Министерство образования республики Беларусь
Учреждение образования
«Могилевский государственный университет продовольствия»

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

Методические указания к решению задач по теме «Аналитическая геометрия на плоскости и в пространстве» для студентов всех форм обучения и специальностей

Могилёв 2015

УДК 519.21

ББК 22.1

Рассмотрено и рекомендовано к изданию
на заседании кафедры высшей математики
Протокол № 6 от 18. 12. 2014.

Составители:
старший преподаватель О.А. Шендрикова
старший преподаватель И.В. Юрченко

Рецензент
к.ф.-м. н., доцент С.В. Подолян

УДК 51
ББК 22.1

Аналитическая геометрия – это раздел математики, который изучает свойства геометрических объектов с помощью алгебраических методов. Основным методом аналитической геометрии является метод координат.

1 Прямая линия на плоскости

1.1 Уравнение прямой, заданной точкой и нормальным вектором

Предположим, что в плоскости выбрана прямоугольная декартова система координат. Положение прямой l на плоскости относительно выбранной системы координат однозначно определено, если известны точка $M_0(x_0; y_0)$, через которую она проходит, и ненулевой вектор $\vec{n} = (A; B)$ перпендикулярный к этой прямой. Всякий ненулевой вектор перпендикулярный данной прямой называется ее *нормальным вектором*. Так как все нормальные векторы прямой коллинеарны, то один из них получают из другого умножением на некоторое число не равное нулю, то есть одноименные координаты векторов пропорциональны. Значит, вектор $\vec{n}$ выбирается неоднозначно.

Выберем на прямой l произвольную точку $M(x; y)$ и рассмотрим векторы $\overrightarrow{M_0M}$ и $\vec{n}$ (рисунок 1). Так как векторы перпендикулярны, то их скалярное произведение векторов равно нулю, то есть $(\vec{n}, \overrightarrow{M_0M}) = 0$. Получили векторное уравнение прямой. Если $\vec{n} = (A; B)$, а $\overrightarrow{M_0M} = (x - x_0; y - y_0)$, то, записав векторное уравнение в координатной форме, получим

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0. \quad (1.1)$$

Уравнение (1.1) называется *уравнением прямой, заданной точкой и нормальным вектором*.

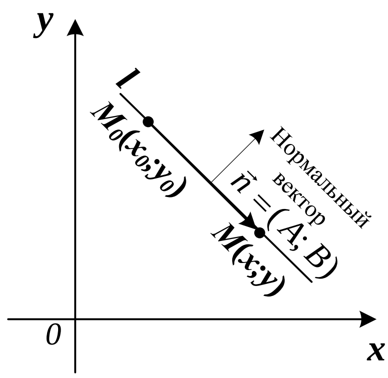

Рисунок 1 – Геометрическая иллюстрация к выводу уравнения (1.1)

1.2 Общее уравнение прямой

Рассмотрим уравнение (1.1). Раскрыв скобки в этом уравнении, получим

$$Ax + By + (- Ax_0 - By_0) = 0.$$

Обозначим $-Ax_0 - By_0 = C$, тогда уравнение будет иметь вид

$$Ax + By + C = 0. \qquad (1.2)$$

Уравнение (1.2) называется *общим уравнением прямой* на плоскости с нормальным вектором $\vec{n} = (A, B)$ ($A, B \neq 0$ одновременно).

Частные случаи расположения прямой на плоскости:

1) если $C = 0$, то уравнение (1.2) имеет вид $Ax + By = 0$. Следовательно, прямая проходит через начало координат, то есть $O(0, 0) \in l$;

2) если $B = 0$ ($A \neq 0$), то уравнение имеет вид $Ax + C = 0 \Rightarrow x = -\frac{C}{A}$ – прямая параллельна оси Oy;

3) если $A = 0$ ($B \neq 0$), то уравнение имеет вид $By + C = 0 \Rightarrow y = -\frac{C}{B}$ – прямая параллельна оси Ox;

4) если $B = C = 0$ ($A \neq 0$) $\Rightarrow x = 0$ – прямая совпадает с осью Oy;

5) если $A = C = 0$ ($B \neq 0$) $\Rightarrow y = 0$ – прямая совпадает с осью Ox.

1.3 Уравнение прямой, проходящей через заданную точку параллельно заданному вектору

Уравнение прямой l на плоскости относительно выбранной системы координат однозначно определено, если известны точка $M_0(x_0; y_0) \in l$ и вектор $\vec{s} = (m; n)$ параллельный этой прямой. Всякий ненулевой вектор параллельный данной прямой называется ее *направляющим вектором*. Так как все направляющие векторы прямой коллинеарны, то один из них получают из другого умножением на некоторое число не равное нулю, то есть одноименные координаты векторов пропорциональны. Значит, вектор $\vec{s}$ выбирается неоднозначно.

По этим данным составим уравнение прямой l.

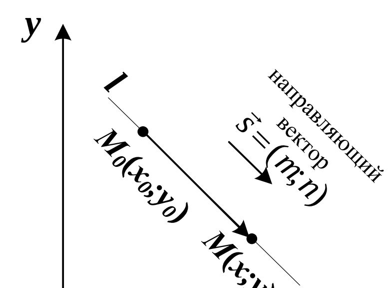

Рисунок 2 – Геометрическая иллюстрация к выводу уравнения (1.2)

Пусть точка $M(x; y)$ произвольная точка прямой. Тогда вектор $\overrightarrow{M_0M} = (x - x_0; y - y_0)$, лежащий на этой прямой, коллинеарен вектору $\vec{s} = (m; n)$

(рисунок 2). Из коллинеарности векторов следует пропорциональность соответствующих координат, то есть

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n}. \qquad (1.3)$$

Равенство (1.3) называется *каноническим уравнением прямой на плоскости*.

1.4 Параметрические уравнения прямой

В силу коллинеарности векторов $\vec{s}$ и $\overrightarrow{M_0M}$ существует $t \in R$ ($t \neq 0$), такое, что $\overrightarrow{M_0M} = t\vec{s}$ или $(x - x_0;\ y - y_0) = t(m;\ n)$. Из определения равенства векторов следует, что $x - x_0 = tm$, $y - y_0 = tn$.

Таким образом,

$$\begin{cases} x = x_0 + tm, \\ y = y_0 + tn. \end{cases} \qquad (1.4)$$

Уравнения (1.4) называются *параметрическими уравнениями прямой* l, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0)$ параллельно вектору $\vec{s} = (m;\ n)$.

1.5 Векторное уравнение прямой

Пусть задана точка $M_0(x_0;\ y_0) \in l$ и ненулевой вектор $\vec{s} = (m;\ n)$ параллельный прямой.

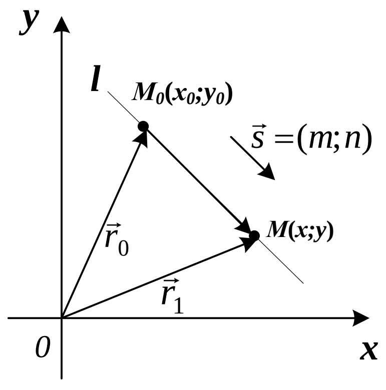

Рисунок 3 – Геометрическая иллюстрация к выводу уравнения (1.5)

Возьмем на прямой l переменную точку $M(x;\ y)$ (рисунок 3). Векторы $\overrightarrow{M_0M}$ и $\vec{s}$ коллинеарны, поэтому при любом положении точки M на прямой будет иметь место равенство

$$\overrightarrow{M_0M} = t\vec{s},$$

где $t \in R$ ($t \neq 0$) – числовой множитель, который может быть любым действительным числом в зависимости от положения точки M на прямой.

Пусть $\overrightarrow{r_{M_0}} = \vec{r_0} = \overrightarrow{OM_0} = (x_0, y_0)$, а $\overrightarrow{r_M} = \vec{r} = \overrightarrow{OM} = (x, y)$. На рисунке 3 видно, что

$$\vec{r} = \vec{r_0} + \overrightarrow{M_0M} = \vec{r_0} + t\vec{s},\ t \in \mathrm{R}.$$

Итак,

$$\vec{r} = \vec{r_0} + t\vec{s}. \tag{1.5}$$

Уравнение (1.5) называется *векторным параметрическим уравнением прямой*.

1.6 Уравнение прямой, проходящей через две данные точки

Составим уравнение прямой, проходящей через две данные точки $M_1(x_1; y_1)$ и $M_2(x_2; y_2)$. Выберем на искомой прямой произвольную точку $M(x; y)$ и рассмотрим векторы $\overrightarrow{\text{Ì}_1\text{Ì}} = (x - x_1;\ y - y_1)$ и $\overrightarrow{M_1M_2} = (x_2 - x_1;\ y_2 - y_1)$ (рисунок 4). Эти векторы коллинеарны, значит, их одноименные координаты пропорциональны:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}. \tag{1.6}$$

Уравнение (1.6) называется *уравнением прямой, проходящей через две данные точки*.

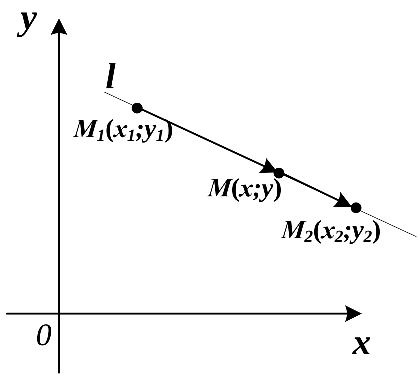

Рисунок 4 – Геометрическая иллюстрация к выводу уравнения (1.6)

1.7 Уравнение прямой в отрезках по осям

Пусть прямая l общего расположения на плоскости (не проходит через начало координат; не параллельна ни одной из координатных осей). Это значит, что в общем уравнении прямой (1.2) все коэффициенты отличны от нуля. Запишем общее уравнение прямой на плоскости и выполним нижеследующие преобразования:

$$Ax + By + C = 0 \Rightarrow Ax + By = -C \Rightarrow -\frac{Ax}{C} - \frac{By}{C} = 1 \Rightarrow -\frac{x}{\frac{C}{A}} - \frac{y}{\frac{C}{B}} = 1.$$

Обозначим

$$a = -\frac{C}{A},\ b = -\frac{C}{B}.$$

Получим уравнение

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1, \qquad (1.7)$$

которое называется *уравнением прямой на плоскости в отрезках*. При этом a и b – величины отрезков, отсекаемых прямой l на осях Ox и Oy соответственно (рисунок 5).

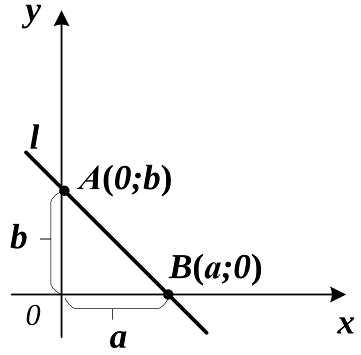

Рисунок 5 – Геометрическая иллюстрация к выводу уравнения (1.7)

Уравнение (1.7) может быть приведено к общему виду (1.2) и наоборот.

1.8 Уравнение прямой, проходящей через данную точку с данным угловым коэффициентом

Угловым коэффициентом прямой называется тангенс угла наклона прямой к положительному направлению оси Ox (рисунок 6).

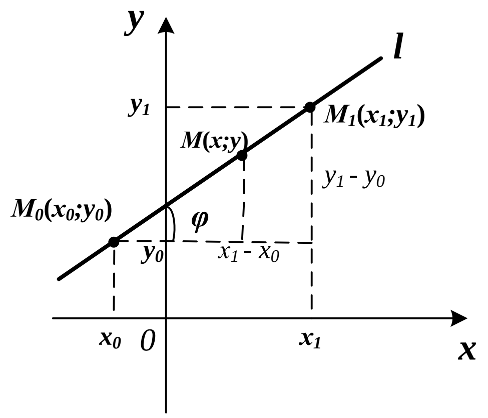

Рисунок 6 – Геометрическая иллюстрация к выводу уравнения (1.8)

Если φ – угол наклона прямой к положительному направлению оси Ox, то угловой коэффициент прямой $k = \operatorname{tg}\varphi = \dfrac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$.

Пусть на прямой l задана точка $M_0(x_0; y_0)$ и угловой коэффициент равен k. Если произвольная точка $M(x; y)$ лежит на прямой, то

$$k = \frac{y - y_0}{x - x_0}.$$

Значит,

$$y - y_0 = k(x - x_0). \qquad (1.8)$$

Уравнение (1.8) называется *уравнением прямой, проходящей через данную точку с данным угловым коэффициентом*.

Раскроем скобки в уравнении (1.8) и обозначим $y_0 - kx_0 = b$. Получим

$$y = kx + b. \qquad (1.9)$$

Уравнение (1.9) называется *уравнением прямой с угловым коэффициентом*.

Уравнение (1.9) можно получить из общего уравнения (1.2), выразив y при $B \neq 0$.

1.9 Взаимное расположение прямых на плоскости

Пусть прямые l_1 и l_2 заданы общими уравнениями:

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0,$$
$$A_2x + B_2y + C_2 = 0.$$

Нормальные векторы этих прямых: $\overrightarrow{n_1} = (A_1; B_1)$ и $\overrightarrow{n_2} = (A_2; B_2)$.

а) Прямая l_1 параллельна l_2 тогда и только тогда, когда векторы $\overrightarrow{n_1}$ и $\overrightarrow{n_2}$ коллинеарны, их одноименные координаты пропорциональны. Значит, условие

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2}$$

является условием параллельности прямых.

б) Если выполняется условие

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2},$$

то прямые l_1 и l_2 совпадают.

в) Если векторы $\overrightarrow{n_1}$ и $\overrightarrow{n_2}$ некомпланарны

$$\frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2},$$

то прямые l_1 и l_2 пересекаются. Точку пересечения прямых находим, решая систему уравнений

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2 = 0. \end{cases}$$

Угол φ между прямыми l_1 и l_2 определяется по формуле

$$\cos\varphi = \frac{\vec{n_1} \cdot \vec{n_2}}{|\vec{n_1}| \cdot |\vec{n_2}|} = \frac{A_1A_2 + B_1B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2}}.$$

д) Если прямые l_1 и l_2 взаимно перпендикулярны, то их нормальные векторы $\vec{n_1}$ и $\vec{n_2}$ также взаимно перпендикулярны и поэтому их скалярное произведение равно нулю:

$$A_1A_2 + B_1B_2 = 0.$$

Если прямые заданы каноническими уравнениями

$$\frac{x - x_1}{m_1} = \frac{y - y_1}{n_1}, \ \vec{s_1} = (m_1;\ n_1);$$

$$\frac{x - x_2}{m_2} = \frac{y - y_2}{n_2}, \ \vec{s_2} = (m_2;\ n_2),$$

то

а) $\dfrac{m_1}{m_2} = \dfrac{n_1}{n_2} \Rightarrow \vec{s_1} \uparrow\downarrow \vec{s_2} \Rightarrow l_1 \parallel l_2$;

б) $m_1m_2 + n_1n_2 = 0 \Rightarrow \vec{s_1} \perp \vec{s_2} \Rightarrow l_1 \perp l_2$;

в) $\cos\varphi = \dfrac{\vec{s_1} \cdot \vec{s_2}}{|\vec{s_1}| \cdot |\vec{s_2}|} = \dfrac{m_1m_2 + n_1n_2}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2} \cdot \sqrt{m_2^2 + n_2^2}}$.

Пусть прямые l_1 и l_2 заданы уравнениями с угловыми коэффициентами:

$$y = k_1x + b_1,$$

$$y = k\,x + b_2.$$

Тогда

а) $k_1 = k_2 \Rightarrow l_1 \parallel l_2$;

б) $k_1 = -\dfrac{1}{k_2} \Rightarrow l_1 \perp l_2$;

в) $\mathrm{tg}\varphi = \dfrac{k_2 - k_1}{1 + k_1k_2}$.

Расстояние d от точки $M_0(x_0,\ y_0)$ до прямой l, заданной общим уравнением $Ax + By + C = 0$, находится по формуле

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Пример 1. Даны точки $M(2; 3)$ и $N(-1; 0)$. Составить уравнение прямой, проходящей через точку M перпендикулярно отрезку MN.

Решение

Найдем координаты вектора $\overrightarrow{MN}$:

$$\overrightarrow{MN} = (x_N - x_M; y_N - y_M) = (-1 - 2; 0 - 3) = (-3; -3).$$

По условию вектор $\overrightarrow{MN}$ является нормальным вектором искомой прямой.

Составим уравнение прямой, проходящей через заданную точку M (2; 3) с заданным нормальным вектором $\overrightarrow{MN} = (-3; -3)$:

$$-3(x - 2) - 3(y - 3) = 0$$

или

$$x + y - 5 = 0 \text{ – уравнение искомой прямой.}$$

Пример 2. Определить угловой коэффициент k и отрезок b, отсекаемый на оси ординат прямой $2x + 5y - 10 = 0$.

Решение

Разрешив уравнение $2x + 5y - 10 = 0$ относительно y, получим:

$$y = -\frac{2}{5}x + 2.$$

Сравнивая это уравнение с уравнением $y = kx + b$, находим $k = -\frac{2}{5}$, . $b = 2$.

Пример 3. Найти отрезки, отсекаемые на осях координат прямой

$$7x + 2y - 14 = 0.$$

Решение

Разделим обе части уравнения $7x + 2y - 14 = 0$ на 14 и перенесем свободный член в правую часть:

$$\frac{7x}{14} + \frac{2y}{14} - \frac{14}{14} = 0,$$

$$\frac{x}{2} + \frac{y}{7} = 1.$$

Сравнивая полученные уравнения с уравнением в отрезках по осям $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$, находим $a = 2$, $b = 7$.

Пример 4. Написать уравнение прямой, проходящей через точку M (–2, 3) параллельно биссектрисе второго координатного угла.

Решение

Искомая прямая, как и биссектриса второго координатного угла, образует с положительным направлением оси Ox угол $\varphi = 135°$, поэтому $k = \mathrm{tg}135° = -1$. Так как точка M дана, то $x_0 = -2$, $y_0 = 3$. Тогда уравнение $y - y_0 = k(x - x_0)$ примет вид

$$y - 3 = (-1)\cdot(x - (-2)),\ y - 3 = -x + 2$$

или

$$x + y - 1 = 0.$$

Пример 5. Точки $A(3; 5)$, $B(-1; 3)$, $C(1; -3)$ являются вершинами треугольника. Составить уравнение высоты треугольника, проведенной из вершины B.

Решение

Построим данный треугольник (рисунок 7). На высоте возьмем произвольную точку $M(x; y)$ и рассмотрим вектор $\overrightarrow{BM} = (x + 1; y - 3)$, который является перпендикулярным вектору $\overrightarrow{AC} = (1 - 3; -3 - 5) = (-2; -8)$. Значит, их скалярное произведение равно нулю: $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BM} = 0$. В координатной форме имеем

$$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BM} = -2\cdot(x + 1) - 8\cdot(y - 3) = 0,$$

или

$$(x + 1) + 4\cdot(y - 3) = 0,$$

$$X + 4y - 11 = 0 \text{ – уравнение высоты } BM.$$

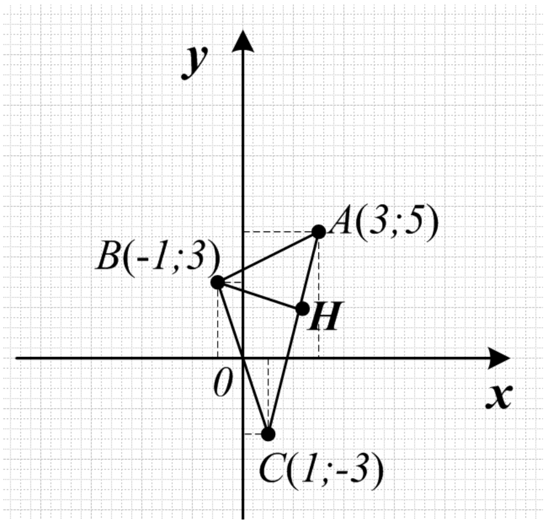

Рисунок 7 – Треугольник ABC

Пример 6. Даны вершина $C(-1; 3)$ прямого угла равнобедренного прямоугольного треугольника и уравнение его гипотенузы $3x - 4y - 12 = 0$. Составить уравнения катетов.

Решение

Из уравнения гипотенузы выразим y и найдем ее угловой коэффициент:

$$3x - 4y - 12 = 0,$$

$$-4y = -3x + 12,$$

$$y = \frac{3}{4}x - 3.$$

Следовательно, $k_1 = \frac{3}{4}$.

Катеты равнобедренного прямоугольного треугольника наклонены к гипотенузе под углом 45°. По формуле $\operatorname{tg}\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}$ найдем угловые коэффициенты катетов:

$$\operatorname{tg}45^\circ = \left|\frac{k_2 - \frac{3}{4}}{1 + \frac{3}{4}k_2}\right|,$$

$$\pm 1 = \frac{4k_2 - 3}{4 + 3k_2}.$$

Если $1 = \frac{4k_2 - 3}{4 + 3k_2}$, то $k_2 = 7$.

Если $-1 = \frac{4k_2 - 3}{4 + 3k_2}$, то $k_2 = -\frac{1}{7}$.

Зная координаты точки $C(-1; 3)$, принадлежащей двум катетам, получим их уравнения:

$$y - 3 = 7(x + 1),\ 7x - y + 10 = 0.$$

$$y - 3 = -\frac{1}{7}(x + 1),\ x + 7y - 20 = 0.$$

Пример 7. Найти уравнения прямых, которые параллельны прямой $12x + 5y - 7 = 0$ и удалены от нее на расстояние равное трем.

Решение

Для любой точки прямой $M(x; y)$ не лежащей на прямой $12x + 5y - 7 = 0$, по формуле $d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$ должно выполняться равенство

$$3 = \frac{|12x + 5y - 7|}{\sqrt{144 + 25}},$$

или

$$|12x + 5y - 7| = 3 \cdot 13,$$

$$|12x + 5y - 7| = 39.$$

Следовательно,

$$12x + 5y - 7 = 39 \text{ или } 12x + 5y - 7 = -39.$$

Таким образом, получим уравнения прямых

$$12x + 5y - 46 = 0 \text{ и } 12x + 5y + 32 = 0.$$

Пример 8. Даны уравнения двух смежных сторон AB и AD параллелограмма и точка N пересечения его диагоналей. Найти уравнения двух других сторон параллелограмма, если $N(3; 3)$, $x + y - 1 = 0$ (AB), $3x - y + 5 = 0$ (AD).

Решение

Найдем координаты точки пересечения прямых AB и AD, решив систему уравнений

$$\begin{cases} x + y - 1 = 0, \\ 3x - y + 5 = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} x = 1 - y, \\ 3(1 - y) - y + 5 = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} x = 1 - y, \\ -4y + 8 = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} x = -1, \\ y = 2. \end{cases}$$

Получили точку $A(-1; 2)$.

Найдем координаты точки C, применив формулы деления отрезка пополам (так как точка N – середина диагонали AC).

$$x_N = \frac{x_A + x_C}{2}, \ y_N = \frac{y_A + y_C}{2}.$$

Таким образом, имеем

$$3 = \frac{-1 + x_C}{2}, \ 3 = \frac{2 + y_C}{2},$$

откуда $x_C = 7$, $y_C = 4$, то есть $C(7; 4)$.

Так как четырехугольник $ABCD$ – параллелограмм, то $AB \parallel CD$ и $AD \parallel CB$ и $\vec{n}_{AB} \uparrow\downarrow \vec{n}_{CD}$, $\vec{n}_{AD} \uparrow\downarrow \vec{n}_{CB}$. Значит, можно считать, что $\vec{n}_{CD} = \vec{n}_{AB} = (1; 1)$, $\vec{n}_{CB} = \vec{n}_{AD} = (3; -1)$. Запишем уравнения сторон CD и CB, используя уравнение (1.1). Имеем

$$3(x - 7) - (y - 4) = 0, \ 3x - y - 17 = 0 \ (CB),$$

$$(x - 7) + (y - 4) = 0, \ x + y - 11 = 0 \ (CD).$$

Вопросы для самопроверки

1 Записать общее уравнение прямой на плоскости.

2 Каков геометрический смысл коэффициентов при x и y в общем уравнении прямой?

3 Записать уравнение прямой на плоскости, проходящей через точку $M_0(x_0; y_0)$ перпендикулярно вектору $\vec{n} = (A; B)$.

4 Записать каноническое уравнение прямой на плоскости и указать геометрический смысл входящих в него параметров.

5 Записать параметрические уравнения прямой на плоскости.

6 Записать уравнение прямой с угловым коэффициентом и указать геометрический смысл входящих в него параметров.

7 Записать уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(x_0; y_0)$ и образующей с осью абсцисс угол, тангенс которого равен k.

8 Записать уравнение прямой, проходящей через точки $M_1(x_1; y_1)$ и $M_2(x_2; y_2)$.

9 Записать уравнение прямой в отрезках по осям и указать геометрический смысл входящих в него параметров.

10 Записать формулы, по которым можно найти угол φ между прямыми.

11 Записать условие параллельности и условие перпендикулярности двух прямых, заданных:

а) общими уравнениями;

б) каноническими уравнениями;

в) уравнениями с угловыми коэффициентами.

12 Чему равно расстояние от точки $M_0(x_0; y_0)$ до прямой $Ax + By + C = 0$?

Задачи для самостоятельного решения

1 Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M(-2; 2)$ параллельно вектору:

а) $\vec{s} = (-1; 1)$;

б) $\overrightarrow{M_1M_2}$, если $M_1(2; -5)$, $M_2(3; 1)$.

(*Ответ*: а) $x + y = 0$; б) $6x - y + 14 = 0$)

2 Найти уравнение прямой, проходящей через точку $M(1; 2)$ с нормальным вектором $\vec{n} = (3; -4)$. (*Ответ*: $3x - 4y + 5 = 0$)

3 При каком значении C точка $M(3; -2)$ принадлежит прямой $2x + 5y + C = 0$. (*Ответ*: $C = 4$)

4 Задана прямая $2x + 3y + 4 = 0$. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M(2; 1)$:

а) параллельно данной прямой;

б) перпендикулярно данной прямой;

в) под углом 45° к данной прямой.

(*Ответ*: а) $2x + 3y - 7 = 0$; б) $3x - 2y - 4 = 0$; в) $x - 5y + 3 = 0$, $5x + y - 11 = 0$)

5 Найти уравнение прямой, проходящей через точку $M(-4; 10)$ и отсекающей отрезки равной длины на осях координат. (*Ответ*: $x + y - 6 = 0$)

6 Дан треугольник с вершинами $P(3; 1)$, $Q(-3; -1)$, $R(5; 12)$. Найти уравнение медианы, проведенной из вершины R, и вычислить ее длину. (*Ответ*: $12x + 5y = 0$, $d = 13$)

7 Даны две вершины $A(-2; 1)$ и $B(3; -4)$ треугольника и точка $N(5; -1)$ пересечения его высот. Найти уравнения всех сторон треугольника. (*Ответ*: $x + y + 1 = 0$, $7x - 2y - 29 = 0$, $2x + 3y + 1 = 0$)

8 Найти уравнение прямой, проходящей через точку $A(1; -2)$ и точку пересечения прямых $2x + 3y - 4 = 0$ и $3x - 5y + 13 = 0$. (*Ответ*: $2x + y = 0$)

9 Найти проекцию точки $A(-8; 12)$ на прямую, проходящую через точки $M_1(2; -3)$ и $M_2(-5; 1)$. (*Ответ*: $(-12; 5)$)

10 Найти точку B, симметричную точке $A(8; 12)$ относительно прямой $x - 2y + 6 = 0$. (*Ответ*: $B(12; 4)$)

11 Через точку $A(2; 5)$ провести прямые, которые находятся на одинаковом расстоянии от точек $M_1(-1; 2)$ и $M_2(5; 4)$. (*Ответ*: $x - 2 = 0$, $x - 3y + 13 = 0$)

12 Найти угол между прямыми:

а) $x + 5y - 3 = 0$, $2x - 3y + 4 = 0$;

б) $x + 2y - 3 = 0$, $y = -\dfrac{x}{2} - \dfrac{5}{2}$;

в) $y = \dfrac{3}{2}x + 1$, $y = \dfrac{1}{5}x - 3$.

(*Ответ*: а) 45°; б) 0°; в) 45°)

13 Определить, при каком значении параметра α прямые

$$(\alpha - 1)x - 2\alpha y + 5 = 0 \text{ и } \alpha x + 4\alpha y - 6 = 0:$$

а) параллельны;

б) совпадают;

в) взаимно перпендикулярны.

(*Ответ*: а) $\alpha = 2$; б) ни при каком α; в) $\alpha = \dfrac{1}{9}$)

14 Две стороны квадрата лежат на прямых, заданных уравнениями $5x - 12y - 65 = 0$ и $5x - 12y + 26 = 0$. Найти площадь квадрата. (*Ответ*: 49)

15 Доказать, что прямые $3x - 4y + 10 = 0$ и $6x - 8y + 15 = 0$ и найти расстояние между ними. (*Ответ*: $\dfrac{1}{2}$)

2 Линии второго порядка

2.1 Окружность

Окружностью называют множество всех точек плоскости, равноудаленных от некоторой фиксированной точки, называемой *центром окружности*.

Если R – радиус окружности, а точка $M(x_0; y_0)$ – центр окружности, то ее уравнение имеет вид

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2.$$

Если центр окружности совпадает с началом координат, то ее уравнение записывается в виде

$$x^2 + y^2 = R^2.$$

2.2 Эллипс

Эллипсом называют множество всех точек плоскости, для которых сумма расстояний от двух данных точек F_1 и F_2, называемых *фокусами*, есть величина постоянная, равная $2a$, и большая, чем расстояние между фокусами $2c$ ($2a > 2c$).

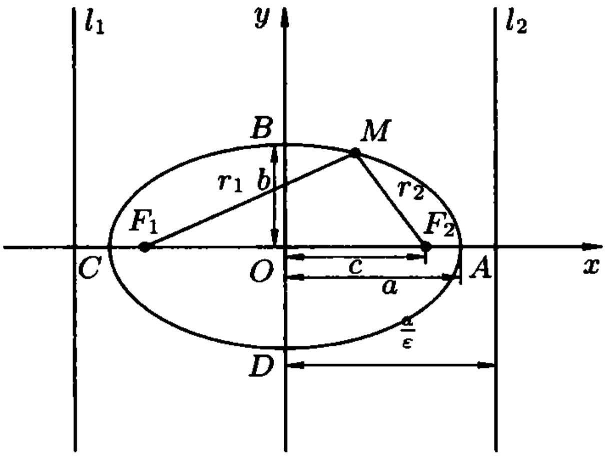

Рисунок 8 – Эллипс

Каноническое уравнение эллипса:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Начало координат $O(0;\ 0)$ является центром симметрии эллипса, а оси координат – осями симметрии эллипса. Точки $A(a;\ 0)$, $C(-\ a;\ 0)$, $B(0;\ b)$, $D(0;\ -\ b)$ называются *вершинами эллипса* (рисунок 8).

$b^2 = a^2 - c^2$, $a = OA$ – большая полуось, $b = OB$ – малая полуось. Координаты фокусов $F_1(-\ c;\ 0)$, $F_2(c;\ 0)$.

Отношение

$$\varepsilon = \frac{c}{a} < 1$$

называется *эксцентриситетом эллипса*.

Прямые $x = \pm\frac{a}{\varepsilon}$ называются *директрисами* эллипса.

Если $a < b$, то фокусы эллипса находятся на оси Oy, $c^2 = b^2 - a^2$, $\varepsilon = \frac{c}{b}$.

2.3 Гипербола

Гиперболой называют множество всех точек плоскости, для которых модуль разности расстояний от двух данных точек F_1 и F_2, называемых *фокусами*, есть величина постоянная, равная $2a$, и меньшая, чем расстояние между фокусами $2c$ ($2a < 2c$).

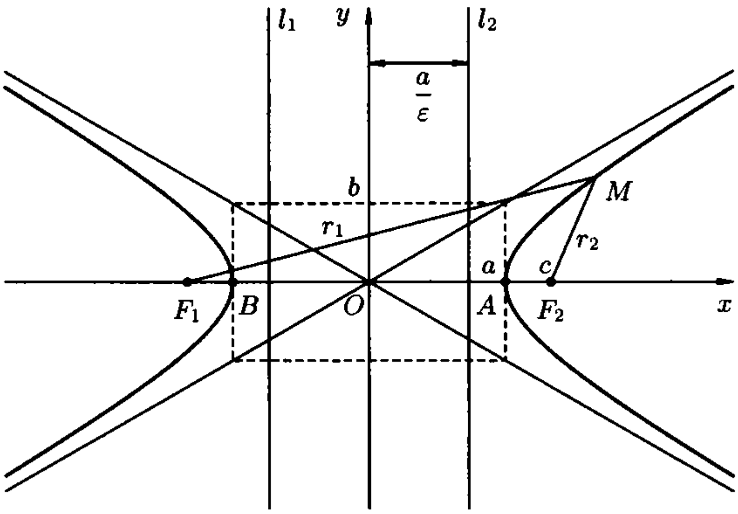

Рисунок 9 – Гипербола

Каноническое уравнение гиперболы:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Начало координат $O(0; 0)$ является центром симметрии гиперболы, а оси координат – осями гиперболы. Точки $A(a; 0)$, $B(-a; 0)$ называются *вершинами гиперболы* (рисунок 9).

$b^2 = c^2 - a^2$, a – действительная полуось, b – мнимая полуось. Координаты фокусов $F_1(-c; 0)$, $F_2(c; 0)$.

Отношение

$$\varepsilon = \frac{c}{a} > 1$$

называется *эксцентриситетом гиперболы*.

Прямые $y = \pm\frac{b}{a}x$ называются *асимптотами* гиперболы.

Гипербола, у которой $a = b$, называется *равносторонней*.

Уравнение

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$$

также является уравнением гиперболы, но действительной осью этой гиперболы служит отрезок оси Oy длиной $2b$.

2.4 Парабола

Параболой называют множество всех точек плоскости, каждая из которых находится на одинаковом расстоянии от данной точки F, называемой *фокусом*, и от данной прямой, называемой *директрисой* и не проходящей через фокус.

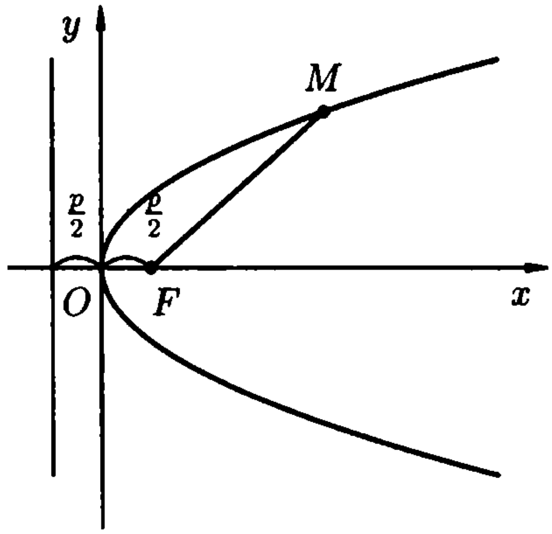

Рисунок 10 – Парабола

Каноническое уравнение параболы, симметричной относительно оси Ox и проходящей через начало координат, имеет вид

$$y^2 = 2px,$$

где p – расстояние от фокуса параболы $F(\frac{p}{2};\, 0)$ до ее директрисы $x = -\frac{p}{2}$ (рисунок 10).

Каноническое уравнение параболы, симметричной относительно оси Oy с вершиной в начале координат, имеет вид

$$x^2 = 2py.$$

В этом случае $F(0;\, \frac{p}{2})$ – фокус, $y = -\frac{p}{2}$ – уравнение директрисы.

Пример 1. Составить уравнение окружности, если точки $M_1(3;\, 2)$, $M_2(-1;\, 6)$ – концы диаметра окружности.

Решение

Найдем координаты центра окружности по формулам деления отрезка пополам:

$$x_O = \frac{x_{M_1} + x_{M_2}}{2} = \frac{3-1}{2} = 1,$$

$$y_O = \frac{y_{M_1} + y_{M_2}}{2} = \frac{2+6}{2} = 4.$$

Вычислим радиус окружности:

$$OM_1 = R = \sqrt{(3-1)^2 + (2-4)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}.$$

Тогда уравнение окружности:

$$(x-1)^2 + (y-4)^2 = 8.$$

Пример 2. Составить каноническое уравнение эллипса, если известно, что его большая полуось $a = 12$, а эксцентриситет $\varepsilon = 0{,}5$.

Решение

Известно, что $\varepsilon = \dfrac{c}{a}$. Следовательно,

$$c = a\varepsilon = 12\cdot 0{,}5 = 6.$$

Используя соотношение $b^2 = a^2 - c^2$, получим

$$b^2 = 144 - 36 = 108.$$

Таким образом, искомое уравнение эллипса имеет вид

$$\frac{x^2}{144} + \frac{y^2}{108} = 1.$$

Пример 3. Составить уравнение гиперболы, если известно, что она проходит через точку $M(9; 8)$, а асимптоты заданы уравнениями $y = \pm\dfrac{2\sqrt{2}}{3}x$. Найти эксцентриситет гиперболы.

Решение

Из уравнений асимптот гиперболы находим $\dfrac{b}{a} = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}$, или $b = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}a$.

Подставив в каноническое уравнение гиперболы полученное выражение для b, имеем

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{9y^2}{8a^2} = 1.$$

Точка $M(9; 8)$ принадлежит гиперболе, следовательно, ее координаты удовлетворяют уравнению гиперболы. Значит

$$\frac{9^2}{a^2} - \frac{9\cdot 8^2}{8a^2} = 1,$$

$$81 - 72 = a^2,$$

$$a^2 = 9,\ a = 3.$$

Тогда $b = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}a = \dfrac{2\sqrt{2}\cdot 3}{3} = 2\sqrt{2}$. Искомое уравнение гиперболы имеет вид

$$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{8} = 1.$$

Найдем эксцентриситет гиперболы:

$$\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a} = \frac{\sqrt{9+8}}{3} = \frac{\sqrt{17}}{3}.$$

Пример 4. Составить уравнение параболы, если известно, что:

а) фокус параболы $F(5; 0)$, а ее директрисой является ось ординат;

б) парабола симметрична относительно оси Oy и проходит через точки $O(0; 0)$ и $M(6; -2)$.

Решение

а) По условию $p = 5$ и вершина параболы имеет координаты (2,5; 0), то, используя уравнение $y^2 = 2p(x - x_0)$, получим

$$y^2 = 10(x - 2{,}5),$$

$$y^2 = 10x - 25.$$

б) Запишем уравнение параболы в общем виде: $x^2 = 2py$.

Точка $M(6; -2)$ удовлетворяет уравнению параболы, то есть

$$36 = 2p\cdot(-2),$$

$$-4p = 36,$$

$$p = -9.$$

Тогда уравнение параболы имеет вид

$$x^2 = -18y.$$

Вопросы для самопроверки

1 Какая линия называется эллипсом? Какие точки называются фокусами эллипса?

2 Записать каноническое уравнение эллипса.

3 Для эллипса, заданного каноническим уравнением $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, указать оси симметрии и вершины.

4 Какая ось эллипса называется большой осью и какая – малой?

5 Пусть $2a$ и $2b$ – соответственно большая и малая оси эллипса, а $2c$ – расстояние между его фокусами. Какова зависимость между a, b и c?

6 Какая линия называется гиперболой? Какие точки называются фокусами гиперболы?

7 Записать каноническое уравнение гиперболы.

8 Для гиперболы, заданной каноническим уравнением $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, указать оси симметрии и вершины.

9 Указать вершины гиперболы, заданной каноническим уравнением $\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$.

10 Что является действительной осью гиперболы $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$?

11 Что является мнимой осью гиперболы $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$?

12 Пусть $2a$ и $2b$ – соответственно действительная и мнимая оси гиперболы, а $2c$ – расстояние между ее фокусами. Какова зависимость между a, b и c?

13 Записать уравнения асимптот гиперболы $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.

14 Какая линия называется параболой? Какая точка называется фокусом параболы и какая прямая – директрисой, заданной уравнением $y^2 = 2px$?

15 Записать каноническое уравнение параболы.

16 Какая точка называется вершиной параболы?

17 Что называется эксцентриситетом эллипса?

18 Чему равен эксцентриситет ε эллипса, заданного уравнением $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, где $a > b$?

19 Что называется эксцентриситетом гиперболы?

20 Чему равен эксцентриситет ε гиперболы, заданной уравнением $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$?

Задачи для самостоятельного решения

1 Составить уравнение окружности, которая имеет центр в точке $M(2; 3)$ и касается прямой $x - 2y + 1 = 0$. (*Ответ*: $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = \frac{9}{5}$)

2 Составить уравнение окружности, которая проходит через точки $A(5; 0)$ и $B(1; 4)$, если ее центр лежит на прямой $x + y - 3 = 0$.
(*Ответ*: $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 10$)

3 Составить уравнение хорды окружности $x^2 + y^2 = 49$, которая делится точкой $A(1; 2)$ пополам. (*Ответ*: $x + 2y - 5 = 0$)

4 Составить каноническое уравнение эллипса, проходящего через точки $M(\frac{5}{2}; \frac{\sqrt{6}}{4})$ и $N(-2; \frac{\sqrt{15}}{5})$. (*Ответ*: $\frac{x^2}{10} + \frac{y^2}{1} = 1$)

5 Составить уравнение геометрического множества точек плоскости, расстояние от которых до точки $A(0; 1)$ в два раза меньше расстояния до прямой $y - 4 = 0$. (*Ответ*: $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{4} = 1$)

6 Составить каноническое уравнение эллипса, если известно, что малая полуось равна 6, а расстояние между фокусами равно 16. (*Ответ*: $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{36}=1$)

7 Эллипс касается оси абсцисс в вершине $A(4;\,0)$ и оси ординат в вершине $B(0;\,-3)$. Составить уравнение эллипса. (*Ответ*: $\frac{(x-4)^2}{16}+\frac{(y+3)^2}{9}=1$)

8 Найти эксцентриситет эллипса, если известно, что:

а) большая ось втрое больше малой;

б) оси относятся как 5:3.

(*Ответ*: а) $\frac{2\sqrt{2}}{3}$; б) 0,8)

9 Составить каноническое уравнение эллипса, если известно, что:

а) малая полуось равна 6, эксцентриситет равен 0,8;

б) расстояние между фокусами равно 6, эксцентриситет равен $\frac{3}{5}$;

в) сумма полуосей равна 10, расстояние между фокусами равно $4\sqrt{5}$.

(*Ответ*: а) $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{36}=1$; б) $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{64}=1$; в) $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{16}=1$)

10 Составить каноническое уравнение гиперболы, действительная ось которой равна 48, а эксцентриситет равен $\frac{13}{12}$. (*Ответ*: $\frac{x^2}{576}-\frac{y^2}{100}=1$)

11 Составить уравнение гиперболы, проходящей через точку $M(24;\,5)$, если ее асимптоты заданы уравнениями $y=\pm\frac{5}{12}x$. (*Ответ*: $\frac{x^2}{432}-\frac{y^2}{75}=1$)

12 Составить уравнение гиперболы, вершины которой находятся в фокусах, а фокусы – в вершинах эллипса $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$. (*Ответ*: $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$)

13 Найти уравнение параболы и ее директрисы, если известно, что парабола проходит через точку пересечения прямой $x+y=0$ и окружности $x^2+y^2-4x=0$ и симметрична относительно оси Oy. (*Ответ*: $x^2=-2y$; $y=\frac{1}{2}$)

14 Составить уравнение параболы, если известно, что ее фокус находится в точке пересечения прямой $4x-3y-4=0$ с осью Ox. (*Ответ*: $y^2=4x$)

15 Привести уравнения линий второго порядка к каноническому виду, определить их тип и расположение на плоскости:

а) $4x^2+9y^2-40x+36y+100=0$;

б) $16x^2-9y^2-64x-18y+199=0$;

в) $5x^2+9y^2-30x+18y+9=0$;

г) $3x^2-4y^2-12x+24=0$;

д) $y^2 + 2y + 4x - 11 = 0$.

(*Ответ*: а) $\frac{(x-5)^2}{9} + \frac{(y+2)^2}{4} = 1$ – эллипс; б) $-\frac{(x-2)^2}{9} + \frac{(y+1)^2}{16} = 1$ – гипербола; в) $\frac{(x-3)^2}{9} + \frac{(y+1)^2}{5} = 1$ – эллипс; г) $\frac{y^2}{3} - \frac{(x-2)^2}{4} = 1$ – гипербола; д) $(y + 1)^2 = -(x - 3)$ – парабола)

3 Плоскость в пространстве. Взаимное расположение плоскостей в пространстве

3.1 *Уравнение плоскости, проходящей через данную точку перпендикулярно данному вектору*

Положение плоскости в пространстве вполне определяется точкой $M_0(x_0; y_0; z_0)$ и вектором $\vec{n} = (A; B; C)$ $(A^2 + B^2 + C^2 \neq 0)$ перпендикулярным этой плоскости. Ненулевой вектор $\vec{n} = (A, B, C)$ перпендикулярный плоскости называется *нормальным вектором плоскости*.

Возьмем на плоскости произвольную точку $M(x; y; z)$ и составим вектор $\overrightarrow{M_0M} = (x - x_0; y - y_0; z - z_0)$ (рисунок 11).

При любом положении точки M на плоскости векторы $\overrightarrow{M_0M}$ и $\vec{n}$ взаимно перпендикулярны, следовательно, их скалярное произведение равно нулю, то есть $\overrightarrow{M_0M} \cdot \vec{n} = 0$. Это уравнение является *векторным уравнением* искомой плоскости. Записав его в координатной форме, получим равенство

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0, \qquad (3.1)$$

которое называется *уравнением плоскости, проходящей через данную точку перпендикулярно данному вектору*.

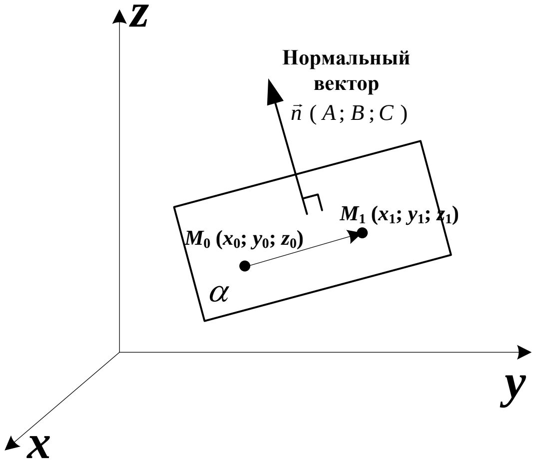

Рисунок 11 – Геометрическая иллюстрация к выводу уравнения (3.1)

3.2 *Общее уравнение плоскости*

Раскрыв в уравнении (3.1) скобки

$$Ax + By + Cz + (-Ax_0 - By_0 - Cz_0) = 0$$

и обозначив величину $-Ax_0 - By_0 - Cz_0$ через D, получим уравнение

$$Ax + By + Cz + D = 0, \qquad (3.2)$$

которое называется *общим уравнением плоскости*.

Рассмотрим частные случаи расположения плоскости.

1) Если $D = 0$, то уравнение (3.2) принимает вид $Ax + By + Cz = 0$. Этому уравнению удовлетворяет точка $O(0; 0; 0)$. Следовательно, плоскость проходит через начало координат.

2) Если $C = 0$, то имеем уравнение $Ax + By + D = 0$. Нормальный вектор $\vec{n} = (A, B, 0)$ перпендикулярен оси Oz. Следовательно, плоскость параллельна оси OZ. Аналогично: если $B = 0$ – параллельна оси Oy, $A = 0$ – параллельна оси Ox.

3) Если $C = D = 0$, то плоскость проходит через $O(0; 0; 0)$ и ее нормальный вектор перпендикулярен оси Oz. Значит, плоскость $Ax + By + = 0$ содержит ось OZ. Аналогично: уравнениям $Ax + Cz = 0$ и $By + Cz = 0$ соответствуют плоскости, содержащие соответственно оси Oy и Ox.

4) Если $A = B = 0$, то уравнение (3.2) принимает вид $Cz + D = 0$, то есть $z = -\dfrac{D}{C}$. Плоскость параллельна плоскости Oxy. Аналогично: уравнениям $Ax + D = 0$ и $By + D = 0$ отвечают плоскости, соответственно параллельные плоскостям Oyz и Oxz.

5) Если $A = B = D = 0$, то уравнение (3.2) примет вид $Cz = 0$, то есть $z = 0$. Это уравнение плоскости Oxy. Аналогично: $x = 0$ – уравнение плоскости Oyz; $y = 0$ – уравнение плоскости Oxz.

3.3 Уравнение плоскости в отрезках

Пусть плоскость общего положения (рисунок 12), то есть плоскость не проходит через начало координат, не параллельна ни одной из осей координат ($A, B, C, D \neq 0$). Уравнение этой плоскости можно записать в виде

$$Ax + By + Cz + D = 0. \qquad (3.3)$$

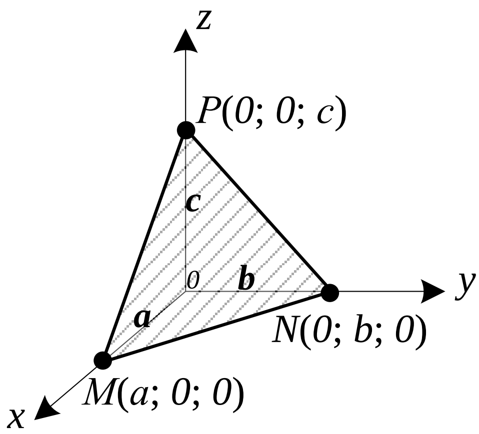

Рисунок 12 – Геометрическая иллюстрация к выводу уравнения (3.4)

Так как точка $M(a;\ 0;\ 0)$ лежит на плоскости, то ее координаты удовлетворяют уравнению (3.3) $Aa + D = 0$, откуда $A = -\dfrac{D}{a}$.

Аналогично: координаты точек $N(0;\ b;\ 0)$ и $P(0;\ 0;\ c)$ должны удовлетворять уравнению (3.3), значит, $Bb + D = 0$ и $Cc + D = 0$, откуда $B = -\dfrac{D}{b}$, $C = -\dfrac{D}{c}$.

Подставив найденные значения A, B, C в уравнение плоскости (3.3), получим

$$-\frac{D}{a}x - \frac{D}{b}y - \frac{D}{c}z + D = 0.$$

Сократив это равенство на $-D$ $(D \neq 0)$ и перенеся свободный член вправо, получим

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1. \tag{3.4}$$

Уравнение (3.4) называется *уравнением плоскости в отрезках*; a, b, c – величины отрезков, отсекаемых плоскостью на осях координат.

3.3 Уравнение плоскости, проходящей через три данные точки

Три точки пространства, не лежащие на одной прямой, определяют единственную плоскость. Составим уравнение плоскости, которая проходит через три данные точки $M_1(x_1;\ y_1;\ z_1)$, $M_2(x_2;\ y_2;\ z_2)$, $M_3(x_3;\ y_3;\ z_3)$. Возьмем на плоскости произвольную точку $M(x;\ y;\ z)$ и составим векторы $\overrightarrow{M_1M} = (x - x_1;\ y - y_1;\ z - z_1)$, $\overrightarrow{M_1M_2} = (x_2 - x_1;\ y_2 - y_1;\ z_2 - z_1)$, $\overrightarrow{M_1M_3} = (x_3 - x_1;\ y_3 - y_1;\ z_3 - z_1)$. Эти векторы лежат в одной плоскости, следовательно, они компланарны. Используя условие компланарности трех векторов (их смешанное произведение равно нулю), получим $\overrightarrow{M_1M} \cdot \overrightarrow{M_1M_2} \cdot \overrightarrow{M_1M_3} = 0$, то есть

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0. \qquad (3.5)$$

Уравнение (3.5) называется *уравнением плоскости, проходящей через три данные точки*.

3.4 Взаимное расположение плоскостей в пространстве

Угол между плоскостями

Пусть даны две плоскости

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0,$$
$$A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0.$$

За *угол между плоскостями* принимаем угол φ между любыми двумя перпендикулярными к ним векторами (что дает два угла, острый и тупой, дополняющих друг друга до π). Так как нормальные векторы плоскостей $\overrightarrow{n_1} = (A_1, B_1, C_1)$ и $\overrightarrow{n_2} = (A_2, B_2, C_2)$ перпендикулярны им, то получаем

$$\cos\varphi = \frac{\overrightarrow{n_1} \cdot \overrightarrow{n_2}}{|n_1| \cdot |n_2|}$$

или

$$\cos\varphi = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}.$$

Условие перпендикулярности двух плоскостей

Если две плоскости перпендикулярны, то нормальные векторы этих плоскостей также перпендикулярны и их скалярное произведение равно нулю: $\overrightarrow{n_1} \cdot \overrightarrow{n_2} = 0$. Значит, условием перпендикулярности двух плоскостей является

$$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0.$$

Условие параллельности двух плоскостей

Если плоскости параллельны, то будут параллельны и их нормальные векторы. Тогда одноименные координаты нормальных векторов пропорциональны. Значит, условием параллельности плоскостей является

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}.$$

Расстояние от точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ ***до плоскости*** $Ax + By + Cz + D = 0$.

Расстоянием от точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ *до плоскости* $Ax + By + Cz + D = 0$ называется длина перпендикуляра, проведенного из этой точки на плоскость, и находится по формуле

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Пример 1. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $P(-1, 2, 7)$ перпендикулярно вектору $\vec{n} = (3, -1, 2)$.

Решение

Согласно уравнению (3.1) получаем

$$3(x + 1) - (y - 2) + 2(z - 7) = 0,$$

$$3x - y + 2z - 9 = 0.$$

Пример 2. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M(2; -3; -7)$ параллельно плоскости $2x - 6y - 3z + 5 = 0$.

Решение

Вектор $\vec{n} = (2; -6; -3)$ перпендикулярный к плоскости перпендикулярен и к параллельной плоскости. Значит, искомая плоскость проходит через точку $M(2; -3; -7)$ перпендикулярно вектору $\vec{n} = (2; -6; -3)$. Найдем уравнение плоскости по формуле (3.1):

$$2(x - 2) - 6(y + 3) - 3(z + 7) = 0,$$

$$2x - 6y - 3z - 43 = 0.$$

Пример 3. Найти уравнение плоскости, проходящей через точки $M_1(2; 3; -1)$ и $M_2(1; 5; 3)$перпендикулярно к плоскости $3x - y + 3z + 15 = 0$.

Решение

Вектор $\vec{n} = (3; -1; 3)$ перпендикулярный к заданной плоскости будет параллелен искомой плоскости. Таким образом, плоскость проходит через точки M_1 и M_2 параллельно вектору $\vec{n}$.

Пусть $M(x; y; z)$ произвольная точка плоскости, тогда векторы $\overrightarrow{M_1M} = (x - 2; y - 3; z + 1)$, $\overrightarrow{M_1M_2} = (-1; 2; 4)$, $\vec{n} = (3; -1; 3)$ компланарны, значит их смешанное произведение равно нулю:

$$\begin{vmatrix} x-2 & y-3 & z+1 \\ -1 & 2 & 4 \\ 3 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 0.$$

Вычислим определитель разложением по элементам первой строки:

$$(x-2)\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} - (y-3)\begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} + (z+1)\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 0,$$

$$10(x-2) - (-15)(y-3) + (-5)(z+1) = 0,$$

$$2(x-2) + 3(y-3) - (z+1) = 0,$$

$$2x + 3y - z - 14 = 0 \text{ – уравнение плоскости.}$$

Пример 4. Составить уравнение плоскости, проходящей через начало координат перпендикулярно к плоскостям $2x - y + 5z + 3 = 0$ и $x + 3y - z - 7 = 0$.

Решение

Пусть $\vec{n}$ – нормальный вектор искомой плоскости. По условию плоскость перпендикулярна данным плоскостям, значит $\vec{n} \perp \overrightarrow{n_1}$ и $\vec{n} \perp \overrightarrow{n_2}$, где $\overrightarrow{n_1} = (2; -1; 5)$, $\overrightarrow{n_2} = (1; 3; -1)$. Значит, в качестве вектора $\vec{n}$ можно взять векторное произведение векторов $\overrightarrow{n_1}$ и $\overrightarrow{n_2}$, то есть $\vec{n} = \overrightarrow{n_1} \times \overrightarrow{n_2}$.

$$\vec{n} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -1 & 5 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix} = -14\vec{i} + 7\vec{j} + 7\vec{k}.$$

Подставив координаты вектора $\vec{n}$ в уравнение плоскости, проходящей через начало координат $Ax + By + Cz = 0$, получим

$$-14x + 7y + 7z = 0,$$

или

$$2x - y - z = 0.$$

Вопросы для самопроверки

1 Записать общее уравнение плоскости.

2 Каков геометрический смысл коэффициентов при x, y, z в общем уравнении плоскости?

3 Записать уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$ перпендикулярно к вектору $\vec{n} = (A; B; C)$.

4 Записать уравнение плоскости в отрезках по осям и указать геометрический смысл входящих в него параметров.

5 Записать уравнение плоскости, проходящей через точки $M_1(x_1; y_1; z_1)$, $M_2(x_2; y_2; z_2)$, $M_3(x_3; y_3; z_3)$.

6 Записать формулу, по которой находят угол между двумя плоскостями.

7 Записать условия параллельности двух плоскостей.

8 Записать условие перпендикулярности двух плоскостей.

9 Записать формулу, по которой вычисляется расстояние от точки до плоскости.

Задачи для самостоятельного решения

1 Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M(2; -1; 1)$ перпендикулярно вектору $\vec{n} = (1; -2; 3)$. (*Ответ*: $x - 2y + 3z - 7 = 0$)

2 Точка $P(1; -2; -2)$ является основанием перпендикуляра, проведенного из начала координат к плоскости. Составить уравнение этой плоскости. (*Ответ*: $x - 2y - 2z - 9 = 0$)

3 Даны две точки $M_1(2; -1; 3)$ и $M_2(-1; 2; 4)$. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку M_1 перпендикулярно вектору $\overrightarrow{M_1M_2}$. (*Ответ*: $3x - 3y - z - 6 = 0$)

4 Составить уравнение плоскости, проходящей через три точки $M_1(3; -1; 2)$, $M_2(4; -1; -1)$, $M_3(2; 0; 2)$. (*Ответ*: $3x + 3y + z - 8 = 0$)

5 Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $M_1(3; -1; 2)$ и $M_2(2; 1; 3)$ параллельно вектору $\vec{a} = (3; -1; 4)$. (*Ответ*: $9x + 7y - 5z - 10 = 0$)

6 Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M_1(2; 3; -4)$ параллельно векторам $\vec{a} = (3; 1; -1)$ и $\vec{b} = (1; -2; 1)$. (*Ответ*: $x + y + 7z + 14 = 0$)

7 Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M(1; -1; 1)$ перпендикулярно плоскостям $2x - y + z - 1 = 0$ и $x + 2y - z + 1 = 0$. (*Ответ*: $x - 3y - 5z + 1 = 0$)

8 Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $M_1(1; 0; 1)$ и $M_2(1; 2; -3)$ перпендикулярно плоскости $x - y + z - 1 = 0$. (*Ответ*: $x + 2y + z - 2 = 0$)

9 Найти угол между плоскостями $4x - 5y + 3z - 1 = 0$ и $x - 4y - z + 9 = 0$. (*Ответ*: $\varphi = \arccos 0{,}7$)

10 Найти расстояние от точки $M(2; -1; -1)$ до плоскости $16x - 12y + 15z - 4 = 0$. (*Ответ*: $d = 1$)

11 Найти точку пересечения трех плоскостей $5x + 8y - z - 7 = 0$, $x + 2y + 3z - 1 = 0$, $2x - 3y + 2z - 9 = 0$. (*Ответ*: $(3; -1; 0)$)

12 Составить уравнение плоскости, которая проходит через точки $M_1(1; -2; 6)$ и $M_2(5; -4; 2)$ и отсекает равные отрезки на осях Ox и Oy. (*Ответ*: $4x + 4y + z - 2 = 0$)

13 Найти расстояние между плоскостями $x + 2y - 2z + 2 = 0$ и $3x + 6y - 6z - 4 = 0$. (*Ответ*: $d = \dfrac{10}{3}$)

4 Прямая в пространстве. Взаимное расположение прямых

4.1 Канонические уравнения прямой в пространстве

Положение прямой в пространстве определено однозначно, если известна точка $M_0(x_0; y_0; z_0)$, через которую она проходит, и ненулевой вектор

$\vec{s} = (m;\, n;\, p)$ параллельный этой прямой (рисунок 13). Вектор $\vec{s}$ называется *направляющим вектором прямой*.

Составим уравнение прямой по этим данным. Выберем произвольную точку $M(x;\, y;\, z)$, принадлежащую прямой, и рассмотрим вектор $\overrightarrow{M_0M} = (x - x_0;\, y - y_0;\, z - z_0)$. Так как векторы $\overrightarrow{M_0M}$ и $\vec{s}$ параллельны, то их одноименные координаты пропорциональны. Из условия коллинеарности векторов получим соотношения

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}, \qquad (4.1)$$

которым удовлетворяют координаты любой точки прямой.

Уравнения (4.1) называются *каноническими уравнениями прямой*.

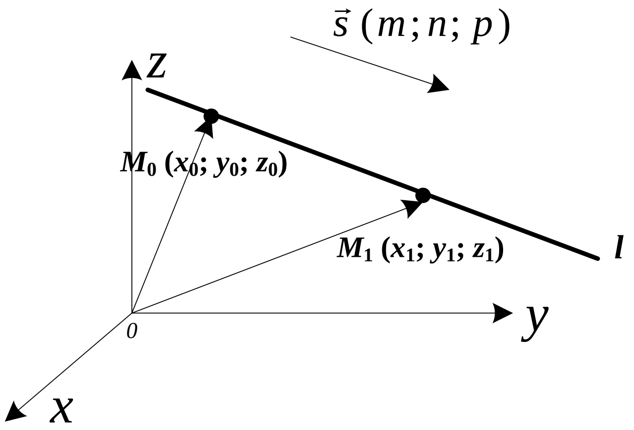

Рисунок 13 – Геометрическая иллюстрация к выводу уравнения (4.1)

4.2 Параметрические уравнения прямой в пространстве

В силу коллинеарности векторов $\vec{s} = (m;\, n;\, p)$ и $\overrightarrow{M_0M}$ существует $t \in R$ ($t \neq 0$), такое, что $\overrightarrow{M_0M} = t\vec{s}$ или $(x - x_0,\ \ y - y_0;\, z - z_0) = t(m,\, n;\, p)$. Тогда $x - x_0 = tm$, $y - y_0 = tn$, $z - z_0 = tp$, то есть

$$\begin{cases} x = x_0 + mt, \\ y = y_0 + nt, \\ z = z_0 + pt. \end{cases} \qquad (4.2)$$

Уравнения (4.2) называются *параметрическими уравнениями прямой* в пространстве.

4.3 Уравнение прямой в пространстве, проходящей через две данные точки

Уравнение прямой, проходящей через две данные точки $M_1(x_1; y_1; z_1)$, $M_2(x_2; y_2; z_2)$, рассмотрим как частный случай уравнения (4.1), когда направляющим вектором служит вектор $\overrightarrow{M_1M_2}$. Получим

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}. \qquad (4.3)$$

Уравнение (4.3) называется *уравнением прямой, проходящей через две данные точки*.

4.4 Общие уравнения прямой в пространстве

Прямую в пространстве можно однозначно определить как линию пересечения двух плоскостей, нормальные векторы которых $\overrightarrow{n_1} = (A_1; B_1; C_1)$ и $\overrightarrow{n_2} = (A_2; B_2; C_2)$ непараллельны (рисунок 14)

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0; \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0. \end{cases} \qquad (4.4)$$

Уравнения (4.4) называются *общими уравнениями прямой в пространстве*.

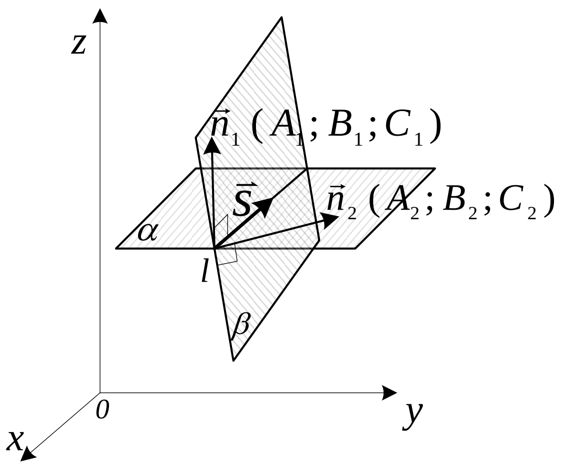

Рисунок 14 – Геометрическая иллюстрация к уравнению (4.4)

От общих уравнений прямой (4.4) можно перейти к каноническим уравнениям (4.1). Координаты некоторой точки M_0 можно найти, решив систему уравнений (4.4), придав одной из координат произвольное значение (например, $z = 0$).

Так как прямая перпендикулярна векторам $\overrightarrow{n_1} = (A_1, B_1, C_1)$ и $\overrightarrow{n_2} = (A_2, B_2, C_2)$, то направляющий вектор $\vec{s}$ также перпендикулярен этим векторам. Следовательно, в качестве направляющего вектора прямой можно взять вектор

$$\vec{s} = \overrightarrow{n_1} \times \overrightarrow{n_2} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix}.$$

4.5 Взаимное расположение двух прямых в пространстве

Угол между двумя прямыми

Углом между двумя прямыми в пространстве называют любой из двух углов, образованных прямыми, проведенными через произвольную точку пространства параллельно данным прямым.

Пусть заданы две прямые

$$\frac{x-x_1}{m_1} = \frac{y-y_1}{n_1} = \frac{z-z_1}{p_1} \text{ и } \frac{x-x_2}{m_2} = \frac{y-y_2}{n_2} = \frac{z-z_2}{p_2}.$$

Один из двух углов между двумя прямыми, равен углу φ между их направляющими векторами $\overrightarrow{s_1} = (m_1, n_1, p_1)$ и $\overrightarrow{s_2} = (m_2, n_2, p_2)$, а второй угол равен $\pi - \varphi$. Угол φ вычисляется по формуле

$$\cos\varphi = \frac{m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + p_1^2} \cdot \sqrt{m_2^2 + n_2^2 + p_2^2}}.$$

Условие перпендикулярности прямых

Прямые взаимно перпендикулярны тогда и только тогда, когда их направляющие векторы ортогональны. Отсюда следует, что их скалярное произведение равно нулю:

$$m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2 = 0.$$

Условие параллельности прямых

Прямые параллельны тогда и только тогда, когда их направляющие векторы коллинеарны. У коллинеарных векторов соответствующие координаты пропорциональны. Отсюда следует условие параллельности прямых:

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{p_1}{p_2}.$$

Вопросы для самопроверки

1 Записать канонические уравнения прямой в пространстве и указать геометрический смысл входящих в них параметров.

2 Записать параметрические уравнения прямой.

3 Записать уравнения прямой, проходящей через две заданные точки.
4 Записать общие уравнения прямой.
5 Записать формулу, по которой находится угол φ между прямыми.
6 Записать условия параллельности двух прямых.
7 Записать условие перпендикулярности двух прямых.

Пример 1. Найти канонические уравнения прямой $\begin{cases} 2x + 3y + 3z - 7 = 0; \\ x + 2y + 2z - 4 = 0. \end{cases}$

Решение

Определим координаты точки прямой. Считая, например, $z = 0$, получим систему уравнений

$$\begin{cases} 2x + 3y - 7 = 0, \\ x + 2y - 4 = 0. \end{cases}$$

Решим данную систему уравнений.

$$\begin{cases} 2(4 - 2y) + 3y - 7 = 0, \\ x = 4 - 2y, \end{cases} \qquad \begin{cases} 1 - y = 0, \\ x = 4 - 2y, \end{cases} \qquad \begin{cases} y = 1, \\ x = 2. \end{cases}$$

Таким образом, $M(2;1;\ 0)$ точка принадлежащая прямой.

Найдем направляющий вектор прямой. По условию $\overrightarrow{n_1} = (2;\ 3;\ 3)$, $\overrightarrow{n_2} = (1;\ 2;\ 2)$. Тогда

$$\vec{s} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = -\vec{j} + \vec{k}.$$

Запишем канонические уравнения исходной прямой

$$\frac{x-2}{0} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z}{1}.$$

Пример 2. Составить параметрические уравнения прямой, проходящей через точку $M_0\,(1;\ –2;\ 3)$ параллельно вектору $\vec{s} = (2;\ 4; -5)$. Найти точку P прямой, которой соответствует значение $t = 2$.

Решение

Воспользуемся формулами $\begin{cases} x = x_0 + mt, \\ y = y_0 + nt, \\ z = z_0 + pt. \end{cases}$

Так как в данном случае $x_0 = 1,\ y_0 = -2,\ z_0 = 3,\ m = 2,\ n = 4,\ p = -5$, то параметрические уравнения прямой имеют вид:

$$\begin{cases} x = 1 + 2t, \\ y = -2 + 4t, \\ z = 3 - 5t. \end{cases}$$

При t = 2 получим

$$x = 1 + 2 \cdot 2 = 5;\ \ y = -2 + 4 \cdot 2 = 6;\ \ z = 3 - 5 \cdot 2 = -7.$$

Таким образом, $P(5; 6; -7)$.

Задачи для самостоятельного решения

1 Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M(2; 0; -3)$ параллельно:

а) вектору $\vec{a} = (2; -3; 5)$;

б) прямой $\dfrac{x-1}{5} = \dfrac{y+2}{2} = \dfrac{z+1}{-1}$.

(*Ответ*: а) $\dfrac{x-2}{2} = \dfrac{y}{-3} = \dfrac{z+3}{5}$; б) $\dfrac{x-2}{5} = \dfrac{y}{2} = \dfrac{z+3}{-1}$)

2 Составить уравнение прямой, проходящей через две точки:

а) $M_1(1; -2; 1)$, $M_2(3; 1; -1)$;

б) $M_1(1; 3; -4)$, $M_2(-1; 2; -4)$.

(*Ответ*: а) $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+2}{3} = \dfrac{z-1}{-2}$; б) $\dfrac{x-1}{-2} = \dfrac{y-3}{-1} = \dfrac{z+4}{0}$)

3 Составить уравнение прямой, проходящей через точку $A(1; -1; -3)$ параллельно прямой $\begin{cases} x = -1 + 3t, \\ y = 3 - 2t, \\ z = 2 + 5t. \end{cases}$ (*Ответ*: $\dfrac{x-1}{3} = \dfrac{y+1}{-2} = \dfrac{z+3}{5}$)

4 Составить канонические уравнения прямых:

а) $\begin{cases} x - 2y + 3z + 1 = 0; \\ 2x + y - 4z - 8 = 0, \end{cases}$

б) $\begin{cases} 5x + y + z = 0; \\ 2x + 3y - 2z + 5 = 0. \end{cases}$

(*Ответ*: а) $\dfrac{x-3}{1} = \dfrac{y-2}{2} = \dfrac{z}{1}$; б) $\dfrac{x}{-5} = \dfrac{y+1}{12} = \dfrac{z-1}{13}$)

5 Дан треугольник с вершинами в точках $A(0; -2; 5)$, $B(3; 4; 1)$, $C(1; 0; -5)$. Составить уравнение медианы AD. (*Ответ*: $\dfrac{x}{2} = \dfrac{y+2}{4} = \dfrac{z-5}{-7}$)

6 Доказать параллельность прямых:

а) $\dfrac{x+2}{3} = \dfrac{y-1}{-2} = \dfrac{z}{1}$ и $\begin{cases} x + y - z = 0, \\ x - y - 5z - 8 = 0. \end{cases}$

б) $\begin{cases} x = 5 + 2t, \\ y = 2 - t, \\ z = -7 + t, \end{cases}$ и $\begin{cases} x + 3y + z + 2 = 0; \\ x - y - 3z - 2 = 0. \end{cases}$

7 Доказать перпендикулярность прямых:

а) $\frac{x}{1} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z}{3}$ и $\begin{cases} 3x + y - 5z + 1 = 0; \\ 2x + 3y - 8z + 3 = 0, \end{cases}$

б) $\begin{cases} x + y - 3z - 1 = 0; \\ 2x - y - 9z - 2 = 0, \end{cases}$ и $\begin{cases} 2x + y + 2z + 5 = 0; \\ 2x - 2y - z + 2 = 0. \end{cases}$

8 Найти угол между прямыми:

а) $\begin{cases} x - y - 4z - 5 = 0; \\ 2x + y - 2z - 4 = 0, \end{cases}$ и $\begin{cases} x - 2y - 6z + 2 = 0; \\ 2x + 2y + 9z - 1 = 0; \end{cases}$

б) $\frac{x-1}{3} = \frac{y+2}{6} = \frac{z-5}{2}$ и $\frac{x}{2} = \frac{y-3}{9} = \frac{z+1}{6}$;

в) $\begin{cases} x = -2 + 3t, \\ y = 0, \\ z = 3 - t, \end{cases}$ и $\begin{cases} x = 5 + 2t, \\ y = 2, \\ z = 7 + t. \end{cases}$

(*Ответ*: а) $\cos\varphi = \frac{4}{21}$; б) $\cos\varphi = \frac{72}{77}$; в) $\varphi = 135°$.

9 Составить уравнение прямой, проходящей через точку M(3; – 1; 2) перпендикулярно к прямым $\frac{x-1}{2} = \frac{y-7}{1} = \frac{z-3}{4}$ и $\frac{x}{1} = \frac{y}{-1} = \frac{z}{2}$.

(*Ответ*: $\frac{x-3}{5} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-2}{-3}$)

10 Выяснить, пересекаются ли данные прямые, и в случае положительного ответа найти точку их пересечения:

а) $\frac{x-2}{1} = \frac{y+3}{2} = \frac{z-4}{3}$ и $\frac{x-3}{-2} = \frac{y+3}{3} = \frac{z-5}{1}$;

б) $\begin{cases} 3x + y + 7z - 2 = 0, \\ x + y - 4z + 3 = 0, \end{cases}$ и $\begin{cases} 4x + 2y + 3z + 1 = 0, \\ 9x + 5y + 2z + 9 = 0. \end{cases}$

(*Ответ*: а) пересекаются, $(\frac{17}{7}; -\frac{15}{7}; \frac{37}{7})$; б) не пересекаются)

2 Взаимное расположение прямой и плоскости в пространстве

Угол между прямой и плоскостью

Углом φ *между прямой и плоскостью* называется острый угол между прямой и ее проекцией на плоскость.

Пусть прямая и плоскость заданы уравнениями

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p} \text{ и } Ax + By + Cz + D = 0.$$

Для нахождения угла φ определим угол θ между направляющим вектором прямой $\vec{s} = (m, n, p)$ и нормальным вектором плоскости $\vec{n} = (A, B, C)$ (рисунок 15). Известно, что

$$\cos\theta = \frac{Am+Bn+Cp}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\cdot\sqrt{m^2+n^2+p^2}}.$$

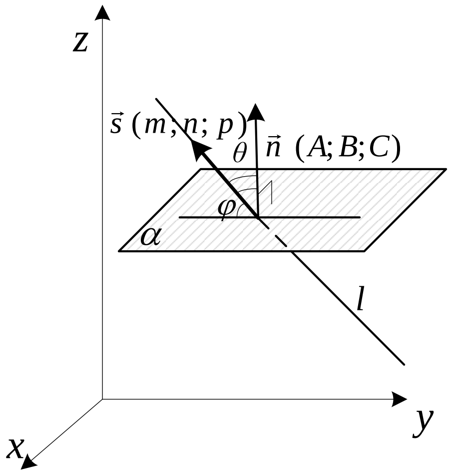

Рисунок 15 – Угол между прямой и плоскостью

Если направляющий вектор прямой выбрать так, чтобы $\cos\theta > 0$, и взять $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$, то угол φ между прямой и плоскостью дополняет угол θ до $\frac{\pi}{2}$. Следовательно, $\cos\theta = \cos(\frac{\pi}{2} - \varphi) = \sin\varphi$. Поэтому

$$\sin\varphi = \frac{|\ Am+Bn+Cp\ |}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\cdot\sqrt{m^2+n^2+p^2}}.$$

Числитель взят по абсолютной величине потому, что $\sin\varphi \ge 0$.

Условие параллельности прямой и плоскости

Если прямая параллельна плоскости, то векторы $\vec{s}$ и $\vec{n}$ перпендикулярны (рисунок 16), поэтому $\vec{s}\cdot\vec{n} = 0$, то есть

$$Am + Bn + Cp = 0.$$

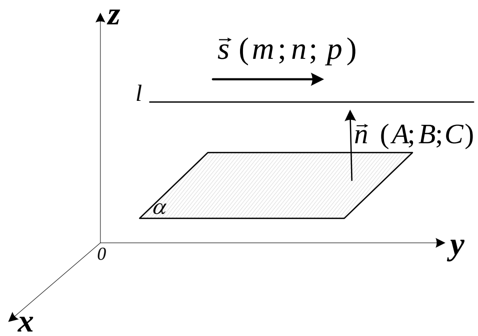

Рисунок 16 – Параллельность прямой и плоскости

Условие перпендикулярности прямой и плоскости

Если прямая перпендикулярна плоскости, то векторы $\vec{s}$ и $\vec{n}$ параллельны (рисунок 17), поэтому

$$\frac{A}{m}=\frac{B}{n}=\frac{C}{p}.$$

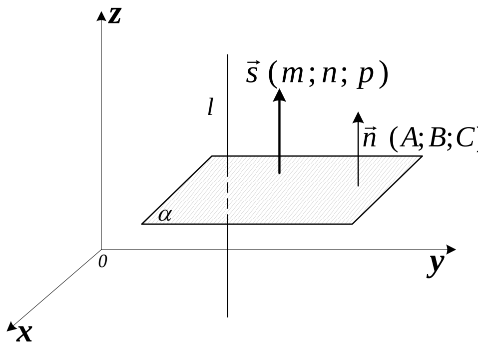

Рисунок 17 – Перпендикулярность прямой и плоскости

Пересечение прямой и плоскости. Условие принадлежности прямой плоскости

Для того чтобы найти точку пересечения прямой $\dfrac{x-x_0}{m}=\dfrac{y-y_0}{n}=\dfrac{z-z_0}{p}$ с плоскостью $Ax + By + Cz + D = 0$, надо решить систему, составленную из этих уравнений. Проще всего это сделать, записав уравнение прямой в параметрическом виде:

$$\begin{cases} x = x_0 + mt, \\ y = y_0 + nt, \\ z = z_0 + pt. \end{cases}$$

Подставляя эти выражения для x, y, z в уравнение плоскости, найдем значение t, при котором прямая и плоскость пересекаются. Возвращая найденное значение t в параметрические уравнения прямой, найдем координаты точки пересечения прямой и плоскости.

Если прямая параллельна плоскости и $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0$, где (x_0, y_0, z_0) координаты точки M_0, принадлежащей прямой, то прямая лежит в плоскости.

Таким образом, одновременное выполнение равенств

$$\begin{cases} Am + Bn + Cp = 0, \\ Ax_0 + By_0 + Cz_0 = 0, \end{cases}$$

является *условием принадлежности прямой плоскости*.

Вопросы для самопроверки

1 Записать формулу, по которой находится угол между прямой и плоскостью.

2 Записать условие параллельности прямой и плоскости.

3 Записать условие перпендикулярности прямой и плоскости.

4 Записать условия принадлежности прямой плоскости.

Пример 1. Составить уравнение плоскости, проходящей через прямую $\frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z+1}{-1}$ и точку $M_0(2; 0; 1)$.

Решение

Убедимся, что точка M_0 не принадлежит прямой:

$$\frac{2-1}{1} \neq \frac{0+1}{2} \neq \frac{1+1}{-1}.$$

Точка $P(1; -1; -1)$ принадлежит данной прямой, а $\vec{s} = (1; 2; -1)$ – направляющий вектор этой прямой (рисунок 18).

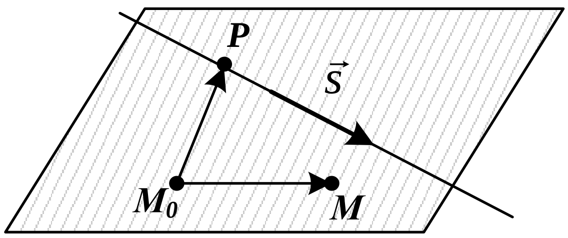

Рисунок 18 – Иллюстрация к примеру 1

Пусть $M(x; y; z)$ – произвольная точка исходной плоскости, тогда векторы $\overrightarrow{M_0M}$ = $(x – 2; y; z – 1)$, $\overrightarrow{M_0P}$ = $(– 1; – 1; – 2)$ и $\vec{s}$ = $(1; 2; – 1)$ компланарны. Значит,

$$\begin{vmatrix} x-2 & y & z-1 \\ -1 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 0,$$

$$5(x – 2) – 3y – (z – 1) = 0.$$

Таким образом, уравнение исходной плоскости имеет вид

$$5x – 3y – z – 9 = 0.$$

Пример 2. Найти точку M_1 симметричную точке $M(3; 1; – 1)$ относительно плоскости $3x + y + z – 20 = 0$.

Решение

Нормальный вектор заданной плоскости $\vec{i}$ = (3; 1; 1). Через точку M проведем перпендикуляр к плоскости (рисунок 19). Уравнение перпендикуляра имеет вид

$$\frac{x-3}{3} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+1}{1}.$$

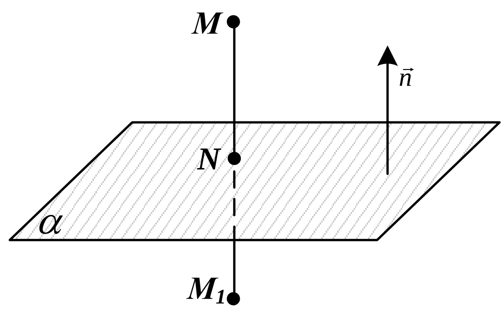

Рисунок 19 – Иллюстрация к примеру 2

Найдем координаты точки N пересечения прямой MM_1 и плоскости

$$\begin{cases} 3x + y + z - 20 = 0, \\ \dfrac{x-3}{3} = \dfrac{y-1}{1} = \dfrac{z+1}{1}. \end{cases}$$

Запишем параметрические уравнения прямой

$$\begin{cases} x = 3 + 3t, \\ y = 1 + t, \\ z = -1 + t. \end{cases}$$

Подставим выражения для x, y, z в уравнение плоскости

$$3(3 + 3t) + (1 + t) + (-1 + t) - 20 = 0.$$

После упрощения получим

$$11t = 11,$$

откуда

$$t = 1.$$

Подставив вместо t в параметрические уравнения прямой 1, найдем координаты проекции точки M на плоскость

$$x_N = 6,\ y_N = 2,\ z_N = 0,$$

то есть $N(6; 2; 0)$.

Координаты точки M_1 найдем по формулам

$$x_N = \frac{x_M + x_{M_1}}{2},\ y_N = \frac{y_M + y_{M_1}}{2},\ z_N = \frac{z_M + z_{M_1}}{2},$$

$$x_{M_1} = 2x_N - x_M = 9,\ y_{M_1} = 2y_N - y_M = 3,\ z_{M_1} = 2z_N - z_M = 1.$$

Таким образом, имеем $M_1(9; 3; 1)$.

Пример 3. Найти уравнение проекции прямой $\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{3}$ на плоскость $x + y + 2z - 5 = 0$.

Решение

Через прямую l проведем плоскость β перпендикулярную плоскости α (рисунок 20). Тогда направляющий вектор $\vec{s} = (1; 2; 3)$ прямой и нормальный вектор $\overrightarrow{i_1} = (1; 1; 2)$ данной плоскости перпендикулярны нормальному вектору $\overrightarrow{i_2}$ β, следовательно, $\overrightarrow{i_2} = \vec{s} \times \overrightarrow{i_1}$.

$$\overrightarrow{i_2} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \vec{i} + \vec{j} - \vec{k} = (1; 1; -1).$$

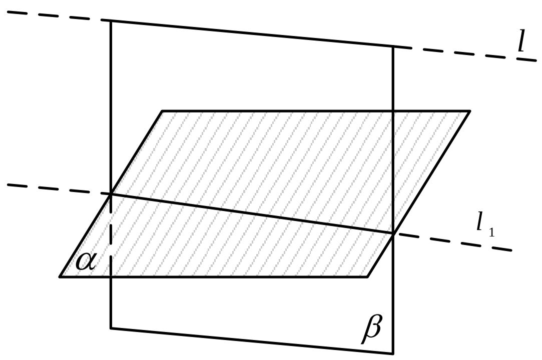

Рисунок 20 – Иллюстрация к примеру 3

Уравнение плоскости β запишем в виде

$$1(x-1)+1(y-1)-z=0,$$

$$x+y-z-2=0.$$

Искомую проекцию можно определить общими уравнениями, как линию пересечения двух плоскостей:

$$\begin{cases} x+y+2z-5=0, \\ x+y-z-2=0. \end{cases}$$

Пример 4. Найти расстояние от точки $A(1; 3; 5)$ до прямой $\frac{x+30}{6}=\frac{y}{2}=\frac{z+\frac{5}{2}}{-1}$.

Решение

Так как по определению расстояние от точки A до прямой – это длина перпендикуляра AB, проведенного из данной точки к данной прямой, то, определив координаты точки B, вычислим искомое расстояние как расстояние между точками A и B.

Таким образом, задача сводится к нахождению координат основания перпендикуляра, построенного из точки A к прямой. Точка B – это точка пересечения прямой с плоскостью, проходящей через точку A перпендикулярно к прямой. Уравнение этой плоскости имеет вид

$$6(x-1)+2(y-3)-(z-5)=0,$$

$$6x+2y-z-7=0.$$

Найдем координаты точки пересечения плоскости с прямой

$$\begin{cases} 6x+2y-z-7=0, \\ \dfrac{x+30}{6}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z+\frac{5}{2}}{-1}, \end{cases} \qquad \begin{cases} 6x+2y-z-7=0, \\ x=-30+6t, \\ y=2t, \\ z=-\dfrac{5}{2}-t, \end{cases}$$

$$6(-30+6t)+2\cdot 2t-(-\frac{5}{2}-t)-7=0,$$

$$41t-\frac{369}{2}=0,$$

$$t=\frac{9}{2}.$$

Точка пересечения $B(-3; 9; -7)$. Найдем расстояние между точками A и B:

$$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}=\sqrt{16+36+144}=14,$$

$$d=14.$$

Задачи для самостоятельного решения

1 Определить взаимное расположение прямой и плоскости:

а) $\dfrac{x+3}{3}=\dfrac{y-2}{-1}=\dfrac{z+1}{-5}$, $x-2y+z-15=0$;

б) $\dfrac{x+2}{-2}=\dfrac{y-1}{3}=\dfrac{z-3}{2}$, $x+2y-2z+6=0$;

в) $\dfrac{x-1}{-1}=\dfrac{y+1}{-2}=\dfrac{z}{6}$, $2x+3y+z-1=0$;

(*Ответ*: а) прямая параллельна плоскости; б) прямая лежит в плоскости; в) $(2; -3; 6)$)

2 Написать уравнение плоскости, проходящей через точку $A(3; 4; 0)$ и прямую $\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-3}{2}=\dfrac{z+1}{3}$. (*Ответ*: $x-2y+z+5=0$)

3 Написать уравнение плоскости, проходящей через прямую $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z+2}{2}$ и перпендикулярно плоскости $2x+3y-z=4$. (*Ответ*: $8x-5y+z-11=0$)

4 Составить уравнение плоскости, проходящей через две прямые:

а) $\dfrac{x-2}{3}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z-3}{-2}$, $\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y-2}{2}=\dfrac{z+3}{-2}$;

б) $\dfrac{x-3}{5}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z-2}{4}$, $\dfrac{x-8}{3}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z-6}{-2}$.

(*Ответ*: а) $6x - 2y - 11z + 10 = 0$; б) $8x - 22y + z - 48 = 0$)

5 Найти точку симметричную точке $P(4; 3; 10)$ относительно прямой $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{4} = \frac{z-3}{5}$. (*Ответ*: (2; 9; 6))

6 Найти проекцию точки $A(4; -3; 1)$ на плоскость $x + 2y - z - 3 = 0$. (*Ответ*: (5; – 1; 0))

7 Найти расстояние от точки $A(7; 9; 7)$ до прямой $\frac{x-2}{4} = \frac{y-1}{3} = \frac{z}{2}$. (*Ответ*: $d = 14$)

8 Найти каноническое уравнение проекции прямой $\frac{x}{4} = \frac{y-4}{3} = \frac{z+1}{-2}$ на плоскость $x - y + 3z + 8 = 0$. (*Ответ*: $\frac{x-0{,}8}{7} = \frac{y-4{,}6}{4} = \frac{z+1{,}4}{-1}$)

Список используемой литературы

1 Гурский Е.И. Основы линейной алгебры и аналитической геометрии / – 2-е изд. доп. – Минск: Выш. шк., 1982. – 272 с.

2 Гусак А.А. Справочное пособие по решению задач: аналитическая геометрия и линейная алгебра. – Минск: ТетраСистемс, 1998. – 228 с.

3 Письменный Д.Т. Конспект лекций по высшей математике: полный курс / – 9-е изд. – М.: Айрис-пресс, 2009.

4 Сборник задач по линейной алгебре и аналитической геометрии / под ред. В.Т. Воднева. – Минск: Выш. шк., 1990. – 288 с.

5 Сборник индивидуальных заданий по высшей математике: в 3 ч. Ч. 1 / под ред. А.П. Рябушко. – Минск: Выш. шк., 1990–1991.

Учебное издание

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

Методические указания
к решению задач по теме
«Аналитическая геометрия на плоскости и в пространстве»
для студентов всех форм обучения и специальностей

Составители:
Шендрикова Ольга Александровна
Юрченко Ирина Викторовна

Редактор *А.А. Щербакова*
Технический редактор *Н.Г.Тверская*

Подписано в печать Формат 60×84 1 ⁄ 16.
Бумага офсетная. Гарнитура Таймс. Ризография.
Усл.печ.л. Уч.-изд.
Тираж экз. Заказ .

Учреждение образования
«Могилевский государственный университет продовольствия».
Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя, распространителя печатных изданий № 1/272 от 04.04.2014 г.
Пр-т Шмидта, 3, 212027, Могилев.

Отпечатано в учреждении образования
«Могилевский государственный университет продовольствия».
Пр-т Шмидта, 3, 212027, Могилев.