acute{o}^2)d\tilde{o} + \tilde{o}dy$ от точки (0; 0) до точки (1; 2) по кривым:

а) $y = 2x$; б) $y = 2x^2$; в) $y = 2\sqrt{\tilde{o}}$.

6 $\int\limits_L xd\acute{o} - \acute{o}d\tilde{o}$, где L – дуга кривой $y = x^3$, расположенная между точками (0; 0) и (2; 8).

7 $\int\limits_L xd\tilde{o} + \acute{o}dy + (\tilde{o} + \acute{o} - 1)dz$, где AB – отрезок прямой, соединяющей точки $A(1; 1; 1)$ и $B(2; 3; 4)$.

8 $\oint\limits_L (x^2 y - x)dx + (y^2 x - 2y)dy$, где L – дуга эллипса $x = 3\cos t$, $y = 2\sin t$, при положительном направлении обхода.

Список использованных источников

1 Письменный Д.Т. Конспект лекций по высшей математике: полный курс / Д.Т. Письменный. – 4-е изд. – М.: Айрис-пресс, 2006. – 608 с.

2 Шипачев В.С. Высшая математика: учеб. для немат. спец. вузов / Под ред. акад. А.Н. Тихонова. 2-е изд., стер. – М.: Высш. шк., 1990. – 479 с.

3 Индивидуальные задания по высшей математике: учеб. пособие. В 4 ч. Ч. 3. Ряды. Кратные и криволинейные интегралы. Элементы теории поля / А.П. Рябушко [и др.]; под общ. ред. А.П. Рябушко. – 5-е изд., испр. – Минск: Выш. шк., 2009. – 367 с.

Учебное издание

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

Методические указания

Составители:
Юрченко Ирина Викторовна
Шендрикова Ольга Александровна

Редактор *А.А. Щербакова*
Технический редактор *Н.Г.Тверская*

Подписано в печать Формат 60×84 1 ⁄ 16.
Бумага офсетная. Гарнитура Таймс. Ризография.
Усл.печ.л. Уч.-изд.
Тираж 30 экз. Заказ .

Учреждение образования
«Могилевский государственный университет продовольствия».
Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя, распространителя печатных изданий № 1/272 от 04.04.2014.
Пр-т Шмидта, 3, 212027, Могилев.

Отпечатано в учреждении образования
«Могилевский государственный университет продовольствия».
Пр-т Шмидта, 3, 212027, Могилев.