Министерство образования республики Беларусь

Учреждение образования
«Могилевский государственный университет продовольствия»

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

Методические указания
по теме «**ДВОЙНОЙ ИНТЕГРАЛ**»
с заданиями и решениями

в двух частях

Часть I
ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ И ЗАДАНИЯ
ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Могилев 2014

УДК 519.21
ББК 22.1

Рассмотрено и рекомендовано к изданию
на заседании кафедры высшей математики
Протокол № 3 от 08. 10. 2014 г.

Составители:
к.ф.-м. н., доцент В.К.Лапковский
д.ф.-м. н., доцент А.М.Гальмак
старший преподаватель И.В.Юрченко
ассистент М.М. Довыденко

Рецензент
к.ф.-м. н., доцент С.В.Подолян

УДК 51
ББК 22.1

I ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

Данный раздел содержит минимум теоретических сведений, включающий: определение двойного интеграла; свойства двойного интеграла; теорему о среднем; замену переменных в двойном интеграле, необходимых для самостоятельного выполнения контрольных заданий по теме «Двойной интеграл», закрепляющих навыки вычисления двойных интегралов. Приведены также типовые примеры нахождения повторных и двойных интегралов.

1 Определение двойного интеграла

Пусть в замкнутой ограниченной области D с кусочно-гладким контуром L плоскости xOy определена непрерывная функция $z = f(x, y)$.

Рассмотрим произвольное разбиение области D на n частичных областей $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$, не имеющих общих внутренних точек. Площади указанных частичных областей обозначим соответственно через $\Delta\sigma_1, \Delta\sigma_2, \ldots, \Delta\sigma_n$.

В каждой полученной частичной области σ_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ выберем произвольным образом точку $P_i(x_i, y_i)$ и рассмотрим выражение

$$V_n = f(x_1, y_1)\Delta\sigma_1 + f(x_2, y_2)\Delta\sigma_2 + \ldots + f(x_n, y_n)\Delta\sigma_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\Delta\sigma_i,$$

которое называется ***интегральной суммой*** для функции $z = f(x, y)$. ***Диаметром*** **diam**σ_i области σ_i $(i=1, \ldots, n)$ называется наибольшее расстояние между граничными точками этой области. ***Диаметром разбиения*** называется число

$$\lambda = \max_{\mathbf{diam}}\sigma_i \; (i = 1, \ldots n).$$

Если существует конечный предел

$$\lim_{\lambda\to 0} V_n = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\Delta\sigma_i,$$

который не зависит ни от способа разбиения области D на частичные области σ_i, ни от выбора точек $P_i(x_i, y_i) \in \sigma_i$, то этот предел называется ***двойным интегралом*** от функции $z = f(x, y)$ по области D и обозначается символом

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy.$$

В этом случае функция $z = f(x, y)$ называется ***интегрируемой*** в области D, которая, в свою очередь, называется ***областью интегрирования***.

Таким образом,

$$\iint\limits_D f(x\ y)dxdy = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\Delta\sigma_i. \qquad (1)$$

2 Сведение двойного интеграла к повторному интегралу

Если замкнутая ограниченная область D плоскости xOy задана неравенствами

$$a \le x \le b,\ \varphi_1(x) \le y \le \varphi_2(x),$$

а функции $y = \varphi_1(x)$ и $y = \varphi_2(x)$ непрерывны на отрезке $[a, b]$, то двойной интеграл (1) вычисляется по формуле

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy. \qquad (2)$$

Если область D задана неравенствами

$$c \le y \le d,\ \psi_1(y) \le y \le \psi_2(y),$$

а функции $x = \psi_1(y)$ и $x = \psi_2(y)$ непрерывны на отрезке $[c, d]$, то интеграл (1) вычисляется по формуле

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int_c^d dy \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)dx. \qquad (3)$$

Выражения, которые стоят в правых частях в формулах (2) и (3), называются ***повторными интегралами***.

3 Свойства двойного интеграла

а) ***Если область интегрирования*** D ***является объединением двух областей*** D_1 ***и*** D_2***, не имеющих общих внутренних точек, и в каждой из этих областей функция*** $z = f(x, y)$ ***интегрируема, то в области*** D ***эта функция также интегрируема и имеет место формула***

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_{D_1} f(x,y)dxdy + \int_{D_2} f(x,y)dxdy. \qquad (4)$$

б) ***Если функции*** $f(x, y)$ ***и*** $g(x, y)$ ***интегрируемы в области*** D***, то их алгебраическая сумма также интегрируема в области*** D ***и имеет место формула***

$$\iint_D [f(x,y) + g(x,y)]dxdy = \iint_D f(x,y)dxdy + \int_D g(x,y)dxdy. \qquad (5)$$

в) ***Если функция*** $f(x, y)$ ***интегрируема в области*** D, c ***– постоянная, то функция*** $cf(x, y)$ ***также интегрируема в области*** D ***и имеет место формула***

$$\iint_D cf(x,y)dxdy = c\iint_D f(x,y)dxdy. \qquad (6)$$

4 Теорема о среднем значении

Если функция $z = f(x, y)$ ***непрерывна в замкнутой ограниченной области*** D***, то в этой области найдётся такая точка*** (x^*, y^*)***, что***

$$\iint_D f(x,y)dxdy = f(x^*, y^*)S_D, \qquad (7)$$

где S_D ***– площадь области*** D***.***

Значение $f(x^*, y^*)$ называется ***средним значением*** функции $f(x, y)$ в области D.

5 Замена переменных в двойном интеграле

Пусть замкнутая ограниченная область D' плоскости uOv взаимно однозначно отображается на замкнутую ограниченную область D плоскости xOy с помощью формул

$$x = \varphi(u, v),\ y = \psi(u, v),$$

где функции $\varphi(u, v)$ и $\psi(u, v)$ имеют непрерывные частные производные в области D'. Пусть также якобиан J этого преобразования отличен от нуля:

$$J = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial\varphi(u,v)}{\partial u} & \dfrac{\partial\psi(u,v)}{\partial u} \\ \dfrac{\partial\varphi(u,v)}{\partial v} & \dfrac{\partial\psi(u,v)}{\partial v} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Тогда

$$\iint\limits_{D} f(x,y)dxdy = \iint\limits_{D'} f(\varphi(u,v),\psi(u,v))\left|J\right|dudv. \qquad (8)$$

Так как при переходе с помощью формул

$$x = \rho\cos\varphi,\ y = \rho\sin\varphi$$

от полярных координат к декартовым якобиан преобразования J равен $\rho \geq 0$, то

$$\iint\limits_{D} f(x,y)dxdy = \iint\limits_{D'} f(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi)\rho d\rho d\varphi \qquad (9)$$

6 Примеры нахождения повторных интегралов

Нахождение повторных интегралов проводят в следующей последовательности:

1) Вначале находят внутренний интеграл. При этом необходимо помнить, что если внутреннее интегрирование идёт по переменной y (см. формулу (2)), то переменую x в

подинтегральной функции следует считать постоянной (константой). Для формулы (3) – следует считать постояной переменную y.

2) Затем находят внешний интеграл по переменной x в формуле (2) (по переменной y в формуле (3)).

Пример 1. Вычислить повторный интеграл

$$\int_0^1 dx\int_0^2 \left(x^2+y^2\right)dy.$$

Решение.

$$\int_0^1 dx\int_0^2 \left(x^2+y^2\right)dy=\int_0^1\left\{\int_0^2\left(x^2+y^2\right)dy\right\}dx=\int_0^1\left\{\left(x^2y+\frac{y^3}{3}\right)\Big|_0^2\right\}dx=$$

$$=\int_0^1\left(2x^2+\frac{8}{3}\right)dx=\left(2\frac{x^3}{3}+\frac{8}{3}x\right)\Big|_0^1=\frac{2}{3}+\frac{8}{3}=\frac{10}{3}\approx 3{,}33.$$

Пример 2. Вычислить повторный интеграл

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi\int_0^{2\cos\varphi}\rho^2 d\rho$$

Решение.

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi\int_0^{2\cos\varphi}\rho^2 d\rho=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left\{\int_0^{2\cos\varphi}\rho^2 d\rho\right\}d\varphi=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left\{\frac{\rho^3}{3}\Big|_0^{2\cos\varphi}\right\}d\varphi=$$

$$=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{8}{3}\cos^3\varphi d\varphi=\frac{8}{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\varphi d(\sin\varphi)=\frac{8}{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin^2\varphi)d(\sin\varphi)=$$

$$\frac{8}{3}\left(\sin\varphi-\frac{\sin^3\varphi}{3}\right)\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}=\frac{8}{3}\left(2-\frac{2}{3}\right)=\frac{32}{9}.$$

7 Примеры нахождения двойных интегралов

Нахождение пределов интегрирования в формуле (2).

1. Спроектировав область D на ось Ox, определяем отрезок $[a, b]$, на котором в области D изменяется x. Таким образом, b и a будут соответственно верхним и нижним пределами интегрирования во внешнем интеграле.

2. Чтобы найти пределы интегрирования по y для внутреннего интеграла, отметим на контуре L, который ограничивает область D, точки A и B с абсциссами a и b. Эти две точки делят контур L на нижнюю и верхнюю части, уравнения которых необходимо разрешить относительно переменной y.

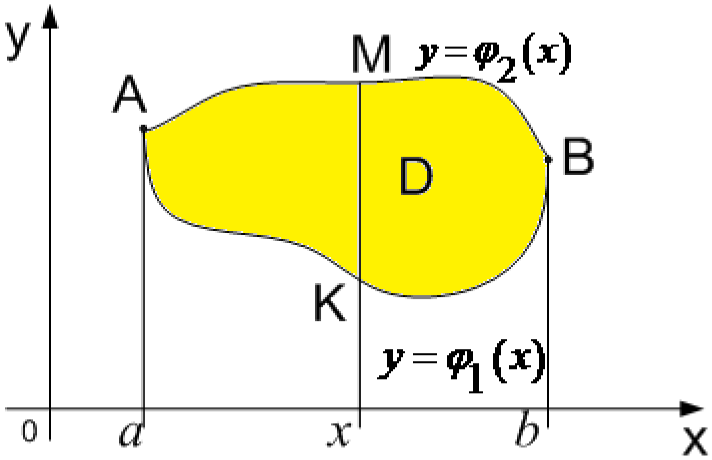

Рисунок 1

3. Пусть эти части контура L определяются соответственно уравнениями

$$y = \varphi_1(x) \text{ и } y = \varphi_2(x).$$

Зафиксируем на оси Ox точку x ($a \leq x \leq b$) и проведем через эту точку прямую, параллельную оси Oy. Очевидно, что переменная y изменяется в области D от $\varphi_1(x)$ до $\varphi_2(x)$

Все указанные построения изображены на рисунке 1.

Нахождение пределов интегрирования в формуле (3).

1. Проектируем область D на ось Oy. Концы полученного при этом проектировании отрезка $[c, d]$ являются соответственно нижним и верхним пределами внешнего интеграла.

2.Отметим на контуре L точки C и D с ординатами c и d. Эти точки делят контур L на левую и правые части, уравнения которых необходимо разрешить относительно переменной x. Пусть этими уравнениями будут соответственно

$$x = \psi_1(y) \text{ и } x = \psi_2(y)$$

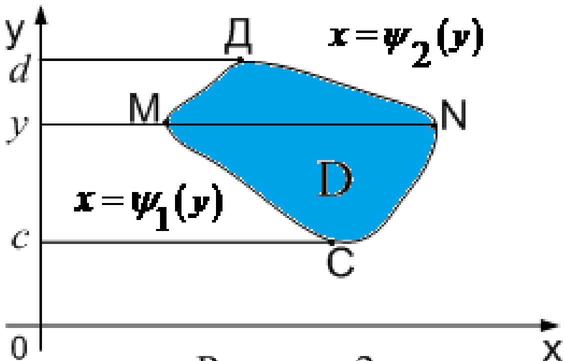

Рисунок 2

3.Зафиксируем на отрезке $[c, d]$ оси Oy произвольную точку y $(c \le x \le d)$ и проведём через эту точку прямую, параллельную оси Ox. После этого определяем абсциссы точек M и N, которые и являются соответственно нижним и верхним пределами для внутреннего интеграла.

Все указанные построения изображены на рисунке 2.

Пример 3. Найти двойной интеграл

$$J = \iint\limits_D 2xy\,dxdy,$$

где область D определяется неравенствами $x^2 + y^2 \le 2x, \quad y \ge 0.$

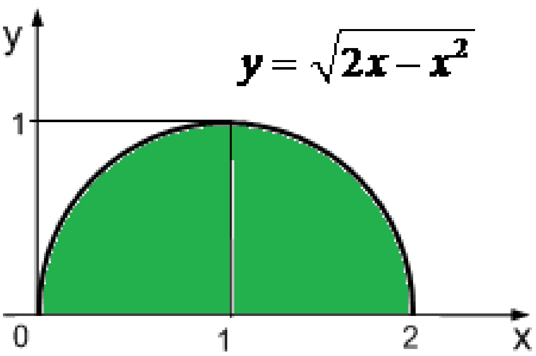

Рисунок 3

Решение. Изобразим область интегрирования D (рис.3). Первое из записанных неравенств определяет круг, ограниченный окружностью

$$(x-1)^2+y^2=1 \qquad \left(\begin{aligned}&x^2+y^2=2x\Rightarrow x^2-2x+1+y^2=\\&=1\Rightarrow (x-1)^2+y^2=1\end{aligned}\right),$$

второе неравенство определяет верхнюю полуплоскость. Поэтому область D есть полукруг.

Согласно формуле (2) имеем

$$J=\int_0^2 dx\int_0^{\sqrt{2x-x^2}} 2xydy=\int_0^2\left(x\cdot y^2\Big|_{y=0}^{y=\sqrt{2x-x^2}}\right)dx=$$

$$=\int_0^2 x\left(2x-x^2\right)dx=\frac{4}{3}\approx 1{,}33.$$

Этот же двойной интеграл можно вычислить, используя формулу (3):

$$J=\int_0^1 dy\int_{1-\sqrt{1-y^2}}^{1+\sqrt{1-y^2}} 2xydx=\int_0^1\left(yx^2\Big|_{1-\sqrt{1-y^2}}^{1+\sqrt{1-y^2}}\right)dy=$$

$$=\int_0^1 y\left((1+\sqrt{1-y^2})^2-(1-\sqrt{1-y^2})^2\right)dy=4\int_0^1 y\sqrt{1-y^2}dy=$$

$$=4\int_0^1\left(-\frac{1}{2}\right)(1-y^2)^{\frac{1}{2}}d(1-y^2)=-2\left.\frac{(1-y^2)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right|_0^1=\frac{4}{3}.$$

Пример 4. Найти двойной интеграл

$$J=\iint_D (x+y)\,dxdy,$$

где область D ограничена линиями

$$y^2 = 2x, \quad x + y = 4, \quad x + y = 12.$$

Решение. Изобразим область интегрирования (рис.4).

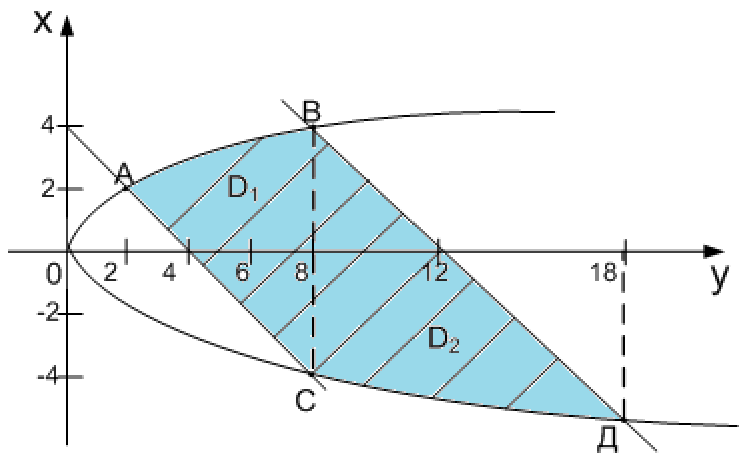

Рисунок 4

Прямая $x + y = 4$ и парабола $y^2 = 2x$ пересекаются в точках A и C:

$$\begin{cases} x + y = 4, \\ y^2 = 2x. \end{cases} \qquad \begin{matrix} x_A = 2, & x_C = 8, \\ y_A = 2, & y_C = -4. \end{matrix} \qquad A(2;\ 2), \quad C(8;\ -4)$$

Прямая $x + y = 12$ и парабола $y^2 = 2x$ пересекаются в точках B и $Д$:

$$\begin{cases} x + y = 12, \\ y^2 = 2x. \end{cases} \qquad \begin{matrix} x_B = 2, & x_Д = 8, \\ y_B = 2, & y_Д = -4. \end{matrix} \qquad B(8;\ 4), \quad Д(18;\ -6)$$

Разбив область D на две области D_1 и D_2, не имеющих общих внутренних точек, будем иметь:

$$J = \iint\limits_D (x + y)dxdy = \iint\limits_{D_1} (x + y)dxdy + \iint\limits_{D_2} (x + y)dxdy =$$

$$= \int_2^8 dx \int_{4-x}^{\sqrt{2x}} (x+y)dy + \int_8^{18} dx \int_{-\sqrt{2x}}^{12-x} (x+y)dx =$$

$$= \int_2^8 \left(\frac{(x+y)^2}{2} \Bigg|_{y=4-x}^{y=\sqrt{2x}} \right) dx + \int_8^{18} \left(\frac{(x+y)^2}{2} \Bigg|_{y=-\sqrt{2x}}^{y=12-x} \right) dx =$$

$$= \int_2^8 \left(\frac{x^2}{2} + \sqrt{2}x^{\frac{3}{2}} + x - 8 \right) dx + \int_8^{18} \left(72 - \frac{x^2}{2} + \sqrt{2}x^{\frac{3}{2}} - x \right) dx = 543\frac{11}{15}.$$

С целью упрощения вычислений при нахождении двойных интегралов иногда целесообразно перейти к какой-либо другой координатной системе, например, к полярной (см.формулу (9)):

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi, \\ y = \rho\sin\varphi. \end{cases}$$

Пример 5. Перейти к полярной системе координат и расставить пределы интегрирования в интеграле

$$J = \iint_D f(x, y)\, dxdy,$$

где область D ограничена окружностью $x^2 + y^2 = 1$ и прямой $x + y = 1$.

Решение. На рисунке 5 показана область D, которая является сегментом круга. Уравнения линий, которые ограничивают область D, в полярных координатах имеют вид: окружность

$$x^2 + y^2 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \rho = 1.$$

прямая

$$x + y = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \rho\cos\varphi + \rho\sin\varphi = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \rho = \frac{1}{\cos\varphi + \sin\varphi}.$$

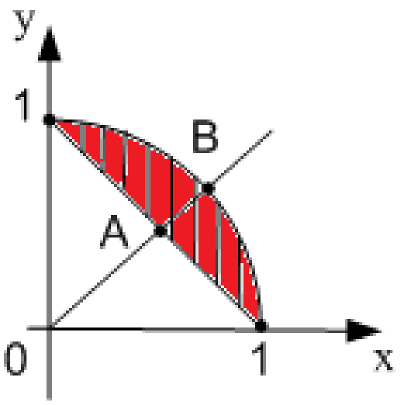

Рисунок 5

Отметим, что φ изменяется от 0 до $\frac{\pi}{2}\cdot$ Зафиксируем значение угла φ и проведем луч из начала координат под углом φ, который пересечёт область D сначала в точке A, а затем в точке B. Таким образом, при фиксированном φ величина ρ изменяется от $\rho = \dfrac{1}{\cos\varphi + \sin\varphi}$ до $\rho = 1$, а значит, на основании формулы (9) имеем

$$J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_{\frac{1}{\cos\varphi+\sin\varphi}}^{1} f\left(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi\right)\rho d\rho.$$

Пример 6. Перейти к полярным координатам и найти двойной интеграл

$$J = \int_D \sin\sqrt{x^2 + y^2}\, dxdy,$$

где D – кольцо, определяемое неравенствами

$$\begin{cases} x^2 + y^2 \le 4\pi^2, \\ x^2 + y^2 \ge \pi^2. \end{cases}$$

Решение. Область интегрирования – кольцо (рисунок 6), ограниченное концентрическими окружностями $\rho = \pi$ и $\rho = 2\pi$.

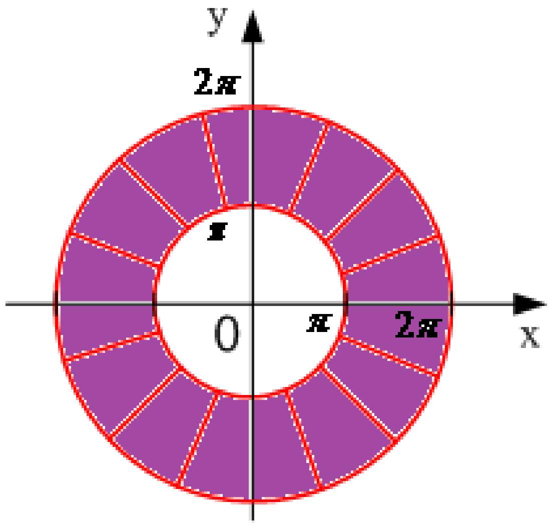

Рисунок 6

$$f(x, y) = \sin\sqrt{x^2 + y^2} = \sin\sqrt{\rho^2\cos^2\varphi + \rho^2\sin^2\varphi} = \sin\rho.$$

Воспользовавшись формулой (9), а затем, используя формулу интегрирования по частям,

$$\left(\int_a^b u dv = uv\Big|_a^b - \int_a^b v du\right),$$

получим

$$J = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_\pi^{2\pi} \rho\sin\rho d\rho = \int_0^{2\pi}\left(-\rho\cos\rho\Big|_\pi^{2\pi} + \int_\pi^{2\pi}\cos\rho d\rho\right)d\varphi =$$

$$= \int_0^{2\pi}(-2\pi - \pi)d\varphi = -3\pi\int_0^{2\pi} d\varphi = -6\pi^2 \approx -59{,}16.$$

II ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Вариант 1

№	Содержание	Ответ
1	Найти $\int\limits_1^e dy \int\limits_3^5 \frac{x}{y} dx$.	8
2	Найти $\iint\limits_{(S)} xydxdy$, (S) – прямоугольник: $4 \le x \le 8$, $1 \le y \le 2$.	36
3	Расставить пределы интегрирования в двойном интеграле по области (S) и изобразить ее: $\iint\limits_{(S)} f(x;y)dxdy$; (S): $y = x$, $y^2 = x + 2$.	
4	Изменить порядок интегрирования, предварительно построив область интегрирования. $\int\limits_{-1}^{1} dx \int\limits_{x^{\frac{2}{3}}}^{-x^2+2} f(x;y)dy$.	
5	Найти двойной интеграл, предварительно построив область интегрирования. $\iint\limits_{(S)} x^2 ydxdy$; (S): $x = y^2$, $y = -x^2$.	$-\frac{3}{56}$
6	Перейдя к полярным координатам, найти двойной интеграл, предварительно построив область интегрирования. $\iint\limits_{(S)} \frac{xdxdy}{\sqrt{x^2+y^2}}$; (S): $x^2 + y^2 = 4$, $x^2 + y^2 = 16$, $x = 0$, $y = 0$ ($x \ge 0$, $y \ge 0$).	6

Вариант 2

№	Содержание	Ответ
1	Найти $\int_0^1 dy \int_2^4 xy^2 dx$.	2
2	Найти $\iint\limits_{(S)} xydxdy$, (S) – прямоугольник: $2 \le x \le 4$, $1 \le y \le 2$.	9
3	Расставить пределы интегрирования в двойном интеграле по области (S) и изобразить ее: $\iint\limits_{(S)} f(x;y)dxdy$; (S): $xy = 6$, $y = -x + 7$.	
4	Изменить порядок интегрирования, предварительно построив область интегрирования. $\int_{-2}^{2} dx \int_{x^2}^{4} f(x;y)dy$.	
5	Найти двойной интеграл, предварительно построив область интегрирования. $\iint\limits_{(S)} xdxdy$; (S): $xy = 6$, $x + y - 7 = 0$.	$20\frac{5}{6}$
6	Перейдя к полярным координатам, найти двойной интеграл, предварительно построив область интегрирования. $\iint\limits_{(S)} \frac{ydxdy}{\sqrt{x^2+y^2}}$; (S): $x^2 + y^2 = 1$, $x^2 + y^2 = 9$ $(y \ge 0)$.	8

Вариант 3

№	Содержание	Ответ
1	Найти $\int\limits_3^6 dx \int\limits_0^2 x^2 y dy$.	126
2	Найти $\iint\limits_{(S)} (x-y)dxdy$, (S) – прямоугольник: $1 \le x \le 4$, $1 \le y \le 3$.	3
3	Расставить пределы интегрирования в двойном интеграле по области (S) и изобразить ее: $\iint\limits_{(S)} f(x;y)dxdy$; (S): $y = x^2 + 1$, $x - y + 3 = 0$.	
4	Изменить порядок интегрирования, предварительно построив область интегрирования. $\int\limits_0^a dx \int\limits_{a-x}^{\sqrt{a^2-x^2}} f(x;y)dy$.	
5	Найти двойной интеграл, предварительно построив область интегрирования. $\iint\limits_{(S)} y^2 x dxdy$; (S): $x^2 + y^2 = 4$, $x + y - 2 = 0$.	$1\frac{3}{5}$
6	Перейдя к полярным координатам, найти двойной интеграл, предварительно построив область интегрирования. $\iint\limits_{(S)} e^{x^2+y^2} dxdy$; (S): $x^2 + y^2 \le 1$.	$\pi(e-1)$

Вариант 4

№	Содержание	Ответ
1	Найти $\int\limits_0^1 dx \int\limits_2^4 xy^3 dy$.	30
2	Найти $\iint\limits_{(S)} (x+y)dxdy$, (S) – прямоугольник: $3 \le x \le 5$, $0 \le y \le 2$.	20
3	Расставить пределы интегрирования в двойном интеграле по области (S) и изобразить ее: $\iint\limits_{(S)} f(x;y)dxdy$; (S): $x^2 - y^2 = 1$, $y = -2$, $y = 2$.	
4	Изменить порядок интегрирования, предварительно построив область интегрирования. $\int\limits_0^1 dy \int\limits_y^{\sqrt{y}} f(x;y)dx$.	
5	Найти двойной интеграл, предварительно построив область интегрирования. $\iint\limits_{(S)} x^2 y\, dxdy$; (S): $y = x^2$, $y = 4$.	$24\frac{8}{21}$
6	Перейдя к полярным координатам, найти двойной интеграл, предварительно построив область интегрирования. $\iint\limits_{(S)} \sqrt{x^2+y^2}\,dxdy$; (S): $x^2 + y^2 \le 2Rx$, $y \le 0$.	$\frac{16}{9}R^3$

Вариант 5

№	Содержание	Ответ
1	Найти $\int\limits_1^2 dx\int\limits_0^1 (x^3+y^3)dy$.	4
2	Найти $\iint\limits_{(S)} (x+y^2)dxdy$, (S) – прямоугольник: $2\le x\le 3$, $1\le y\le 2$.	$4\frac{5}{6}$
3	Расставить пределы интегрирования в двойном интеграле по области (S) и изобразить ее: $\iint\limits_{(S)} f(x;y)dxdy$; (S): $y^2 - x^2 = 16$, $x = -3$, $x = 3$.	
4	Изменить порядок интегрирования, предварительно построив область интегрирования. $\int\limits_0^1 dy\int\limits_{y^2}^{\sqrt{y}} f(x;y)dx$.	
5	Найти двойной интеграл, предварительно построив область интегрирования. $\iint\limits_{(S)} x^3ydxdy$; (S): $y = x^2$, $y = x + 2$.	$10\frac{1}{80}$
6	Перейдя к полярным координатам, найти двойной интеграл, предварительно построив область интегрирования. $\iint\limits_{(S)} \frac{\cos\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy$; (S): $x^2+y^2=\frac{\pi^2}{4}$, $x^2+y^2=4\pi^2$.	-2π

Вариант 6

№	Содержание	Ответ
1	Найти $\int\limits_2^4 dx \int\limits_0^2 x^3 y dy$.	120
2	Найти $\iint\limits_{(S)} (x^2 + y)dxdy$, (S) – прямоугольник: $1 \le x \le 2$, $0 \le y \le 1$.	$2\frac{5}{6}$
3	Расставить пределы интегрирования в двойном интеграле по области (S) и изобразить ее: $\iint\limits_{(S)} f(x;y)dxdy$; (S): $y = x$, $y = \sqrt{3}x$, $x^2 + y^2 = 8$, ($x \ge 0$, $y \ge 0$).	
4	Изменить порядок интегрирования, предварительно построив область интегрирования. $\int\limits_{-2}^{1} dx \int\limits_{x^2+1}^{3-x} f(x;y)dy$.	
5	Найти двойной интеграл, предварительно построив область интегрирования. $\iint\limits_{(S)} x^4 y\,dxdy$; (S): $xy = 1$, $y = x$, $x = 2$.	$7\frac{19}{21}$
6	Перейдя к полярным координатам, найти двойной интеграл, предварительно построив область интегрирования. $\iint\limits_{(S)} \cos\sqrt{x^2 + y^2}\,dxdy$; (S): $x^2 + y^2 = \frac{\pi^2}{4}$, $x^2 + y^2 = 4\pi^2$.	$2\pi - \pi^2$

Вариант 7

№	Содержание	Ответ
1	Найти $\int\limits_4^6 dy \int\limits_1^e \frac{y}{x} dx$.	10
2	Найти $\iint\limits_{(S)} (x^2 + y^2) dxdy$, (S) – прямоугольник: $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 1$.	$\frac{2}{3}$
3	Расставить пределы интегрирования в двойном интеграле по области (S) и изобразить ее: $\iint\limits_{(S)} f(x; y) dxdy$; (S): $x^2 + y^2 = 4$, $y = 2x - x^2$, $x = 0$, ($x \ge 0$, $y \ge 0$).	
4	Изменить порядок интегрирования, предварительно построив область интегрирования. $\int\limits_0^2 dx \int\limits_x^{2x} f(x; y) dy$.	
5	Найти двойной интеграл, предварительно построив область интегрирования. $\iint\limits_{(S)} (x + y) dxdy$; (S): $y = x$, $y = 2 - x$, $y = 0$.	$1\frac{1}{3}$
6	Перейдя к полярным координатам, найти двойной интеграл, предварительно построив область интегрирования. $\iint\limits_{(S)} \sqrt{25 - x^2 - y^2} dxdy$; (S): $x^2 + y^2 \le 9$.	$\frac{122\pi}{3}$

Вариант 8

№	Содержание	Ответ
1	Найти $\int\limits_0^1 dx\int\limits_1^2 x^3y^2dy$.	$\frac{7}{12}$
2	Найти $\iint\limits_{(S)}(x^3+y^2)dxdy$, (S) – прямоугольник: $1\le x\le 2$, $0\le y\le 1$.	$4\frac{1}{12}$
3	Расставить пределы интегрирования в двойном интеграле по области (S) и изобразить ее: $\iint\limits_{(S)} f(x;y)dxdy$; (S): $x=y^2$, $x=1$.	
4	Изменить порядок интегрирования, предварительно построив область интегрирования. $\int\limits_1^2 dx\int\limits_{\frac{1}{x}}^{x} f(x;y)dy$.	
5	Найти двойной интеграл, предварительно построив область интегрирования. $\iint\limits_{(S)}(xy+y)\,dxdy$; (S): $y=x$, $y=2-x$, $y=0$.	$\frac{2}{3}$
6	Перейдя к полярным координатам, найти двойной интеграл, предварительно построив область интегрирования. $\iint\limits_{(S)}\frac{dxdy}{\sqrt{25-x^2-y^2}}$; (S): $x^2+y^2\le 16$.	4π

Вариант 9

№	Содержание	Ответ
1	Найти $\int\limits_1^2 dx\int\limits_2^4 x^2y^3dy$.	140
2	Найти $\iint\limits_{(S)}\frac{dxdy}{(x+y+1)^2}$, (S) – прямоугольник: $1\le x\le 2$, $0\le y\le 1$.	$\ln\frac{9}{8}$
3	Расставить пределы интегрирования в двойном интеграле по области (S) и изобразить ее: $\iint\limits_{(S)} f(x;y)dxdy$; (S) ограничена линиями сторон прямоугольника с вершинами в точках $A(1;\,1)$, $B(5;\,5)$, $C(7;\,3)$, $D(3;\,-1)$.	
4	Изменить порядок интегрирования, предварительно построив область интегрирования. $\int\limits_{-1}^{2} dx\int\limits_{x^2}^{x+2} f(x;y)dy$.	
5	Найти двойной интеграл, предварительно построив область интегрирования. $\iint\limits_{(S)}(xy^2+1)\,dxdy$; (S): $y=\frac{1}{2}x$, $y=\sqrt{\frac{x}{2}}$.	$\frac{47}{105}$
6	Перейдя к полярным координатам, найти двойной интеграл, предварительно построив область интегрирования. $\iint\limits_{(S)}(x^2+y^2)dxdy$; (S): $x^2+y^2=1$, $x^2+y^2=4$.	$\frac{15\pi}{2}$

Вариант 10

№	Содержание	Ответ
1	Найти $\int_1^2 dy \int_4^6 \frac{x}{y^2} dx$.	5
2	Найти $\iint\limits_{(S)} \frac{3y^2 dxdy}{1+x^2}$, (S) – прямоугольник: $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 1$.	$\frac{\pi}{4}$
3	Расставить пределы интегрирования в двойном интеграле по области (S) и изобразить ее: $\iint\limits_{(S)} f(x;y)dxdy$; (S): треугольник с вершинами в точках $A(-2;-2)$, $B(-1;2)$, $C(6;2)$.	
4	Изменить порядок интегрирования, предварительно построив область интегрирования. $\int_{-6}^{1} dx \int_{x^{\frac{1}{3}}}^{\frac{x+6}{7}} f(x;y)dy$.	
5	Найти двойной интеграл, предварительно построив область интегрирования. $\iint\limits_{(S)} e^{x+y}\,dxdy$; (S): $y = e^x$, $y = 2$, $x = 0$.	e
6	Перейдя к полярным координатам, найти двойной интеграл, предварительно построив область интегрирования. $\iint\limits_{(S)} (x^2+y^2)dxdy$; (S): $(x^2+y^2)^2 = a^2(x^2-y^2)$, $y = 0$ ($x > 0$, $y > 0$).	$\frac{\pi a^4}{32}$

Вариант 11

№	Содержание	Ответ
1	Найти $\int\limits_{1}^{e} dy \int\limits_{3}^{5} \frac{x}{y} dx$.	8
2	Найти $\iint\limits_{(S)} \sin(x+y)\,dxdy$, (S) – прямоугольник: $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$, $0 \le y \le \frac{\pi}{2}$.	2
3	Расставить пределы интегрирования в двойном интеграле по области (S) и изобразить ее: $\iint\limits_{(S)} f(x;y)dxdy$; (S): прямоугольник с вершинами в точках $A(1;\ 1)$, $B(5;\ 5)$, $C(7;\ 3)$, $D(3;\ -1)$.	
4	Изменить порядок интегрирования, предварительно построив область интегрирования. $\int\limits_{-1}^{1} dx \int\limits_{x^{\frac{2}{3}}}^{-x^2+2} f(x;y)dy$.	
5	Найти двойной интеграл, предварительно построив область интегрирования. $\iint\limits_{(S)} x^3 y\,dxdy$; (S): $y = x^2$, $y = x + 2$.	$10\frac{1}{80}$
6	Перейдя к полярным координатам, найти двойной интеграл, предварительно построив область интегрирования. $\iint\limits_{(S)} \frac{x\,dxdy}{\sqrt{x^2+y^2}}$; (S): $(x^2+y^2)^2 = 4$, $x^2+y^2 = 16$, $(x \ge 0,\ y \ge 0)$.	6

Вариант 12

№	Содержание	Ответ
1	Найти $\int_0^1 dy \int_2^4 xy^2 dx$.	2
2	Найти $\iint\limits_{(S)} (3yx^2 - 2x^3) dxdy$, (S) – прямоугольник: $0 \le x \le 1$, $1 \le y \le 2$.	1
3	Расставить пределы интегрирования в двойном интеграле по области (S) и изобразить ее: $\iint\limits_{(S)} f(x;y) dxdy$; (S): треугольник с вершинами в точках $A(-2;-2)$, $B(-1;2)$, $C(6;2)$.	
4	Изменить порядок интегрирования, предварительно построив область интегрирования. $\int_{-1}^{2} dx \int_{x^2}^{x+2} f(x;y) dy$.	
5	Найти двойной интеграл, предварительно построив область интегрирования. $\iint\limits_{(S)} x^4 y\, dxdy$; (S): $xy = 1$, $y - x = 0$, $x = 2$.	$7\frac{19}{21}$
6	Перейдя к полярным координатам, найти двойной интеграл, предварительно построив область интегрирования. $\iint\limits_{(S)} \sqrt{25 - x^2 - y^2}\, dxdy$; (S): $x^2 + y^2 \le 9$.	$\frac{122\pi}{3}$

Вариант 13

№	Содержание	Ответ
1	Найти $\int\limits_3^6 dx \int\limits_0^2 x^2 y dy$.	126
2	Найти $\iint\limits_{(S)} (x^2 + y^2) dx dy$, (S) – прямоугольник: $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 1$.	$\frac{2}{3}$
3	Расставить пределы интегрирования в двойном интеграле по области (S) и изобразить ее: $\iint\limits_{(S)} f(x;y) dx dy$; (S): прямоугольник с вершинами в точках $A(2;\,4)$, $B(5;\,4)$, $C(5;\,-2)$, $D(2;\,-2)$.	
4	Изменить порядок интегрирования, предварительно построив область интегрирования. $\int\limits_{-6}^{1} dx \int\limits_{x^{\frac{1}{3}}}^{\frac{x+6}{7}} f(x;y) dy$.	
5	Найти двойной интеграл, предварительно построив область интегрирования. $\iint\limits_{(S)} (x + y)\, dx dy$; (S): $0 \le y \le 1$, $y \le x \le 2 - y$.	$1\frac{1}{3}$
6	Перейдя к полярным координатам, найти двойной интеграл, предварительно построив область интегрирования. $\iint\limits_{(S)} \frac{dx dy}{\sqrt{25 - x^2 - y^2}}$; (S): $x^2 + y^2 \le 16$.	4π

Вариант 14

№	Содержание	Ответ
1	Найти $\int\limits_0^1 dx \int\limits_2^4 xy^3 dy$.	30
2	Найти $\iint\limits_{(S)} (x^2 + y) dx dy$, (S) – прямоугольник: $1 \le x \le 2$, $0 \le y \le 1$.	$2\frac{5}{6}$
3	Расставить пределы интегрирования в двойном интеграле по области (S) и изобразить ее: $\iint\limits_{(S)} f(x; y) dx dy$; (S): $xy = 6$, $x + y - 7 = 0$.	
4	Изменить порядок интегрирования, предварительно построив область интегрирования. $\int\limits_{-2}^{2} dx \int\limits_{x^2}^{4} f(x; y) dy$.	
5	Найти двойной интеграл, предварительно построив область интегрирования. $\iint\limits_{(S)} (xy + y)\, dx dy$; (S): $0 \le y \le 1$, $y \le x \le 2 - y$.	$\frac{2}{3}$
6	Перейдя к полярным координатам, найти двойной интеграл, предварительно построив область интегрирования. $\iint\limits_{(S)} (x^2 + y^2) dx dy$; (S): $x^2 + y^2 = 1$, $x^2 + y^2 = 4$.	$\frac{15\pi}{2}$

Вариант 15

№	Содержание	Ответ
1	Найти $\int\limits_1^2 dx \int\limits_0^1 (x^3 + y^3) dy$.	4
2	Найти $\iint\limits_{(S)} (x^3 + y^2) dxdy$, (S) – прямоугольник: $1 \le x \le 2$, $0 \le y \le 1$.	$4\frac{1}{12}$
3	Расставить пределы интегрирования в двойном интеграле по области (S) и изобразить ее: $\iint\limits_{(S)} f(x; y) dxdy$; (S): $y = x^2 + 1$, $x - y + 3 = 0$.	
4	Изменить порядок интегрирования, предварительно построив область интегрирования. $\int\limits_0^a dx \int\limits_{a-x}^{\sqrt{a^2-x^2}} f(x; y) dy$.	
5	Найти двойной интеграл, предварительно построив область интегрирования. $\iint\limits_{(S)} (xy^2 + 1)\, dxdy$; (S): $y = \dfrac{x}{2}$, $y = \sqrt{\dfrac{x}{2}}$.	$\frac{47}{105}$
6	Перейдя к полярным координатам, найти двойной интеграл, предварительно построив область интегрирования. $\iint\limits_{(S)} (x^2 + y^2) dxdy$; (S): $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$, $y = 0$ ($x > 0$, $y > 0$).	$\frac{\pi a^4}{32}$

Вариант 16

№	Содержание	Ответ
1	Найти $\int\limits_2^4 dx \int\limits_0^2 x^3 y\,dy$.	120
2	Найти $\iint\limits_{(S)} (x+y^2)dxdy$, (S) – прямоугольник: $2 \le x \le 3$, $1 \le y \le 2$.	$4\frac{5}{6}$
3	Расставить пределы интегрирования в двойном интеграле по области (S) и изобразить ее: $\iint\limits_{(S)} f(x;y)\,dxdy$; (S): $x^2 - y^2 = 1$, $y = -2$, $y = 2$.	
4	Изменить порядок интегрирования, предварительно построив область интегрирования. $\int\limits_0^1 dy \int\limits_y^{\sqrt{y}} f(x;y)\,dx$.	
5	Найти двойной интеграл, предварительно построив область интегрирования. $\iint\limits_{(S)} e^{x+y}\,dxdy$; (S): $y = e^x$, $y = 2$, $x = 0$.	e
6	Перейдя к полярным координатам, найти двойной интеграл, предварительно построив область интегрирования. $\iint\limits_{(S)} \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dxdy$; (S): $x^2 + y^2 = 1$, $x^2 + y^2 = 9$, $(y \ge 0)$.	8

Вариант 17

№	Содержание	Ответ
1	Найти $\int_4^6 dy \int_1^e \frac{y}{x} dx$.	10
2	Найти $\iint\limits_{(S)} (x-y)\, dxdy$, (S) – прямоугольник: $1 \le x \le 4$, $1 \le y \le 3$.	3
3	Расставить пределы интегрирования в двойном интеграле по области (S) и изобразить ее: $\iint\limits_{(S)} f(x;y)\, dxdy$; (S): $y^2 - x^2 = 16$, $x = -3$, $x = 3$.	
4	Изменить порядок интегрирования, предварительно построив область интегрирования. $\int_0^1 dy \int_{y^2}^{\sqrt{y}} f(x;y)\, dx$.	
5	Найти двойной интеграл, предварительно построив область интегрирования. $\iint\limits_{(S)} x\, dxdy$; (S): $xy = 6$, $x + y - 7 = 0$.	$20\frac{5}{6}$
6	Перейдя к полярным координатам, найти двойной интеграл, предварительно построив область интегрирования. $\iint\limits_{(S)} e^{x^2+y^2}\, dxdy$; (S): $x^2 + y^2 \le 1$.	$\pi(e-1)$

Вариант 18

№	Содержание	Ответ
1	Найти $\int\limits_0^1 dx \int\limits_1^2 x^3 y^2 dy$.	$\dfrac{7}{12}$
2	Найти $\iint\limits_{(S)} (x+y)\, dxdy$, (S) – прямоугольник: $3 \le x \le 5$, $0 \le y \le 2$.	20
3	Расставить пределы интегрирования в двойном интеграле по области (S) и изобразить ее: $\iint\limits_{(S)} f(x;y)\, dxdy$; (S): $y = x$, $y = \sqrt{3}x$, $x^2 + y^2 = 8$, ($x \ge 0$, $y \ge 0$).	
4	Изменить порядок интегрирования, предварительно построив область интегрирования. $\int\limits_{-2}^{1} dx \int\limits_{x^2+1}^{3-x} f(x;y)\, dy$.	
5	Найти двойной интеграл, предварительно построив область интегрирования. $\iint\limits_{(S)} x^2 y\, dxdy$; (S): $y = x^2$, $y = 4$.	$24\dfrac{8}{21}$
6	Перейдя к полярным координатам, найти двойной интеграл, предварительно построив область интегрирования. $\iint\limits_{(S)} \sqrt{x^2 + y^2}\, dxdy$; (S): $x^2 + y^2 \le 2Rx$, $y \le 0$.	$\dfrac{16R^3}{9}$

Вариант 19

№	Содержание	Ответ
1	Найти $\int\limits_1^2 dx \int\limits_2^4 x^2 y^3 dy$.	140
2	Найти $\iint\limits_{(S)} xy\,dxdy$, (S) – прямоугольник: $2 \le x \le 4$, $1 \le y \le 2$.	9
3	Расставить пределы интегрирования в двойном интеграле по области (S) и изобразить ее: $\iint\limits_{(S)} f(x;y)\,dxdy$; (S): $x^2 + y^2 = 4$, $y = 2x - x^2$, $x = 0$, $(x \ge 0,\ y \ge 0)$.	
4	Изменить порядок интегрирования, предварительно построив область интегрирования. $\int\limits_0^2 dx \int\limits_x^{2x} f(x;y)\,dy$.	
5	Найти двойной интеграл, предварительно построив область интегрирования. $\iint\limits_{(S)} xy\,dxdy$; (S): $y = x^2$, $y^2 = x$.	$\frac{1}{12}$
6	Перейдя к полярным координатам, найти двойной интеграл, предварительно построив область интегрирования. $\iint\limits_{(S)} \frac{\cos\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dxdy$; (S): $\frac{\pi^2}{4} \le x^2 + y^2 \le 4\pi^2$.	-2π

Вариант 20

№	Содержание	Ответ
1	Найти $\int\limits_1^2 dy \int\limits_4^6 \frac{x}{y^2}\, dx$.	5
2	Найти $\iint\limits_{(S)} (x+y)\, dxdy$, (S) – прямоугольник: $3 \le x \le 5$, $0 \le y \le 2$.	20
3	Расставить пределы интегрирования в двойном интеграле по области (S) и изобразить ее: $\iint\limits_{(S)} f(x;y)\, dxdy$; (S): $x = y^2$, $x = 1$.	
4	Изменить порядок интегрирования, предварительно построив область интегрирования. $\int\limits_1^2 dx \int\limits_{\frac{1}{x}}^{x} f(x;y)\, dy$.	
5	Найти двойной интеграл, предварительно построив область интегрирования. $\iint\limits_{(S)} xy^2\, dxdy$; (S): $x^2 + y^2 = 4$, $x + y - 2 = 0$.	$1\frac{3}{5}$
6	Перейдя к полярным координатам, найти двойной интеграл, предварительно построив область интегрирования. $\iint\limits_{(S)} \cos\sqrt{x^2+y^2}\, dxdy$; (S): $x^2 + y^2 = \frac{\pi^2}{4}$, $x^2 + y^2 = 4\pi^2$.	$2\pi - \pi^2$

Вариант 21

№	Содержание	Ответ
1	Найти $\int\limits_1^e dy \int\limits_3^5 \frac{x}{y}\,dx$.	8
2	Найти $\iint\limits_{(S)} \frac{y}{x^3}\,dxdy$, (S) – прямоугольник: $1 \le x \le 2$, $4 \le y \le 8$.	9
3	Расставить пределы интегрирования в двойном интеграле по области (S) и изобразить ее: $\iint\limits_{(S)} f(x;y)\,dxdy$; (S): $y = x$, $y = \sqrt{3}x$, $x^2 + y^2 = 8$, ($x \ge 0$, $y \ge 0$).	
4	Изменить порядок интегрирования, предварительно построив область интегрирования. $\int\limits_0^2 dx \int\limits_x^{2x} f(x;y)\,dy$.	
5	Найти двойной интеграл, предварительно построив область интегрирования. $\iint\limits_{(S)} (xy^2 + 1)\,dxdy$; (S): $y = \frac{x}{2}$, $y = \sqrt{\frac{x}{2}}$.	$\frac{47}{105}$
6	Перейдя к полярным координатам, найти двойной интеграл, предварительно построив область интегрирования. $\iint\limits_{(S)} \sqrt{x^2 + y^2}\,dxdy$; (S): $x^2 + y^2 \le 2Rx$, $y \le 0$.	$\frac{16R^3}{9}$

Вариант 22

№	Содержание	Ответ
1	Найти $\int\limits_0^1 dy \int\limits_2^4 xy^2 dx$.	2
2	Найти $\iint\limits_{(S)} xy\,dxdy$, (S) – прямоугольник: $2 \le x \le 4$, $1 \le y \le 2$.	9
3	Расставить пределы интегрирования в двойном интеграле по области (S) и изобразить ее: $\iint\limits_{(S)} f(x;y)\,dxdy$; (S): $x^2 + y^2 = 4$, $y = 2x - x^2$, $x = 0$, ($x \ge 0$, $y \ge 0$).	
4	Изменить порядок интегрирования, предварительно построив область интегрирования. $\int\limits_1^2 dx \int\limits_{\frac{1}{x}}^{x} f(x;y)\,dy$.	
5	Найти двойной интеграл, предварительно построив область интегрирования. $\iint\limits_{(S)} (xy + y)\,dxdy$; (S): $0 \le y \le 1$, $y \le x \le 2 - y$.	$\frac{2}{3}$
6	Перейдя к полярным координатам, найти двойной интеграл, предварительно построив область интегрирования. $\iint\limits_{(S)} \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\,dxdy$; (S): $x^2 + y^2 = 4$, $x^2 + y^2 = 16$, ($x \ge 0$, $y \ge 0$).	6

Вариант 23

№	Содержание	Ответ
1	Найти $\int\limits_{3}^{6} dx \int\limits_{0}^{2} x^2 y dy$.	126
2	Найти $\iint\limits_{(S)} (x^3 + y^2)\, dxdy$, (S) – прямоугольник: $1 \le x \le 2$, $0 \le y \le 1$.	$4\frac{1}{12}$
3	Расставить пределы интегрирования в двойном интеграле по области (S) и изобразить ее: $\iint\limits_{(S)} f(x;y)\, dxdy$; (S): $y^2 - x^2 = 16$, $x = -3$, $x = 3$ и (S) содержит начало координат.	
4	Изменить порядок интегрирования, предварительно построив область интегрирования. $\int\limits_{-2}^{1} dx \int\limits_{x^2+1}^{3-x} f(x;y)\, dy$.	
5	Найти двойной интеграл, предварительно построив область интегрирования. $\iint\limits_{(S)} x^3 y\, dxdy$; (S): $y = x^2$, $y = x + 2$.	$10\frac{1}{80}$
6	Перейдя к полярным координатам, найти двойной интеграл, предварительно построив область интегрирования. $\iint\limits_{(S)} \cos\sqrt{x^2 + y^2}\, dxdy$; (S): $\frac{\pi^2}{4} \le x^2 + y^2 \le 4\pi^2$.	$2\pi - \pi^2$

Вариант 24

№	Содержание	Ответ
1	Найти $\int\limits_0^1 dx \int\limits_2^4 xy^3 dy$.	30
2	Найти $\iint\limits_{(S)} (x^2 + y) dxdy$, (S) – прямоугольник: $1 \le x \le 2$, $0 \le y \le 1$.	$2\frac{5}{6}$
3	Расставить пределы интегрирования в двойном интеграле по области (S) и изобразить ее: $\iint\limits_{(S)} f(x;y)\,dxdy$; (S):): $y = x^2 + 1$, $x - y + 3 = 0$.	
4	Изменить порядок интегрирования, предварительно построив область интегрирования. $\int\limits_0^1 dy \int\limits_{y^2}^{\sqrt{y}} f(x;y)\,dx$.	
5	Найти двойной интеграл, предварительно построив область интегрирования. $\iint\limits_{(S)} x^4 y\,dxdy$; (S): $xy = 1$, $y - x = 0$, $x = 2$.	$7\frac{19}{21}$
6	Перейдя к полярным координатам, найти двойной интеграл, предварительно построив область интегрирования. $\iint\limits_{(S)} \frac{dxdy}{\sqrt{25 - x^2 - y^2}}$; (S): $x^2 + y^2 \le 16$.	4π

Вариант 25

№	Содержание	Ответ
1	Найти $\int\limits_1^2 dx\int\limits_0^1 (x^3+y^3)dy$.	4
2	Найти $\iint\limits_{(S)} (x-y)\,dxdy$, (S) – прямоугольник: $1 \le x \le 4$, $1 \le y \le 3$.	3
3	Расставить пределы интегрирования в двойном интеграле по области (S) и изобразить ее: $\iint\limits_{(S)} f(x;y)\,dxdy$; (S): $x^2-y^2=1$, $y=-2$, $y=2$ и (S) содержит начало координат.	
4	Изменить порядок интегрирования, предварительно построив область интегрирования. $\int\limits_0^a dx \int\limits_{a-x}^{\sqrt{a^2-x^2}} f(x;y)\,dy$.	
5	Найти двойной интеграл, предварительно построив область интегрирования. $\iint\limits_{(S)} (x+y)\,dxdy$; (S): $0 \le y \le 1$, $y \le x \le 2-y$.	$1\frac{1}{3}$
6	Перейдя к полярным координатам, найти двойной интеграл, предварительно построив область интегрирования. $\iint\limits_{(S)} \frac{\cos\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dxdy$; (S): $\frac{\pi^2}{4} \le x^2+y^2 \le 4\pi^2$.	-2π

Вариант 26

№	Содержание	Ответ
1	Найти $\int\limits_2^4 dx \int\limits_0^2 x^3 y dy$.	120
2	Найти $\iint\limits_{(S)} (x^2 + y^2) dxdy$, (S) – прямоугольник: $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 1$.	$\frac{2}{3}$
3	Расставить пределы интегрирования в двойном интеграле по области (S) и изобразить ее: $\iint\limits_{(S)} f(x; y)\, dxdy$; (S): $xy = 6$, $x + y - 7 = 0$.	
4	Изменить порядок интегрирования, предварительно построив область интегрирования. $\int\limits_0^1 dy \int\limits_y^{\sqrt{y}} f(x; y)\, dx$.	
5	Найти двойной интеграл, предварительно построив область интегрирования. $\iint\limits_{(S)} xy^2\, dxdy$; (S): $x^2 + y^2 = 4$, $x + y - 2 = 0$, I четверть.	$1\frac{3}{5}$
6	Перейдя к полярным координатам, найти двойной интеграл, предварительно построив область интегрирования. $\iint\limits_{(S)} \sqrt{25 - x^2 - y^2}\, dxdy$; (S): $x^2 + y^2 \le 9$.	$\frac{122\pi}{3}$

Вариант 27

№	Содержание	Ответ
1	Найти $\int_4^6 dy \int_1^e \frac{y}{x} dx$.	10
2	Найти $\iint\limits_{(S)} (x+y)dxdy$, (S) – прямоугольник: $3 \le x \le 5$, $0 \le y \le 2$.	20
3	Расставить пределы интегрирования в двойном интеграле по области (S) и изобразить ее: $\iint\limits_{(S)} f(x;y)dxdy$; (S): прямоугольник с вершинами в точках $A(2;\ 4)$, $B(5;\ 4)$, $C(5;\ -2)$, $D(2;\ -2)$.	
4	Изменить порядок интегрирования, предварительно построив область интегрирования. $\int_{-2}^{2} dx \int_{x^2}^{4} f(x;y)dy$.	
5	Найти двойной интеграл, предварительно построив область интегрирования. $\iint\limits_{(S)} xy\,dxdy$; (S): $y = x^2$, $y^2 = x$.	$\frac{1}{12}$
6	Перейдя к полярным координатам, найти двойной интеграл, предварительно построив область интегрирования. $\iint\limits_{(S)} e^{x^2+y^2} dxdy$; (S): $x^2 + y^2 \le 1$.	$\pi(e-1)$

Вариант 28

№	Содержание	Ответ
1	Найти $\int\limits_0^1 dx\int\limits_1^2 x^3y^2dy$.	$\dfrac{7}{12}$
2	Найти $\iint\limits_{(S)}\sin(x+y)dxdy$, (S) – прямоугольник: $0\le x\le\dfrac{\pi}{2}$, $0\le y\le\dfrac{\pi}{2}$.	2
3	Расставить пределы интегрирования в двойном интеграле по области (S) и изобразить ее: $\iint\limits_{(S)} f(x;y)dxdy$; (S): прямоугольник с вершинами в точках $A(1;\ 1)$, $B(5;\ 5)$, $C(7;\ 3)$, $D(3;\ -1)$.	
4	Изменить порядок интегрирования, предварительно построив область интегрирования. $\int\limits_{-6}^{1} dx \int\limits_{x^{\frac{1}{3}}}^{\frac{x+6}{7}} f(x;y)dy$.	
5	Найти двойной интеграл, предварительно построив область интегрирования. $\iint\limits_{(S)} x^2y\,dxdy$; (S): $y = x^2$, $y = 4$.	$24\dfrac{8}{21}$
6	Перейдя к полярным координатам, найти двойной интеграл, предварительно построив область интегрирования. $\iint\limits_{(S)}\dfrac{ydxdy}{\sqrt{x^2+y^2}}$; (S): $x^2 + y^2 = 1$, $x^2 + y^2 = 9$, $(y \ge 0)$.	8

Вариант 29

№	Содержание	Ответ
1	Найти $\int\limits_1^2 dx \int\limits_2^4 x^2 y^3 dy$.	140
2	Найти $\iint\limits_{(S)} (3x^2 y - 2x^3) dxdy$, (S) – прямоугольник: $0 \le x \le 1$, $1 \le y \le 2$.	1
3	Расставить пределы интегрирования в двойном интеграле по области (S) и изобразить ее: $\iint\limits_{(S)} f(x;y)\,dxdy$; (S): $y^2 = x$, $x = 1$.	
4	Изменить порядок интегрирования, предварительно построив область интегрирования. $\int\limits_{-1}^{1} dx \int\limits_{x^{\frac{2}{3}}}^{-x^2+2} f(x;y)\,dy$.	
5	Найти двойной интеграл, предварительно построив область интегрирования. $\iint\limits_{(S)} e^{x+y}\,dxdy$; (S): $y = e^x$, $x = 0$, $y = 2$.	e
6	Перейдя к полярным координатам, найти двойной интеграл, предварительно построив область интегрирования. $\iint\limits_{(S)} (x^2 + y^2) dxdy$; (S): $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$, $y = 0$, $(x \ge 0, y \ge 0)$.	$\dfrac{\pi a^4}{32}$

Вариант 30

№	Содержание	Ответ
1	Найти $\int\limits_{1}^{2} dy \int\limits_{4}^{6} \frac{x}{y^2} dx$.	5
2	Найти $\iint\limits_{(S)} (x+y^2) dxdy$, (S) – прямоугольник: $2 \le x \le 3$, $1 \le y \le 2$.	$4\frac{5}{6}$
3	Расставить пределы интегрирования в двойном интеграле по области (S) и изобразить ее: $\iint\limits_{(S)} f(x;y)\, dxdy$; (S): треугольник с вершинами в точках $A(-2;-2)$, $B(-1;2)$, $C(6;2)$.	
4	Изменить порядок интегрирования, предварительно построив область интегрирования. $\int\limits_{-1}^{2} dx \int\limits_{x^2}^{x+2} f(x;y)\, dy$.	
5	Найти двойной интеграл, предварительно построив область интегрирования. $\iint\limits_{(S)} x\, dxdy$; (S): $xy = 6$, $x + y - 7 = 0$.	$20\frac{5}{6}$
6	Перейдя к полярным координатам, найти двойной интеграл, предварительно построив область интегрирования. $\iint\limits_{(S)} (x^2+y^2) dxdy$; (S): $x^2 + y^2 = 1$, $x^2 + y^2 = 4$.	$\frac{15\pi}{2}$

ЛИТЕРАТУРА

1. **Жевняк, Р.М.** Высшая математика / Р.М. Жевняк. – Минск: Вышэйшая школа, 1987.
2. **Шнейдер, В.Е.** Краткий курс высшей математики. Т. II / В.Е. Шнейдер, А.И. Слуцкий, А.С. Шумов. – Москва: Высшая школа, 1978.
3. **Рябушко, А.П.** Сборник индивидуальных заданий по высшей математике. Часть 3 /А.П. Рябушко, В.В Бархатов, В.В Державец, И.Е. Юруть. – Минск: Вышэйшая школа, 1991.
4. **Данко, П.Е.** Высшая математика в упражнениях и задачах. Часть II. / П.Е. Данко, А.Г. Попов, Т.Я. Кожевникова. – Москва: Высшая школа,1980.

Учебное издание

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

Методические указания
по теме «**ДВОЙНОЙ ИНТЕГРАЛ**»
Часть I
ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ И ЗАДАНИЯ
ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Составители:
Лапковский Валерий Кузьмич
Гальмак Александр Михайлович
Юрченко Ирина Викторовна
Довыденко Мария Михайловна

Редактор *А.А. Щербакова*
Технический редактор *Н.Г.Тверская*

Подписано в печать Формат 60×84 1/16.
Бумага офсетная. Гарнитура Таймс. Ризография.
Усл.печ.л. Уч.-изд.
Тираж 50 экз. Заказ .

Учреждение образования
«Могилевский государственный университет продовольствия».
Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя,
распространителя печатных изданий № 1/272 от 04.04.2014 г.
Пр-т Шмидта, 3, 212027, Могилев.

Отпечатано в учреждении образования
«Могилевский государственный университет продовольствия».
Пр-т Шмидта, 3, 212027, Могилев.