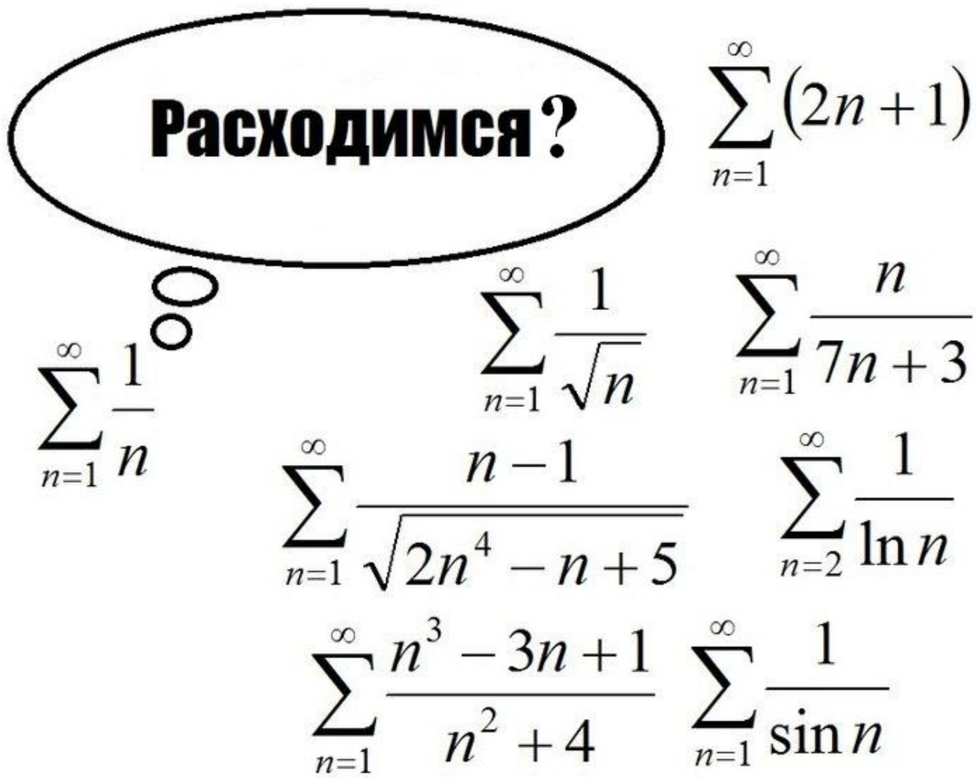
Министерство образования Республики Беларусь

Учреждение образования
«Могилевский государственный университет продовольствия»

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

Методические указания
к решению задач по теме «Числовые ряды»
для студентов всех специальностей и форм получения
высшего образования



Могилёв
МГУП
2017

УДК 517.521
ББК 22.131

Рассмотрено и рекомендовано к изданию на заседании кафедры высшей математики
Протокол № 10 от 11.02.2017 г.

Составители:
к. ф.-м. н., доцент Гарист В. Э.
ст. преподаватель Гребенцов Ю. М.

Рецензент
к.ф.-м. н., доцент Подолян С. В.

УДК 517.521
ББК 22.131

Содержание

Еще ученым Древней Греции (Евдокс, Евклид, Архимед) было известно понятие бесконечных сумм. Нахождение бесконечных сумм являлось составной частью так называемого метода исчерпывания, широко используемого древнегреческими учеными для нахождения площадей фигур, объемов тел, длин кривых и т.д. Так, например, Архимед для вычисления площади параболического сегмента (то есть плоской фигуры, ограниченной прямой и параболой) нашел сумму бесконечной геометрической прогрессии со знаменателем 1/4.

Ряд как самостоятельное понятие математики стали использовать в XVII в. И. Ньютон и Г. Лейбниц применяли ряды для решения алгебраических и дифференциальных уравнений. Теория рядов в XVIII–XIX вв. развивалась в работах Я. и И. Бернулли, Б. Тейлора, К. Маклорена, Л. Эйлера, Ж. Даламбера, Ж. Лагранжа и др. Строгая теория рядов была создана в XIX в. на основе понятия предела в трудах К. Гаусса, Б. Больцано, О. Коши, П. Дирихле, Н. Абеля, К. Вейерштрасса, Б. Римана и др.

Итак, раздел математики, позволяющий решить любую корректно поставленную задачу с достаточной для практического использования точностью, называется теорией рядов.

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

1 Понятие числового ряда и его суммы

Пусть задана бесконечная числовая последовательность

$$a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n,\ \ldots.$$

Определение 1. ***Числовым рядом*** или просто ***рядом*** называется выражение (сумма) вида

$$a_1 + a_2 + \ldots. + a_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n\ . \tag{1.1}$$

Числа $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ называются ***членами ряда***, a_n – ***общим*** или n-м членом ряда.

Чтобы задать ряд (1.1), достаточно задать функцию натурального аргумента $a_n = f(n)$ вычисления n-го члена ряда по его номеру n ($n = 1,2,\ldots$).

Из членов ряда (1.1) образуем числовую ***последовательность частичных сумм*** $S_1, S_2, \ldots, S_n, \ldots$, где $S_n = a_1 + a_2 \ldots + a_n$ – сумма n первых членов ряда, которая называется n-й ***частичной суммой***, т.е.

$$\begin{aligned} &S_1 = a_1, \\ &S_2 = a_1 + a_2 = S_1 + a_2, \\ &S_3 = a_1 + a_2 + a_3 = S_2 + a_3, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n = S_{n-1} + a_n, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned} \tag{1.2}$$

Числовая последовательность $S_1, S_2, ..., S_n, ...$ при неограниченном возрастании номера n может:

1) иметь конечный предел;

2) не иметь конечного предела (предел не существует или равен бесконечности).

Определение 2. Ряд (1.1) называется ***сходящимся***, если последовательность его частичных сумм (1.2) имеет конечный предел, т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$.

В этом случае число S называется ***суммой*** ряда (1.1) и обозначается

$$a_1 + a_2 + ... + a_n + ... = S\,.$$

Определение 3. Ряд (1.1) называется ***расходящимся***, если последовательность его частичных сумм не имеет конечного предела.

Расходящемуся ряду не приписывают никакой суммы.

Таким образом, задача нахождения суммы сходящегося ряда (1.1) равносильна вычислению предела последовательности его частичных сумм.

2 Основные свойства числовых рядов

Свойства суммы конечного числа слагаемых отличаются от свойств ряда, то есть суммы бесконечного числа слагаемых. Так, в случае конечного числа слагаемых, их можно группировать в каком угодно порядке, от этого сумма не изменится. Существуют сходящиеся ряды (условно сходящиеся), для которых, как показал Риман Георг Фридрих Бернхард, меняя надлежащим образом порядок следования их членов, можно сделать сумму ряда равной какому угодно числу и даже расходящийся ряд.

Пример 1. Рассмотрим расходящийся ряд вида

$$1-1+1-1+...+(-1)^{n-1}+....$$

Сгруппировав его члены попарно, получим сходящийся числовой ряд с суммой, равной нулю:

$$(1-1)+(1-1)+...+(1-1)+...=0+0+...+0+...=0.$$

С другой стороны, сгруппировав его члены попарно, начиная со второго члена, получим также сходящийся ряд, но уже с суммой, равной единице:

$$1+(-1+1)+(-1+1)+...+...=1+0+0+...=1.$$

Сходящиеся ряды обладают некоторыми свойствами, которые позволяют действовать с ними, как с конечными суммами. Так, их можно умножать на числа, почленно складывать и вычитать. У них можно объединять в группы любые рядом стоящие слагаемые.

Теорема 1. (Необходимый признак сходимости ряда). *Если ряд (1.1) сходится, то его общий член* a_n *стремится к нулю при неограниченном возрастании* n*, т.е.*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0. \tag{1.3}$$

Условие (1.3) является необходимым, но не является достаточным условием для сходимости ряда. То есть, если общий член ряда стремится к нулю при $n\to\infty$, то это не значит, что ряд сходится.

Следствие. (Достаточный признак ***расходимости*** ряда).

Если общий член ряда a_n *не стремится к нулю при* $n\to\infty$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$, *то этот ряд расходится.*

Свойство 1. Сходимость или расходимость ряда не изменится, если произвольным образом удалить из него, добавить к нему, переставить в нем конечное число членов (при этом для сходящегося ряда его сумма может измениться).

Свойство 2. Сходящийся ряд можно умножать на число, т.е., если ряд (1.1) сходится, имеет сумму S и c – некоторое число, то

$$ca_1 + ca_2 + ... + ca_n + ... = c(a_1 + a_2 + ... + a_n + ...) = c\cdot S.$$

Свойство 3. Сходящиеся ряды можно почленно складывать и вычитать, т.е. если ряды

$a_1 + a_2 + ... + a_n + ... = S_1$, $b_1 + b_2 + ... + b_n + ... = S_2$ сходятся, то и ряд

$$(a_1 \pm b_2) + (a_2 \pm b_2) + ... + (a_n \pm b_n) + ...$$

сходится и его сумма равна $S_1 \pm S_2$, т.е.

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n \pm b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \pm \sum_{n=1}^{\infty} b_n = S_1 \pm S_2.$$

3 Достаточные признаки сходимости

3.1 Признак сравнения

Пусть даны два ряда с неотрицательными членами

$$a_1 + a_2 + ... + a_n + ... = \sum_{n=1}^{\infty} a_n, \tag{1.4}$$

$$b_1 + b_2 + ... + b_n + ... = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \tag{1.5}$$

и выполняется неравенство $0 \le b_n \le a_n$ для всех $n = 1,2,\mathbf{K}$

Тогда:
1) из сходимости ряда (1.4) следует сходимость ряда (1.5);
2) из расходимости ряда (1.5) следует расходимость ряда (1.4).

3.2 Признак сравнения в предельной форме

Пусть даны два ряда с положительными членами $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$. Если для членов этих рядов существует $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = c$ ($c \neq 0$, и $c \neq \infty$), то ряды $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ ведут одинаково, то есть сходятся или расходятся одновременно.

Замечание. При применении признаков сравнения в качестве рядов, используемых для сравнения, выбирают, как правило, ряды:

1) ***геометрический ряд*** $\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1}$ ($a \neq 0$), который сходится при $|q| < 1$ и расходится при $|q| \geq 1$;
2) ***обобщенный гармонический ряд*** (ряд Дирихле) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$, который сходится при $p > 1$ и расходится при $p \leq 1$. (в случае $p = 1$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ называется ***гармоническим***).

3.3 Признак Даламбера

Пусть дан ряд с положительными членами $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и существует предел

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = q.$$

Тогда:
1) при $q < 1$ ряд сходится;
2) при $q > 1$ ряд расходится;
3) при $q = 1$ о сходимости ряда ничего сказать нельзя, необходимы дополнительные исследования.

3.4 Радикальный признак Коши

Пусть дан ряд с положительными членами $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и существует предел

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = q.$$

Тогда:
1) при $q < 1$ ряд сходится;
2) при $q > 1$ ряд расходится;

3) при $q = 1$ о сходимости ряда ничего сказать нельзя, необходимы дополнительные исследования.

3.5 Интегральный признак Коши – Маклорена

Если неотрицательная интегрируемая функция $f(x)$ на промежутке $[1;+\infty)$ монотонно убывает и члены ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ имеют вид $a_n = f(n)$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и несобственный интеграл $\int\limits_{1}^{+\infty} f(x)dx$ сходятся или расходятся одновременно, причем в случае сходимости

$$\int\limits_{1}^{+\infty} f(x)dx \le \sum_{n=1}^{\infty} a_n \le \int\limits_{1}^{\infty} f(x)dx + a_1 .$$

4 Знакопеременные ряды. Абсолютная и условная сходимость

Определение 4. Числовые ряды, содержащие как положительные, так и отрицательные члены, называются ***знакопеременными***.

Примеры знакопеременных рядов:

1) $1-1-1+1+1-1-1+\ldots+(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}+\ldots=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$.

2) $\sin\alpha+\dfrac{\sin 2\alpha}{2}+\ldots+\dfrac{\sin(n\alpha)}{n}+\ldots=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin(n\alpha)}{n},\ \alpha\ne\dfrac{\pi}{2}k,\ k=1,2,\ldots$.

Теорема 2. *Если сходится ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|$, *то сходится и ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

Замечание. В теореме 2 сформулирован ***достаточный*** признак сходимости знакопеременного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

Определение 5. Если сходится ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *называется* ***абсолютно сходящимся***. Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|$ расходится, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ называется ***условно сходящимся***.

5 Знакочередующиеся ряды

Определение 6. Знакопеременный ряд вида

$$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \ldots + (-1)^{n-1} a_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n, \text{ где } a_n > 0, \qquad (1.6)$$

у которого все члены поочередно меняют знак, называется ***знакочередующимся рядом***.

5.1 Признак Лейбница сходимости знакочередующегося ряда

Теорема 3. Если члены знакочередующегося ряда (1.6) удовлетворяют условиям:

1) $a_1 \ge a_2 \ge \ldots a_n \ge a_{n+1} \ge \ldots$, $n = 1, 2, \ldots$;
2) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$,

то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$ сходится, а его сумма S не превосходит первого члена, то есть $S \le a_1$.

ПРАКТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

Задание 1. Записать три первых члена для каждого ряда:

1.1 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$; 1.2 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+3}}{(2n-1)!}$; 1.3 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 3^n \cdot (n-1)!$;

1.4 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sqrt{5n}$; 1.5 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln \frac{2n-1}{n}$; 1.6 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n+1}}{n!}$;

1.7 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{4-n}{1-n^3-n^2}$; 1.8 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2+(-1)^{n-1}}{n}$; 1.9 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sqrt{n} \cdot \sin \frac{\pi}{n}$;

1.10 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{10^n-2}$; 1.11 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{2n-1}\right)^n$; 1.12 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{2^n}$;

1.13 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5^n+6}$; 1.14 $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \ln^2 n}$; 1.15 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}$;

1.16 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{\sqrt{n^3+3n-14}}$; 1.17 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \cdot n}{\ln(n+1)}$; 1.18 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(n-1)!}$.

Задание 2. Для каждого ряда записать формулу общего члена:

2.1 $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots$; 2.2 $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots$; 2.3 $\frac{1}{2}-\frac{1}{6}+\frac{1}{24}-\ldots$;

2.4 $\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+\ldots$; 2.5 $\frac{2}{3}+\frac{3}{5}+\frac{4}{7}+\ldots$; 2.6 $-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{4}}+\ldots$;

2.7 $\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}+\frac{1}{3\cdot 4\cdot 5}+\ldots$; 2.8 $\frac{2}{1}+\frac{4}{2}+\frac{8}{6}+\ldots$; 2.9 $1-\frac{2}{\sqrt[3]{2}}+\frac{6}{\sqrt[3]{3}}-\ldots$.

Задание 3. Для каждого ряда:

а) написать формулу частичной суммы S_n;

б) найти $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ и сделать вывод о сходимости или расходимости ряда.

3.1 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{4}{(n+1)(n+3)}$; 3.2 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(2n-1)$; 3.3 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot 2n$;

3.4 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}2^{n-1}$; 3.5 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2}{3\cdot 2^{n-1}}$; 3.6 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$;

3.7 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$; 3.8 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2}{3^n}$; 3.9 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}$;

3.10 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)(n+2)}$; 3.11 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{5^n+2^n}{10^n}$; 3.12 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$;

3.13 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{7\cdot 2^{n+3}-4(-1)^n\cdot 3^{n-1}}{5^{n+1}}$; 3.14 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln\left(\frac{2n-1}{n}\right)$; 3.15 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3}{7^n}$;

3.16 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{6}{9n^2+21n-8}$; 3.17 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{7n-4}{n^3+n^2-2n}$; 3.18 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{3^{n+2}}$.

Пример 1. Для ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$:

а) написать формулу частичной суммы S_n;

б) найти $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ и сделать вывод о сходимости или расходимости ряда.

Решение. Представим общий член ряда $a_n=\frac{1}{n(n+1)}$ в виде суммы простейших дробей:

$$\frac{1}{n(n+1)}=\frac{A}{n}+\frac{B}{n+1}.$$

Приведя правую часть полученного равенства к общему знаменателю, придем к тождеству

$$1\equiv An+A+Bn=(A+B)n+A\ .$$

Приравняв коэффициенты при одинаковых степенях n в левой и правой частях тождества, получим систему уравнений

$$\begin{cases} A+B=0, \\ A=1. \end{cases}$$

Решая её находим, что $A=1,\ B=-1.$

Таким образом

$$a_n=\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}+\frac{-1}{n+1}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}.$$

Запишем частичную сумму ряда с учетом полученной новой формулы общего члена ряда:

$$S_n=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\mathbf{K}+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\mathbf{K}+$$
$$+\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}=1+0+0+\mathbf{K}+0-\frac{1}{n+1}=1-\frac{1}{n+1}.$$

Отсюда $S_n=1-\dfrac{1}{n+1}$.

Тогда $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{n+1}\right)=1$. Так как предел существует и конечен, то ряд сходится.

Ответ: $S_n=1-\dfrac{1}{n+1}$; $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=1$; ряд сходится.

Задание 4. Проверить, выполняется ли необходимый признак сходимости ряда и сделать вывод:

4.1 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n+2}{2n-3}$;

4.2 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^2+1}{(n+2)^3}$;

4.3 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{5^n}{n+1}$;

4.4 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\mathrm{arctg}\dfrac{n^2+1}{n+3}$;

4.5 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1+\dfrac{3}{n}\right)^n$;

4.6 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin\dfrac{3}{n}$;

4.7 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n^3+4n}{3n^3+4n^2-7}$; 4.8 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3}{(n+5)!}$; 4.9 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n-1}{2n+5}\right)^{n-2}$;

4.10 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt[3]{4n^7+5n^3-4}}{9n^2-n+12}$; 4.11 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}5^n\cdot\sin\frac{8}{3^n}$; 4.12 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\cdot n}{\ln(n+1)}$;

4.13 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2+(-1)^n)^n}$; 4.14 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1-\cos\left(\frac{1}{n}\right)}{\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)}$; 4.15 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n+7}{3n-5}\right)^{9n+1}$;

4.16 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3\sin^2\left(\frac{5}{n}\right)}{4\arcsin^2\left(\frac{3}{n+1}\right)}$; 4.17 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt[4]{n^8-3n^3}}{n+1}$; 4.18 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{3n^3}$.

Пример 2. Проверить, выполняется ли необходимый признак сходимости ряда и сделать вывод:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{5}{n}\right)^{2n}.$$

Решение. В нашем случае общий член ряда имеет вид $a_n=\left(1+\frac{5}{n}\right)^{2n}$.

Найдем предел общего члена ряда a_n при $n\to\infty$, для этого воспользуемся вторым замечательным пределом:

$$\lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{5}{n}\right)^{2n}=(1^{\infty})=\lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{5}{n}\right)^{\frac{n}{5}\cdot\frac{5}{n}\cdot 2n}=e^{\lim\limits_{m\to\infty}\frac{10n}{n}}=e^{10}\neq 0.$$

Так как предел общего члена ряда не равен нулю, то есть $\lim\limits_{n\to\infty}a_n\neq 0$ (**теорема 1, следствие**), необходимый признак сходимости не выполнен. Следовательно, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{5}{n}\right)^{2n}$ расходится.

Ответ: $\lim\limits_{m\to\infty}\left(1+\frac{5}{n}\right)^{2n}=e^{10}\neq 0$, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{5}{n}\right)^{2n}$ расходится.

Задание 5. Используя признаки сравнения, исследовать ряд на сходимость. Указать общий член ряда, с которым сравнивается данный ряд.

5.1 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{5^n+6}$; 5.2 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(4n+3)^2+6}$; 5.3 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{n^3}$;

5.4 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{n+3}}$; 5.5 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+n}$; 5.6 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{9n+7}{2n^3+5n^2-4}$;

5.7 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+2}{n\sqrt[3]{n}}$; 5.8 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\cdot 5^n}$; 5.8 $\sum_{n=1}^{\infty}n^5\cdot \operatorname{tg}^3\frac{2}{n^2}$;

5.9 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+5}{n^2-2}$; 5.10 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3+\sin n}{n^2}$; 5.11 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\sqrt{n}+2}{\sqrt{n^6+2n-2}}$;

5.13 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5n^2-3}{\sqrt[3]{7n^{10}+2n^3-4}}$; 5.14 $\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt{2n+3}-\sqrt{2n-1})$; 5.15 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\arcsin\frac{7n-1}{9n}}{\sqrt[6]{4n^2-3}}$;

5.16* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin\left(\frac{2+(-1)^n}{6}\cdot\pi\right)$; 5.17 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\cos\frac{7}{n}\right)$; 5.18 $\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(\frac{n^3+7}{n^3+5}\right)$.

Пример 3. Используя признаки сравнения, исследовать ряд на сходимость. Указать общий член ряда, с которым сравнивается данный ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2+\cos n}{n}.$$

Решение. Для исследования данного ряда воспользуемся первым признаком сравнения (**пункт 3.1**). Так как $\cos n \geq -1$, то $2+\cos n \geq -1$, откуда $\frac{2+\cos n}{n}\geq\frac{1}{n}$. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ – расходящийся гармонический ряд, следовательно, по первому признаку сравнения расходится и заданный ряд. То есть ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2+\cos n}{n}$ расходится.

Ответ: ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2+\cos n}{n}$ расходится.

Задание 6. Исследовать ряд на сходимость, применяя признак Даламбера:

6.1 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n+2}{n!}$;

6.2 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2^n}{5^n\ (2n-1)}$;

6.3 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n\sin\dfrac{2\pi}{3^n}$;

6.4 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{3\cdot 5\cdot 7\cdot \mathbf{K}\cdot(2n+1)}{2\cdot 5\cdot 8\cdot \mathbf{K}\cdot(3n-1)}$;

6.5 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2n!}{3^n}$;

6.6 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{9}{10}\right)^n\cdot n^7$;

6.7 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left((2n+1)\cdot \operatorname{tg}\dfrac{\pi}{3^n}\right)$;

6.8 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^n}{n!\cdot 2^n}$;

6.9 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sqrt{4n+5}}{(3n-2)!}$;

6.10 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(2n+5)!}{4^{3n+2}}$;

6.11 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{6^{2n+5}(3n^2-1)}{(n+3)!}$;

6.12 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{3^n(n+2)!}{n^5}$;

6.13 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{3^{2n+1}-4}{2^{5n}(n+1)!}$;

6.14 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(n!)^2}{2^{n^2}}$;

6.15 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(4n-1)\arcsin\dfrac{2}{3^n}}{n}$;

6.16 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1\cdot 4\cdot \mathbf{K}\cdot(3n-2)}{n!\cdot 2^n}$;

6.17 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{6n^n}{(n-1)!}$;

6.18 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}5n^2\left(1-\cos\dfrac{7}{3^n}\right)$;

Пример 4. Исследовать ряд на сходимость, применяя признак Даламбера:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n!}.$$

Решение. Для исследования данного ряда воспользуемся признаком Даламбера (**пункт 3.3**). Найдем $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$. В нашем случае $a_n=\dfrac{2^n}{n!}$, $a_{n+1}=\dfrac{2^{n+1}}{(n+1)!}=$

$=\dfrac{2^n\cdot 2}{n!\cdot(n+1)}$. Тогда

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2^n\cdot 2}{n!\cdot(n+1)}\cdot\frac{n!}{2^n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{\infty}=0.$$

Так как $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=0<1$, то в соответствии с признаком Даламбера ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2^n}{n!}$ сходится.

Ответ: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=0<1$, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2^n}{n!}$ сходится.

Задание 7. Исследовать ряд на сходимость, применяя радикальный признак Коши:

7.1 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{4n}\right)^{3n}$; 7.2 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n^2-n-1}{7n^2+3n+4}\right)^{n}$; 7.3 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\arcsin\frac{n+3}{2n+5}\right)^{n}$;

7.4 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n^2+1}{5n^2}\right)^{2n}$; 7.5 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(tg\frac{\pi}{2n+1}\right)^{n}$; 7.6 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{10^n}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n}}$;

7.7 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n-1}{3n+4}\right)^{n^2}$; 7.8 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n^2+4n-7}{6n^2-5n+1}\right)^{n^2}$; 7.9 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n^2-1}{2n^2-3}\right)^{n^2}$;

7.10 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(5n+4)^n}{7^{2n}\cdot n^n}$; 7.11 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\sin\frac{4}{n^2+2n}\right)^{\frac{n}{2}}$; 7.12 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{7n+1}{6n+5}\right)^{3n+2}$;

7.13 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{5n-1}{6n+7}\right)^{(n+1)^2}$; 7.14 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3}{5^n}\cdot\left(\frac{3n+2}{3n-7}\right)^{n^2}$; 7.15 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2}{\ln^n(n+1)}$;

7.16 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n+1}{2n-5}\right)^{3n^2+2}$; 7.17 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\cos\frac{3}{n}\right)^{-2n}$; 7.18 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(3n^2+7)\cdot 5^{2n-1}}{4^n}$;

Пример 5. Исследовать ряд на сходимость, применяя радикальный признак Коши:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n-4}{4n}\right)^{2n}.$$

Решение. Для исследования данного ряда воспользуемся радикальным признаком Коши (**пункт 3.4**). Найдем $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}$. В нашем случае $a_n=\left(\frac{3n-4}{4n}\right)^{2n}$.

Тогда

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{3n-4}{4n}\right)^{2n}}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n-4}{4n}\right)^{\frac{2n}{n}}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n-4}{4n}\right)^{2}=\lim_{n\to\infty}\frac{(3n-4)^2}{(4n)^2}=$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{9n^2 - 24n + 16}{16n^2} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{9n^2}{n^2} - \frac{24n}{n^2} + \frac{16}{n^2}}{\frac{16n^2}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{9 - \frac{24}{n} + \frac{16}{n^2}}{16} = \left[\begin{array}{l} \frac{24}{n}, \frac{16}{n^2} \to 0, \\ \text{при}\, n \to \infty \end{array}\right] =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{9}{16} = \frac{9}{16} < 1.$$

Так как $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \dfrac{9}{16} < 1$, то в соответствии с радикальным признаком Коши ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{3n-4}{4n}\right)^{2n}$ сходится.

Ответ: $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \dfrac{9}{16} < 1$, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{3n-4}{4n}\right)^{2n}$ сходится.

Задание 8. Исследовать ряд на сходимость, применяя интегральный признак Коши:

8.1 $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{\ln n}{n}$; 8.2 $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{(2n+1) \cdot \ln(2n+1)}$; 8.3 $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{n \cdot \sqrt[5]{\ln n}}$;

8.4 $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{(n+1) \cdot \ln^2(n+1)}$; 8.5 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\operatorname{arctg} n}{1+n^2}$; 8.6 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{\sqrt[4]{(5n+6)^3}}$;

8.7 $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{1 + \ln 2n}{2n}$; 8.8* $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{n \ln n (\ln \ln n)^2}$; 8.9 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{(n+1) \cdot \sqrt{n}}$.

Пример 6. Исследовать ряд на сходимость, применяя интегральный признак Коши:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}.$$

Решение. Для исследования данного ряда воспользуемся интегральным признаком Коши (**пункт 3.5**). Так как $a_n = \dfrac{1}{n \ln n}$, то $f(x) = \dfrac{1}{x \ln x}$. Проверим применимость интегрального признака Коши. Очевидно, что функция $f(x)$ непрерывна и принимает только положительные значения на промежутке $(2, +\infty)$. Убедимся, что $f(x)$ монотонно убывает на этом промежутке.

Пусть $(2 < x_1 < x_2)$. Тогда $\ln x_1 < \ln x_2$ и $x_1 \ln x_1 < x_2 \ln x_2$, откуда $f(x_1) = \dfrac{1}{x_1 \ln x_1} > \dfrac{1}{x_2 \ln x_2} = f(x_2)$.

Итак, функция $f(x)$ положительна, непрерывна и монотонно убывает на промежутке $(2, +\infty)$, значит, для исследования данного ряда на сходимость можно применять интегральный признак Коши.

Вычислим несобственный интеграл $\int\limits_2^{+\infty} f(x)dx$:

$$\int\limits_2^{+\infty} f(x)dx = \int\limits_2^{+\infty} \frac{1}{x \ln x} dx = \lim_{b \to \infty} \int\limits_2^{b} \frac{1}{x \ln x} dx = \lim_{b \to \infty} \left(\ln \ln x \Big|_2^b \right) = \lim_{b \to \infty} \left(\ln \ln b - \ln \ln 2 \right) = +\infty .$$

Таким образом, так как несобственный интеграл $\int\limits_2^{+\infty} \dfrac{1}{x \ln x} dx$ расходится, то расходится и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n \ln n}$.

Ответ: ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n \ln n}$ расходится.

Задание 9. Исследовать ряды на абсолютную и условную сходимость:

9.1 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n n}{(2n-1)5^n}$;

9.2 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n 2^n}{5^n \sqrt{n^3+2}}$;

9.3 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}(4n-1)}{n^2+3n}$;

9.4 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}(5n-4)}{\sqrt{2n^3-1}}$;

9.5 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n+1}\sqrt{n^2+1}}$;

9.6 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \left(\dfrac{3n+1}{4n+7} \right)^{2n}$;

9.7 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{(2n+1)!}$;

9.8 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n (3n-2)}{(n+1)^2 2^{n+1}}$;

9.9 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}}{2n - \ln n}$;

9.10 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \dfrac{3n-2}{2n+1}$;

9.11 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{4^n (2n^2+n)}$;

9.12 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}}{(n+1)\sqrt{n}}$;

9.13 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin n\pi}{n^2}$;

9.14 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n 3^n \left(\dfrac{n}{n+1} \right)^{n^2}$;

9.15 $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}}{n \cdot \sqrt[3]{\ln n}}$;

9.16* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{(n+1)\sqrt{\ln(n+1)}}$;

9.17** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \dfrac{2^{n^2}}{n!}$;

9.18** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n+1} \cdot 7^n \cdot n^4}{n!}$;

Пример 7. Исследовать ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}$ на абсолютную и условную сходимость.

Решение. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|=\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(-1)^{n-1}}{n}\right|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ – расходящийся гармонический. Значит, абсолютной сходимости нет.

Исследуем исходный ряд на условную сходимость с помощью признака Лейбница (**пункт 5.1**): так как

1) $\frac{1}{n}\geq\frac{1}{n+1}$, для $n=1,2,\ldots$;

2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$, то данный ряд сходится по признаку Лейбница.

Таким образом, ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}$ сходится условно.

Ответ: ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}$ сходится условно.

Список использованных источников

1 Лунгу, К.Н. Сборник задач по высшей математике. 2 курс / К.Н. Лунгу, В.П. Норин, Д.Т. Письменный, Ю.А. Шевченко; под ред. С.Н. Федина. – 3-е изд., испр. – М.: Айрис-пресс, 2005. – 592 с.

2 Письменный, Д.Т. Конспект лекций по высшей математике : полный курс / Д.Т. Письменный. – 4-е изд. – М.: Айрис-пресс, 2006. – 608 с.

3 Индивидуальные задания по высшей математике : учеб. пособие. В 4 ч. / А.П. Рябушко [и др.]; под общ. ред. А.П. Рябушко. – 5-е изд., испр. – Минск: Выш. шк., 2009. – Ч. 3. Ряды. Кратные и криволинейные интегралы. Элементы теории поля. – 367 с.

4 Сборник типовых расчетов по высшей математике: учеб. пособие. Ч. 1. – 5-е изд. доп. / Под ред. засл. раб. ВШ РФ, д.ф.-м.н., проф. В.Б. Миносцева. – М.: МГИУ, 2007. – 548 с.

Учебное издание

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

Методические указания

Составители:
Гарист Владислав Эдуардович
Гребенцов Юрий Михайлович

Редактор *А. А. Щербакова*
Технический редактор *Н. Г. Тверская*

Подписано в печать 22.03.2017. Формат 60×84 1/16.
Бумага офсетная. Гарнитура Times New Roman. Ризография.
Уч.-изд. л. 0,9. Усл. печ. л. 1,16.
Тираж 56 экз. Заказ 47.

Учреждение образования
«Могилевский государственный университет продовольствия».
Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя,
распространителя печатных изданий № 1/272 от 04.04.2014.
Пр-т Шмидта, 3, 212027, Могилев.

Отпечатано в учреждении образования
«Могилевский государственный университет продовольствия».
Пр-т Шмидта, 3, 212027, Могилев.