Министерство образования Республики Беларусь

Учреждение образования
«Могилевский государственный университет продовольствия»

Кафедра высшей математики

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

Методические указания
к решению основных типов дифференциальных уравнений
для студентов всех форм обучения и специальностей

Могилев 2013

УДК 519.21
ББК 22.1

Рассмотрено и рекомендовано к изданию
на заседании кафедры высшей математики
Протокол № 12 от 29. 05. 2013 г.

Составители:
старший преподаватель С.В. Лох
ассистент Ю.М. Гребенцов

Рецензент
к.ф.-м. н., доцент В.К. Лапковский

УДК 51
ББК 22.1

Оглавление

1 Дифференциальные уравнения первого порядка

Дифференциальное уравнение первого порядка можно записать в виде

$$F(x;y;y^{/})=0. \qquad (1.1)$$

Уравнение (1.1) связывает независимую переменную x, неизвестную функцию y и ее производную $y^{/}$. Если уравнение (1.1) можно разрешить относительно $y^{/}$, то его записывают в виде

$$y^{/}=f(x;y) \qquad (1.2),$$

и называют разрешенным относительно $y^{/}$.

1.1 Дифференциальные уравнения первого порядка с разделяющимися переменными

Уравнение вида

$$f_1(x)\cdot\varphi_1(y)\cdot \mathrm{d}x+f_2(x)\cdot\varphi_2(y)\cdot \mathrm{d}y=0 \qquad (1.3)$$

называется *дифференциальным уравнением первого порядка с разделяющимися переменными в дифференциальной форме*.

Особенность: Коэффициенты при $\mathrm{d}x$ и $\mathrm{d}y$ – множители, каждый из которых содержит только одну переменную.

Разделить переменные это значит собрать по одну сторону от знака равенства множители, содержащие одну переменную и ее дифференциал, а по другую – с другой переменной и ее дифференциалом.

Для его решения воспользуемся следующим алгоритмом:

1. Перенесем слагаемое с $\mathrm{d}x$ в правую часть

$$f_2(x)\cdot\varphi_2(y)\cdot \mathrm{d}y=-f_1(x)\cdot\varphi_1(y)\cdot \mathrm{d}x. \qquad (1.4)$$

2. Разделим получившееся уравнение на $f_2(x)\cdot\varphi_1(y)\neq 0$. Получаем:

$$\frac{\varphi_2(y)}{\varphi_1(y)}\mathrm{d}y=-\frac{f_1(x)}{f_2(x)}\mathrm{d}x. \qquad (1.5)$$

Полученное уравнение (1.5) называется *дифференциальным уравнением первого порядка с разделенными переменными.*

3. Проинтегрируем левую и правую части уравнения (1.5)

$$\int\frac{\varphi_2(y)}{\varphi_1(y)}\mathrm{d}y=-\int\frac{f_1(x)}{f_2(x)}\mathrm{d}x+C, \qquad (1.6)$$

где C – произвольная постоянная.

4. Вычисляя интегралы в (1.6) и выражая искомую функцию $\boldsymbol{y}$ получаем *общее решение* дифференциального уравнения (1.3).

Чаще можно встретить запись уравнения (1.3) в виде:

$$y' = \cdot f(x) \cdot \varphi(y). \tag{1.7}$$

В этом случае y' представляем в виде $y' = \dfrac{dy}{dx}$, умножаем полученное уравнение на dx и решаем согласно приведенному выше алгоритму.

Пример 1

Найти общее решение (общий интеграл) дифференциального уравнения:

$$\sin x \cos y\, dy - \cos x \sin y\, dx = 0$$

Согласно алгоритму решения имеем:

1. Перенесем слагаемое с dx в правую часть

$$\sin x \cos y\, dy = \cos x \sin y\, dx.$$

2. Разделим получившееся уравнение на $\sin x \cdot \sin y \neq 0$:

$$\frac{\cos y}{\sin y} dy = \frac{\cos x}{\sin x} dx.$$

3. Проинтегрируем левую и правую части полученного уравнения:

$$\int \frac{\cos y}{\sin y} dy = \int \frac{\cos x}{\sin x} dx + C.$$

4. Вычисляя интегралы, и выражая искомую функцию y, получаем:

$\ln|\sin y| = \ln|\sin x| + \ln C_1$;

$\ln|\sin y| = \ln(C_1 \cdot |\sin x|)$;

$\sin y = C_1 \cdot \sin x$;

$y = \arcsin(C_1 \cdot \sin x)$ – искомое общее решение исходного уравнения, где C_1 – *const*.

Пример 2

Найти общее решение (общий интеграл) дифференциального уравнения:

$$y' = \mathrm{ctg} x \cdot (y - 3).$$

Решение

Заменяем $y' = \dfrac{dy}{dx}$:

$$\frac{dy}{dx} = \mathrm{ctg} x \cdot (y - 3).$$

Умножим на $dx \neq 0$ левую и правую части:

$$\mathrm{d}\boldsymbol{y} = \mathrm{ctg}\boldsymbol{x} \cdot (\boldsymbol{y} - \mathbf{3}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{x}.$$

Разделим получившееся уравнение на $(\boldsymbol{y} - \mathbf{3}) \neq \mathbf{0}$:

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{y}}{\boldsymbol{y} - \mathbf{3}} = \mathrm{ctg}\boldsymbol{x} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{x}.$$

Интегрируем левую и правую части:

$$\int \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{y}}{\boldsymbol{y} - \mathbf{3}} = \int \mathrm{ctg}\boldsymbol{x} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{C}.$$

Вычисляем интегралы и выражаем $\boldsymbol{y}$:

$\mathbf{ln}|\boldsymbol{y} - 3| = \int \frac{\mathbf{cos}\,\boldsymbol{x}}{\mathbf{sin}\,\boldsymbol{x}} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{C}$;

$\mathbf{ln}|\boldsymbol{y} - 3| = \mathbf{ln}|\mathbf{sin}\,\boldsymbol{x}| + \mathbf{ln}\,\boldsymbol{C}_1$;

$\boldsymbol{y} - \mathbf{3} = \boldsymbol{C}_1 \cdot \mathbf{sin}\,\boldsymbol{x}$;

$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{C}_1 \cdot \mathbf{sin}\,\boldsymbol{x} + \mathbf{3}$ – искомое *общее решение* исходного уравнения.

Задания для самостоятельного выполнения:

Найти общее решение (общий интеграл) дифференциального уравнения

1. $y' = \mathrm{tg}x \cdot (y+1)$;
2. $x(1-y^2)\mathrm{d}x + y(1-x^2)\mathrm{d}y = 0$;
3. $xy\mathrm{d}x + (1+y^2)\sqrt{1+x^2}\mathrm{d}y = 0$;
4. $y^2 \cdot y' + 2x - 1 = 0$;
5. $y' = e^{2x+3y}$;
6. $(1+y^2)\mathrm{d}x - \sqrt{x}\mathrm{d}y = 0$;
7. $x \cdot y' + y + y^2 = 0$;
8. $y' \cos x - (y+1)\sin x = 0$;
9. $y' - (3y+4)\mathrm{ctg}x = 0$;
10. $\sin y \cos x \mathrm{d}y - \cos y \sin x \mathrm{d}x = 0$;
11. $\frac{\mathrm{tg}y}{\cos^2 x}\mathrm{d}x + \frac{\mathrm{tg}x}{\cos^2 y}\mathrm{d}y = 0$;
12. $y'\mathrm{tg}x - y = 7$;
13. $x \cdot y' + y - y^2 = 0$;
14. $e^y(1+y') = 1$;
15. $2e^x \mathrm{tg}y\mathrm{d}x + (3-e^x)\frac{\mathrm{d}y}{\cos^2 y} = 0$;
16. $y - xy' - 2(1+x^2y') = 0$;
17. $y - xy = (1+x^2)y'$;
18. $e^y(1+x^2)y' - 2x(1+e^y) = 0$;
19. $x(1+y^2) + (1+y^3)y' = 0$;
20. $y' \sin x - y \ln y = 0$.

1.2 Однородные дифференциальные уравнения первого порядка

Уравнение вида

$$P(x;y)\cdot \mathrm{d}x + Q(x;y)\cdot \mathrm{d}y = 0 \qquad (1.8)$$

называется *однородным дифференциальным уравнением первого порядка в дифференциальной форме*, если $P(x;y)$ и $Q(x;y)$ – однородные функции одинакового порядка, то есть выполняются равенства:

$$P(\lambda x;\lambda y) = \lambda^k P(x;y);$$

$$Q(\lambda x;\lambda y) = \lambda^k Q(x;y).$$

Однородное дифференциальное уравнение первого порядка (1.8) обычно, с помощью математических преобразований, приводят к виду:

$$y' = \varphi\left(\frac{y}{x}\right). \qquad (1.9)$$

Для решения уравнения (1.8) воспользуемся следующим алгоритмом:

1. Переносим слагаемое с $\mathrm{d}x$ в правую часть

$$Q(x;y)\cdot \mathrm{d}y = -P(x;y)\cdot \mathrm{d}x.$$

2. Полученное уравнение делим почленно на $Q(x;y)\cdot \mathrm{d}x \neq 0$:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{P(x;y)}{Q(x;y)}.$$

Получили уравнение вида (1.9)

3. Вводим подстановку $y = u(x)\cdot x$, где $u = u(x)$ – новая неизвестная функция, подлежащая определению, тогда $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = y' = u'x + u$:

$$u'x + u = -\frac{P(x;ux)}{Q(x;ux)}. \qquad (1.10)$$

4. Путем математических преобразований, уравнение (1.10), приводится к дифференциальному уравнению с разделяющимися переменными. (Решение см. п.п. 1.1)

Пример 3

Найти общее решение (общий интеграл) однородно дифференциального уравнения первого порядка:

$$(x^2 + y^2)\mathrm{d}x + 2xy\mathrm{d}y = 0.$$

Согласно алгоритму решения:

1. Перенесем слагаемое с $\mathrm{d}x$ в правую часть

$$2xy\mathrm{d}y = -(x^2 + y^2)\mathrm{d}x.$$

2. Полученное уравнение делим почленно на $2xy \cdot \mathrm{d}x \neq 0$:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{(x^2 + y^2)}{2xy}.$$

3. Вводим подстановку $y = u(x) \cdot x$, где $u = u(x)$ – новая неизвестная функция, подлежащая определению, тогда $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = y' = u'x + u$:

$$u'x + u = -\frac{x^2 + (ux)^2}{2xux};$$

$$u'x + u = -\frac{x^2(1 + u^2)}{2x^2u};$$

$$u'x = -\frac{1 + u^2 - 2u^2}{2u};$$

$$\frac{du}{dx}x = -\frac{1 - u^2}{2u};$$

$$\frac{2u \cdot du}{u^2 - 1} = -\frac{dx}{x}.$$

Интегрируя, получаем:

$$\int \frac{2u \cdot du}{u^2 - 1} = -\int \frac{dx}{x} + C.$$

Вычисляем интегралы:

$\ln(u^2 - 1) = \ln x^{-1} + \ln C_1$;

$u^2 - 1 = \frac{C_1}{x}$;

$u = \pm\sqrt{\frac{C_1}{x} + 1}$ – искомая функция $u = u(x)$. Подставляем ее в выражение $y = u(x) \cdot x$ и находим *общее решение* исходного уравнения:

$y = \pm\sqrt{\frac{C_1}{x} + 1} \cdot x$ – искомое общее решение.

Пример 4

Найти общее решение (общий интеграл) дифференциального уравнения

$$xy' = y - x \cdot e^{\frac{y}{x}}.$$

Решение:

1. Вводим замену $y=u\cdot x$, тогда $y' = u' \cdot x+u$:

$$x\cdot(u'x+u)=ux-x\cdot e^{\frac{ux}{x}}.$$

2. Делим на $x\neq 0$:

$$u'x+u=\frac{x\cdot(u-e^{u})}{x}.$$

3. Проводим элементарные преобразования и сводим уравнение к уравнению с разделяющимися переменными:

$$u'x=u-e^{u}-u;$$

$$u'x=-e^{u}.$$

4. Решаем полученное уравнение:

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}x=-e^{u};$$

$$\frac{\mathrm{d}u}{e^{u}}=-\frac{\mathrm{d}x}{x};$$

$$\int\frac{\mathrm{d}u}{e^{u}}=-\int\frac{\mathrm{d}x}{x}+C;$$

$$e^{-u}=\ln|x|+\ln C_1;$$

$$e^{-u}=\ln(C_1\cdot|x|).$$

5. Проводя обратную подстановку $u=\frac{y}{x}$, получаем общий интеграл:

$e^{-\frac{y}{x}}=\ln(C_1\cdot|x|)$ – общий интеграл исходного уравнения.

Задания для самостоятельного выполнения:

Найти общее решение (общий интеграл) дифференциального уравнения

1. $(x^2-y^2)\mathrm{d}x+xy\mathrm{d}y=0$;

2. $y'=\frac{y}{x+y}$;

3. $y'=\frac{x-y}{x+y}$;

4. $y'=\frac{2xy}{x^2-y^2}$;

5. $2x^2y'-x^2-y^2=0$;

11. $(y+\sqrt{x^2+y^2})\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y=0$;

12. $2xy\mathrm{d}x+(y^2-3x^2)\mathrm{d}y=0$;

13. $xy'-4\sqrt{x^2+y^2})-y=0$;

14. $(2x-y)y'-x-2y=0$;

15. $3x^2y'-y^2-8xy-4x^2=0$;

6. $(3x^2 - y^2)y' - 2xy = 0$;

7. $xy' - y - xe^{\frac{y}{x}} = 0$;

8. $(y + \sqrt{xy})\mathrm{d}x = x\mathrm{d}y$;

9. $(y - x)\mathrm{d}x + (y + x)\mathrm{d}y = 0$;

10. $x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x = \sqrt{x^2 - y^2}\mathrm{d}x$;

16. $xy' \ln\frac{y}{x} - x - y\ln\frac{y}{x} = 0$;

17. $y' - \frac{y}{x} + \mathrm{tg}\frac{y}{x} = 0$;

18. $x\ln\frac{x}{y}\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x = 0$;

19. $y' = \dfrac{y + 2\sqrt{xy}}{x}$;

20. $xy \cdot e^{\frac{x}{y}} + y^2 = x^2 \cdot y' e^{\frac{x}{y}}$.

1.3 Линейные дифференциальные уравнения первого порядка

Уравнение вида

$$\boldsymbol{y' + p(x) \cdot y = q(x)}, \tag{1.11}$$

где $\boldsymbol{p(x)}$, $\boldsymbol{q(x)}$– заданные функции, в частности– постоянные, называется *линейным дифференциальным уравнением первого порядка.*

Особенность: искомая функция и ее производнаявходят в уравнение в первой степени.

Для его решения воспользуемся следующим алгоритмом:

1. Вводим подстановку $\boldsymbol{y = u(x) \cdot v(x)}$, где $\boldsymbol{u = u(x)}$ и $\boldsymbol{v = v(x)}$ – новые неизвестные функции, подлежащие определению, тогда $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{y}}{\mathrm{d}\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{y' = u'v + uv'}$:

$$\boldsymbol{u'v + uv' + p(x) \cdot u \cdot v = q(x)}. \tag{1.12}$$

2. Выносим за скобки $\boldsymbol{u}$ (или $\boldsymbol{v}$) во втором и третьем слагаемых (в первом и третьем слагаемых) соответственно:

$$\boldsymbol{u'v + u\underbrace{(v' + p(x) \cdot v)}_{*} = q(x)}. \tag{1.13}$$

3. Потребуем, чтобы выражение в скобках (*) равнялось нулю, т.е. решим дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными относительно неизвестной функции $\boldsymbol{v(x)}$ (см. п.п. 1.1), и найдем ее:

$$\boldsymbol{v' + p(x) \cdot v = 0};$$

$$\boldsymbol{v' = -p(x) \cdot v}. \tag{1.14}$$

4. Подставляя найденную из уравнения (1.14) функцию $v = v(x)$ в уравнение (1.13), получаем:

$$u' v = q(x). \tag{1.15}$$

Примечание: слагаемое, содержащее (*) обнулилось, так как в пункте 3 нашего алгоритма была найдена такая функция $v = v(x)$, что скобка (*) равна нулю!

5. Решая уравнение (1.15), которое является *дифференциальным уравнением* с *разделяющимися переменными первого порядка*, находим вторую неизвестную функцию $u = u(x)$.

6. Тогда *искомое общее решение* исходного дифференциального уравнения (1.11) записываем как произведение функций $u = u(x)$ и $v = v(x)$, найденных в пунктах 3 и 5 нашего алгоритма (см. пункт 1 алгоритма).

Пример 5

Найти общее решение (общий интеграл) дифференциального уравнения

$$y' + 2y = 4x.$$

Решение:

1. Вводим подстановку $y = u(x) \cdot v(x)$, где $u = u(x)$ и $v = v(x)$ – новые неизвестные функции, подлежащие определению, тогда $\frac{dy}{dx} = y' = u'v + uv'$:

$$u'v + uv' + 2 \cdot u \cdot v = 4x.$$

2. Выносим за скобки u во втором и третьем слагаемых соответственно:

$$u'v + u\underbrace{(v' + 2 \cdot v)}_{*} = 4x.$$

3. Потребуем, чтобы выражение в скобках (*) равнялось нулю, т.е. решим дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными (см. п.п. 1.1) и найдем функцию $v = v(x)$:

$$v' + 2 \cdot v = 0;$$

$$v' = -2 \cdot v;$$

$$\frac{dv}{dx} = -2v;$$

$$\frac{dv}{v} = -2 \cdot dx;$$

$$\int \frac{dv}{v} = -2\int dx + C;$$

$$\ln v = -2x + C;$$

$$v = e^{-2x+C}.$$

4. Подставляя найденную функцию $v = e^{-2x+C}$ в уравнение пункта 2, получаем:

$$u' e^{-2x+C} = 4x.$$

Примечание: слагаемое, содержащее (*) обнулилось, так как была найдена такая функция $v = e^{-2x+C}$, что скобка (*) равна нулю!

5. Решая полученное уравнение, которое является *дифференциальным уравнением* с *разделяющимися переменными первого порядка,* находим вторую неизвестную функцию $u = u(x)$:

$$\frac{du}{dx} e^{-2x+C} = 4x;$$

$$du = 4x \cdot e^{2x+C_1} dx;$$

$$du = 4x \cdot e^{2x+C_1} dx;$$

$$\int du = \int 4x \cdot e^{2x+C_1} dx + C_2;$$

$$u = e^{2x+C_1}(2x - 1) + C_2.$$

6. Тогда *искомое общее решение* исходного дифференциального уравнения записываем как произведение функций $u = u(x)$ и $v = v(x)$, найденных в пунктах 3 и 5 нашего алгоритма (см. пункт 1 алгоритма):

$y = (e^{2x+C_1}(2x - 1) + C_2) \cdot e^{2x+C}$ – общее решение исходного уравнения.

Задания для самостоятельного выполнения:

Найти решение задачи Кошидля линейного дифференциального уравнения первого порядка

1. $x \cdot y' + 2y = x^4$, $y(1) = 3$;
2. $y' - 4xy = x$, $y(0) = \frac{3}{4}$;
3. $y' + 2xy = 2x \cdot e^{-x^2}$, $y(0) = 5$;
4. $(1 + x^2)y' - 2xy = (1 + x^2)^2$, $y(-2) = 5$;

11. $y' + 2xy = 3x^2 \cdot e^{-x^2}$, $y(0) = 0$;

12. $y' \sin x - y \cos x = 1$, $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$;

13. $(1 + x^2)y' - 2xy = (1 + x^2)\operatorname{arctg}^2 x$, $y(0) = 0$;

14. $\sqrt{1 - x^2}\, y' + y = \arcsin x$, $y(0) = -1$;

5. $x^2 \cdot y' + 2xy = 1$, $y(3) = 1$;

6. $y' \cos x - 2y \sin x = 2$, $y(0) = 3$;

7. $x(1+x^2)y' + (1+x^2)y = 2x$, $y(1) = 0$;

8. $x \cdot y' - 3y = x^4 e^x$, $y(1) = e$;

9. $(1+x^2)y' + (1+x^2)y = e^{-x}$, $y(0) = 2$;

10. $y' - y \sin x = \sin 2x \cdot e^{-\cos x}$, $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 3$;

15. $(1+x^2)y' + y = \operatorname{arctg} x$, $y(0) = 1$;

16. $y' + y \cdot \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x$, $y(0) = 0$;

17. $(x+1) \cdot y' - y = e^x (x+1)^2$, $y(0) = 1$;

18. $y' - y \cdot \cos x = -\sin 2x$, $y(0) = 3$;

19. $y' + 2xy = 2x \cdot e^{-x^2}$, $y(0) = 0$;

20. $y' - y \cdot \operatorname{tg} x = \frac{1}{\cos x}$, $y(0) = 0$.

2 Дифференциальные уравнения второго порядка

2.1 Уравнения второго порядка, допускающие понижение порядка

Одним из методов решения дифференциальных уравнений второго порядка является *метод понижения порядка*. Суть метода состоит в том, что с помощью подстановки дифференциальное уравнение второго порядка сводится к дифференциальному уравнению первого порядка.

I. Рассмотрим уравнение

$$\boldsymbol{y'' = f(x)}, \tag{2.1}$$

не содержащее явно неизвестной функции $\boldsymbol{y}$ и ее производной $\boldsymbol{y'}$.

Алгоритм решения:

1. Понизим порядок, введя замену

$$\boldsymbol{y' = p(x)}, \tag{2.2}$$

где $\boldsymbol{p = p(x)}$ – новая неизвестная функция, зависящая от $\boldsymbol{x}$, тогда $\boldsymbol{y'' = p'(x)}$. Подставляя в уравнение (2.1), получаем:

$$\boldsymbol{p'(x) = f(x)}. \tag{2.3}$$

Уравнение (2.2) – дифференциальное уравнение первого порядка с разделяющимися переменными (решение см. § 1 п.п. 1.1), решая которое, находим функцию $\boldsymbol{p = p(x)}$.

2. Подставляя в (2.2) найденную функцию $\boldsymbol{p}=\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x})$, получаем дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными, решая которое находим неизвестную функцию $\boldsymbol{y}$:

$$\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}) \tag{2.4}$$

Таким образом, решение уравнения (2.1) сводится к последовательному решению двух дифференциальных уравнений первого порядка: (2.3) и (2.4).

Пример 6

Найти общее решение (общий интеграл) дифференциального уравнения

$$\boldsymbol{y}''=\mathbf{sin}\,\boldsymbol{x}+\mathbf{2}\boldsymbol{x}.$$

Решение:

1. Понизим порядок, введя замену

$$\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}),$$

где $\boldsymbol{p}=\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x})$ – новая неизвестная функция, зависящая от $\boldsymbol{x}$, тогда $\boldsymbol{y}'' = \boldsymbol{p}'(\boldsymbol{x})$. Подставляя в уравнение, получаем:

$$\boldsymbol{p}' = \mathbf{sin}\,\boldsymbol{x}+\mathbf{2}\boldsymbol{x}.$$

2. Решаем полученное дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными:

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}=\mathbf{sin}\,\boldsymbol{x}+\mathbf{2}\boldsymbol{x};$$
$$\mathrm{d}\boldsymbol{p}=(\mathbf{sin}\,\boldsymbol{x}+\mathbf{2}\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x};$$
$$\int \mathrm{d}\boldsymbol{p}=\int(\mathbf{sin}\,\boldsymbol{x}+\mathbf{2}\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{C};$$
$$\boldsymbol{p}=-\mathbf{cos}\,\boldsymbol{x}+\boldsymbol{x}^{\mathbf{2}}+\boldsymbol{C}.$$

3. Проводим обратную замену $\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{p}(\boldsymbol{x})$ и решаем второе дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными:

$$\boldsymbol{y}' =-\mathbf{cos}\,\boldsymbol{x}+\boldsymbol{x}^{\mathbf{2}}+\boldsymbol{C};$$
$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{y}}{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}=-\mathbf{cos}\,\boldsymbol{x}+\boldsymbol{x}^{\mathbf{2}}+\boldsymbol{C};$$
$$\mathrm{d}\boldsymbol{y}=(-\mathbf{cos}\,\boldsymbol{x}+\boldsymbol{x}^{\mathbf{2}}+\boldsymbol{C})\mathrm{d}\boldsymbol{x};$$
$$\int \mathrm{d}\boldsymbol{y}=\int(-\mathbf{cos}\,\boldsymbol{x}+\boldsymbol{x}^{\mathbf{2}}+\boldsymbol{C})\mathrm{d}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{C}_{\mathbf{1}};$$

$\boldsymbol{y}=-\mathbf{sin}\,\boldsymbol{x}+\dfrac{\boldsymbol{x}^{\mathbf{3}}}{\mathbf{3}}+\boldsymbol{C}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{C}_{\mathbf{1}}$ – искомое общее решение исходного дифференциального уравнения.

II. Рассмотрим уравнение

$$\boldsymbol{y}''=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x};\boldsymbol{y}'), \tag{2.5}$$

не содержащее явно искомой функции y.

Алгоритм решения:

1. Понизим порядок, введя замену

$$y' = p(x), \tag{2.6}$$

где $p = p(x)$ – вспомогательная функция, зависящая от x, тогда $y'' = p'(x)$. Подставляя в уравнение (2.5), получаем:

$$p'(x) = f(x; p), \tag{2.7}$$

которое нужно решить относительно функции $p = p(x)$.

2. Пусть $p = \varphi(x; c_1)$ – решение уравнения (2.7), тогда с учетом нашей замены, получим дифференциальное уравнение первого порядка, разрешаемое относительно функции $y = y(x)$:

$$y' = \varphi(x; c_1). \tag{2.8}$$

3. Интегрируя уравнение (2.8) получаем:

$$y = \int \varphi(x; c_1)\mathrm{d}x + c_2 \tag{2.9}$$

4. Таким образом, равенство (2.9) – искомое общее решение уравнения (2.5).

Пример 7

Найти общее решение (общий интеграл) дифференциального уравнения

$$xy'' = y'.$$

Решение:

1. Понизим порядок, введя замену

$$y' = p(x),$$

где $p = p(x)$ – новая неизвестная функция, зависящая от x, тогда $y'' = p'(x) = p'$. Подставляя в уравнение (2.5), получаем:

$$xp' = p,$$

которое нужно решить относительно функции $p = p(x)$.

2. Решаем полученное уравнение

$$x\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} = p;$$

$$x\mathrm{d}p = p\mathrm{d}x;$$

$$\int \frac{dp}{p} = \int \frac{dx}{x} + C;$$

$$\ln|p| = \ln(|x| \cdot C);$$

$$p = x \cdot C.$$

3. Проведём обратную подстановку $y' = p(x)$ и решим полученное уравнение относительно неизвестной функции $y = y(x)$:

$$y' = x \cdot C;$$

$$\frac{dy}{dx} = x \cdot C;$$

$$\int dy = C \int x \cdot dx;$$

$y = C\dfrac{x^2}{2} + C_1$ – искомое общее решение исходного уравнения.

III. Рассмотрим уравнение

$$y'' = f(y; y'), \tag{2.10}$$

не содержащее явно независимой переменной x.

Алгоритм решения:

1. Понизим порядок, введя замену

$$y' = p(y), \tag{2.11}$$

где $p = p(y)$ – вспомогательная функция, зависящая от $y = y(x)$, тогда $y'' = (p(y(x)))' = \dfrac{dp}{dy} \cdot \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dp}{dy} \cdot p(y) = p(y) \cdot \dfrac{dp}{dy}$.

Подставляя в уравнение (2.10), получаем:

$$p \cdot \frac{dp}{dy} = f(y; p), \tag{2.12}$$

которое нужно решить относительно функции $p = p(y)$.

2. Пусть $p = \varphi(y; c_1)$ – общее решение уравнения (2.12), тогда с учетом нашей замены, получим дифференциальное уравнение первого порядка, разрешаемое относительно функции $y = y(x)$:

$$y' = \varphi(y; c_1). \tag{2.13}$$

3. Интегрируя уравнение (2.13) получаем:

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{\varphi(y;c_1)} = x + c_2. \qquad (2.14)$$

4. Таким образом, равенство (2.14) – искомый общий интеграл уравнения (2.10).

Пример 8

Найти общее решение (общий интеграл) дифференциального уравнения

$$(y^{/})^2 = 2yy^{//}.$$

Решение:

1. Понизим порядок, введя замену

$$y^{/} = p(y),$$

где $p = p(y)$ – вспомогательная функция, зависящая от y, тогда $y^{//} = p(y) \cdot \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}$.

Подставляя в уравнение имеем:

$$p^2 = 2yp\frac{dp}{dy}.$$

Полученное дифференциальное уравнение является уравнением с разделяющимися переменными, которое решаем относительно функции $p = p(y)$:

$$\frac{dp}{p} = \frac{dy}{2y};$$

$$\int \frac{dp}{p} = \int \frac{dy}{2y} + C;$$

$$\ln p = \ln(\sqrt{y} \cdot C_1);$$

$p = \sqrt{y} \cdot C_1$ – искомая функция $p = p(y)$.

2. Проводим обратную замену и решаем полученное дифференциальное уравнение первого порядка относительно функции $y = y(x)$:

$$y^{/} = \sqrt{y} \cdot C_1;$$

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{y} \cdot C_1;$$

$$\frac{dy}{\sqrt{y}} = C_1 \cdot dx.$$

3. Интегрируя получаем:

$$\int \frac{dy}{\sqrt{y}} = \int C_1 \cdot dx;$$

$$\sqrt{y} = C_1 \cdot x + C_2.$$

4. Таким образом $\sqrt{y} = C_1 \cdot x + C_2$ – искомый общий интеграл исходного уравнения.

Задания для самостоятельного выполнения:

Найти общее решение (общий интеграл) дифференциального уравнения

1. $y'' = \dfrac{y'}{1+x}$;

2. $y'' = \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{y'}{x}$, $y(1) = 1;\ y'(1) = 2$;

3. $y'' = \dfrac{y'}{x} + x \cdot e^x$;

4. $(1+x^2) \cdot y'' + 2xy' = x^3$;

5. $y'' = \dfrac{y'}{x \cdot \ln x}$;

6. $y'' = a \cdot \sqrt{1 + (y')^2}$;

7. $y'' + y' \mathrm{tg} x = \sin 2x$, $y(0) = 1;\ y'(0) = 0$;

8. $y'' = -\dfrac{y'}{x} - 1$;

9. $y'' = \dfrac{1}{x^3} - \dfrac{y'}{x}$;

10. $(1-x^2)y'' - xy' = 2$;

11. $(1-y)y'' + 2(y')^2 = 0$, $y(0) = 0;\ y'(0) = 2$;

12. $y \cdot y'' = (y')^2$, $y(0) = 1;\ y'(0) = 2$;

13. $2y \cdot y'' = 1 + (y')^2$;

14. $y \cdot y'' = (y')^2 - (y')^3$;

15. $y \cdot y'' - (y')^2 = y^2 \cdot y'$;

16. $y'' = e^{2y}$, $y(0) = 0;\ y'(0) = 1$;

17. $y^3 \cdot y'' + 1 = 0$, $y(1) = 1;\ y'(1) = 0$;

18. $2y'' - 3y^2 = 0$, $y(-2) = 1;\ y'(-2) = -1$;

19. $2(y')^2 = (y-1) \cdot y''$, $y(0) = 0;\ y'(0) = 1$;

20. $y'' \cdot y^3 + 1 = 0$, $y(1) = 1;\ y'(1) = 0$.

2.2 Линейные однородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

Дифференциальное уравнение вида

$$y'' + p \cdot y' + q \cdot y = 0, \qquad (2.15)$$

где $\boldsymbol{p}$ и $\boldsymbol{q}$ – известные постоянные называется *линейным однородным дифференциальным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами* (ЛОДУ-2).

Для решения уравнения (2.15) составляем характеристическое уравнение (для его составления достаточно в уравнении (2.15) заменить $\boldsymbol{y''}, \boldsymbol{y'}, \boldsymbol{y}$ соответственно на $\boldsymbol{r^2}$, $\boldsymbol{r}$ и 1), таким образом получаем квадратное уравнение:

$$\boldsymbol{r^2 + p \cdot r + q = 0}. \tag{2.16}$$

В зависимости от корней характеристического уравнения (2.16) общее решение ЛОДУ-2 может иметь следующую структуру:

Таблица 1

Корни	$r_1 \neq r_2$ и $r_1, r_2 \in R$	$r_1 = r_2$ и $r_1, r_2 \in R$	$r_1 = a + b \cdot i$ $r_2 = a - b \cdot i$
Вид общего решения	$\boldsymbol{y = C_1 \cdot e^{r_1 x} + C_2 \cdot e^{r_2 x}}$	$\boldsymbol{y = C_1 \cdot e^{r_1 x} + C_2 \cdot x \cdot e^{r_1 x}}$	$\boldsymbol{y = e^{ax} \cdot (C_1 \cos bx + C_2 \sin bx)}$
Для использования в методе вариации произвольных постоянных	$\boldsymbol{y_1 = e^{r_1 x}}$ $\boldsymbol{y_2 = e^{r_2 x}}$	$\boldsymbol{y_1 = e^{r_1 x}}$ $\boldsymbol{y_2 = x \cdot e^{r_1 x}}$	$\boldsymbol{y_1 = e^{ax} \cdot \cos bx}$ $\boldsymbol{y_2 = e^{ax} \cdot \sin bx}$

Пример 9

Найти общее решение ЛОДУ-2:

$$\boldsymbol{y'' + y' - 2 \cdot y = 0}.$$

Решение:

Составляем характеристическое уравнение, заменяя $\boldsymbol{y''}, \boldsymbol{y'}, \boldsymbol{y}$ соответственно на $\boldsymbol{r^2}$, $\boldsymbol{r}$ и 1), таким образом, получаем квадратное уравнение:

$$\boldsymbol{r^2 + r - 2 = 0}.$$

Корнями данного уравнения являются числа $\boldsymbol{r_1 = -2}$ и $\boldsymbol{r_2 = 1}$. Тогда, согласно **таблице 1** получаем:

$\boldsymbol{y_{oo} = C_1 e^{-2 \cdot x} + C_2 e^{x}}$ – искомое общее решение исходного уравнения.

2.3 Линейные неоднородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами и правой частью специального вида

Уравнение вида

$$\boldsymbol{y'' + p \cdot y' + q \cdot y = f(x)} \tag{2.17}$$

называется *линейным неоднородным дифференциальным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами и правой часть специального вида **(ЛНДУ-2)***.

Согласно теореме о структуре общего решения ЛНДУ-2, общее решение $y_{он}$ ЛНДУ-2 равно сумме общего решения соответствующего ему линейного однородного дифференциального уравнения $y_{оо}$ и частного решения $y_{чн}$ неоднородного уравнения:

$$y_{он} = y_{оо} + y_{чн}. \tag{2.18}$$

Решение ЛОДУ-2 $y'' + p \cdot y' + q \cdot y = 0$ – смотрите п.п. 2.2.

При построении частного решения уравнения (2.17) выделяют два случая:

Случай I

Правая часть имеет вид:

$$f(x) = P_n(x) \cdot e^{\alpha \cdot x}, \tag{2.19}$$

где $P_n(x)$ – многочлен n-ой степени, α – некоторое число.

В этом случае частное решение $y_{чн}$ ищем в виде:

$$y_{чн} = x^{\gamma} \cdot Q_n(x) \cdot e^{\alpha \cdot x}, \tag{2.20}$$

где γ – число, равное кратности α как корня характеристического уравнения

$$r^2 + p \cdot r + q = 0, \tag{2.21}$$

т.е. показывает, сколько раз α является корнем характеристического уравнения (2.21), а $Q_n(x) = A \cdot x^n + B \cdot x^{n-1} + C \cdot x^{n-2} + ... + Z_0$ – многочлен степени n, записанный с неопределенными коэффициентами A, B, C, …, Z_0, подлежащими определению.

Чтобы найти $y_{чн}$ найдем вначале первую и вторую производные равенства (2.20) и подставим $y_{чн}$, $y'_{чн}$ и $y''_{чн}$ в уравнение (2.17) и, воспользовавшись тем, что у равных многочленов одной степени коэффициенты при соответствующих степенях равны, найдем A, B, C, …, Z_0. Подставляя A, B, C, …, Z_0 в (2.20) находим частное решение ЛНДУ-2.

Таким образом, находя сумму общего решения $y_{оо}$ ЛОДУ-2 и частного решения $y_{чн}$ ЛНДУ-2. получаем *искомое общее решение* $y_{он}$ исходного уравнения (2.17).

Случай II

Правая часть имеет вид:

$$f(x) = (P_n(x) \cdot \cos\beta x + Q_m(x) \cdot \sin\beta x) \cdot e^{\alpha \cdot x}, \tag{2.22}$$

где $P_n(x)$ и $Q_m(x)$ – многочлены n-ой и m-ой степени соответственно, α и β – некоторые действительные числа.

В этом случае частное решение $y_{чн}$ ищем в виде:

$$y_{чн} = x^{\gamma}(M_l(x)\cdot\cos\beta x + N_l(x)\cdot\sin\beta x)\cdot e^{\alpha\cdot x}, \qquad (2.20)$$

где γ – число, равное кратности $(\alpha+\beta\cdot i)$ как корня характеристического уравнения (2.21), т.е. показывает, сколько раз $(\alpha+\beta\cdot i)$ является корнем характеристического уравнения (2.21);

$M_l(x)$ и $N_l(x)$ – многочлены степени l, записанные с неопределенными коэффициентами;

l – наивысшая степень многочленов $P_n(x)$ и $Q_m(x)$, т.е. $l = \max(n,m)$.

Таким образом, находя сумму общего решения $y_{оо}$ ЛОДУ-2 и частного решения $y_{чн}$ ЛНДУ-2 получаем *искомое общее решение* $y_{он}$ исходного уравнения (2.17).

Пример 10

Найти общее решение ЛНДУ-2:

$$y'' + y' - 2\cdot y = 8x^2 - 4x.$$

Решение:

1. Найдем решение соответствующего ЛОДУ-2.Для этого составляем характеристическое уравнение, заменяя y'', y', y соответственно на r^2, r и 1), таким образом, получаем квадратное уравнение:

$$r^2 + r - 2 = 0.$$

Корнями данного уравнения являются числа $r_1 = -2$ и $r_2 = 1$. Тогда, согласно **таблице 1 п.п. 2.2**:

$y_{оо} = C_1e^{-2\cdot x} + C_2e^{x}$ – искомое общее решение ЛОДУ-2.

2. Запишем общий вид частного решения ЛНДУ-2. Так как правая часть имеет вид $f(x) = P_n(x)\cdot e^{\alpha\cdot x}$, в нашем случае $\alpha = 0$, $n = 2$, $\gamma = 0$ (так как $\alpha = 0$ не встречается среди корней характеристического уравнения), получаем:

$$y_{чн} = x^0\cdot(Ax^2 + Bx + C)\cdot e^{0\cdot x}.$$

Упростив имеем:

$$y_{чн} = Ax^2 + Bx + C.$$

Для поиска коэффициентов *A*, *B* и *C*найдем первую и вторую производную частного решения и подставим в исходное уравнение:

$$y'_{чн} = 2Ax + B,$$

$$y''_{чн} = 2A.$$

Получаем равенство:

$$2A+2Ax+B-2Ax^2-2Bx-2C=8x^2-4x.$$

Приравнивая коэффициенты при соответствующих степенях, найдем *A*, *B* и *C*:

$$\begin{cases} -2A=8 \;\Rightarrow\; A=-4; \\ 2A-2B=-4 \Rightarrow\; B=-2; \\ 2A+B-2C=0 \Rightarrow C=-5. \end{cases}$$

Учитывая найденные коэффициенты –

$$y_{чн}=-4x^2-2x-5.$$

И наконец, согласно структуре общего решения ЛНДУ-2, получаем общее решение исходного уравнения: $y_{он}=C_1e^{-2\cdot x}+C_2e^{x}-4x^2-2x-5$.

Задания для самостоятельного выполнения:

Найти общее решение линейного неоднородного дифференциального уравнения второго порядка:

1. $y^{//}-4y^{/}+3y=10\cdot e^{2x}$;
2. $y^{//}-7y^{/}+6y=(12x-4)\cdot e^{3x}$;
3. $y^{//}+4y=(5x^2+11x+22)\cdot e^{x}$;
4. $y^{//}-6y^{/}+8y=-4\cdot e^{4x}$;
5. $y^{//}+5y^{/}+4y=(6x-3)\cdot e^{-4x}$;
6. $y^{//}+7y^{/}=-21x^2+22x+11$;
7. $y^{//}+6y^{/}+9y=12\cdot e^{-3x}$;
8. $y^{//}-4y^{/}+4y=(18x+8)\cdot e^{2x}$;
9. $y^{//}-6y^{/}+9y=(12x^2-6x)\cdot e^{3x}$;
10. $y^{//}+4y^{/}-5y=85\cdot\cos 3x$;
11. $y^{//}-16y=65\cdot\sin 7x$;
12. $y^{//}+y^{/}-6y=6\cdot\cos 5x$;
13. $2y^{//}+5y^{/}+2y=68\cdot\sin 2x$;
14. $y^{//}-2y^{/}+2y=\cos 3x+\sin 3x$;
15. $y^{//}-4y^{/}=32\cdot\cos 4x-64\cdot\sin 4x$;
16. $y^{//}+25y=27\cdot\sin 6x+9\cdot\cos 6x$;
17. $y^{//}+9y=12\cdot\cos 3x+6\cdot\sin 3x$;
18. $y^{//}+y=14\cdot\cos x+6\cdot\sin x$;
19. $y^{//}-6y^{/}-7y=(3x^3+2x^2-6x)\cdot e^{-x}$;
20. $y^{//}+4y^{/}+5y=e^{-2x}\sin x$.

Литература

1. **Гусак, А.А.** Высшая математика. Часть 2 / А.А. Гусак. – Минск: «Выш. школа», –1988. –229 с.
2. **Шнейдер, В.Е.** Краткий курс высшей математики. Том 1 / В.Е.Шнейдер, А.С. Слуцкий, А.С. Шумов. – Москва: «Высшая школа», – 1978. – 384 с.
3. **Письменный, Д.Т.** Конспект лекций по высшей математике: полный курс / Д.Т. Письменный. – Минск: «Айрис-пресс», – 2009. – 608 с.
4. **Берман, Г.Н.** Сборник задач по курсу математического анализа / Г.Н. Берман. – Москва: «Наука», – 1971. – 416 с.

Учебное издание

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

Методические указания

Составители:
Лох Светлана Владимировна
Гребенцов Юрий Михайлович

Редактор *А.А. Щербакова*
Технический редактор *Т.В. Багуцкая*

Подписано в печать Формат 60×84 1/16.
Бумага офсетная. Гарнитура Таймс. Ризография.
Усл.печ.л. Уч.-изд.
Тираж экз. Заказ .

Учреждение образования
«Могилевский государственный университет продовольствия»
ЛИ № 02330/630 от 31.01.2012 г.
Пр-т Шмидта, 3, 212027, Могилев.

Отпечатано в учреждении образования
«Могилевский государственный университет продовольствия».
Пр-т Шмидта, 3, 212027, Могилев.