Министерство образования республики Беларусь

Учреждение образования
«Могилевский государственный университет продовольствия»

Кафедра высшей математики

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

Методические указания
для подготовки к аудиторной контрольной работе
студентов заочной формы получения высшего образования
по учебной дисциплине «Высшая математика»

В трех частях

Часть 2

Могилев
2014

УДК 519.21
ББК 22.1

Рассмотрено и рекомендовано к изданию
на заседании кафедры высшей математики
Протокол № 4 от 20. 11. 2014.

Составители:
к.ф.-м. н., доцент В. Э. Гарист
старший преподаватель Л. И. Рыдевская
ассистент Ю. М. Гребенцов

Рецензент
д.ф.-м. н., доцент А. М. Гальмак

УДК 51
ББК 22.1

Тема 1. Обыкновенные дифференциальные уравнения

1 Уметь определять порядок дифференциального уравнения.
2 Знать определение общего и частного решения дифференциального уравнения.
3 Знать определение дифференциального уравнения 1-го порядка с разделяющимися переменными, однородного, линейного и уметь решать их.
4 Знать определение общего решения линейного однородного дифференциального уравнения (ЛОДУ) 2-го порядка с постоянными коэффициентами.
5 Определять вид частного решения линейного неоднородного дифференциального уравнения 2-го порядка с постоянными коэффициентами и правой частью специального вида.

Задания для самостоятельного выполнения

1 Определить порядок дифференциального уравнения:
а) $y' + yx^2 = \frac{1}{x}$;
б) $y'' + y'cosx + ysinx = 0$;
в) $y''' - 5y'' + 6y' + y = 0$;
г) $y^V + y^{IV} - y = 0$.
2 Показать, что функция $y = Cx^3$ есть общее решение дифференциального уравнения $xy' - 3y = 0$. Найти частное решение, удовлетворяющее условию $y(1) = 1$.
3 Решить дифференциальные уравнения:
а) $y' = y^2cosx$;
б) $y' = \frac{y}{x} + sin\frac{y}{x}$;
в) $y' + ytgx = \frac{1}{cosx}$.
4 Найти общее решение ЛОДУ второго порядка с постоянными коэффициентами:
а) $y'' - 4y' + 3y = 0$;
б) $y'' + 8y' + 16y = 0$;
в) $y'' - 4y' + 13y = 0$.
5 Указать вид частного решения данного линейного неоднородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами и специальной правой частью:
а) $y'' - 8y' + 16y = (1 - x)e^{4x}$; б) $y'' - 5y' + 6y = 13sin3x$;
в) $y'' - y = e^{-x}$; г) $y'' - 7y' = (x - 1)^2$;
д) $y'' + 3y' - 4y = e^{-4x} + xe^{-x}$.

Образцы решения заданий

Задание 1

Найти общий интеграл дифференциального уравнения первого порядка

$$3x\,dx - y\,dy = 5xy\,dy - 2xy\,dx$$

Решение. Преобразуем данное уравнение. Слагаемые с множителем *dx* перенесем в левую часть равенства, а слагаемые с *dy* – в правую часть. Имеем:

$$3x\,dx + 2xydx = 5xydy + ydy.$$

Вынесем общие множители за скобки:

$$x(3+2y)dx = y(5x+1)dy.$$

Это уравнение с разделяющимися переменными. Разделим переменные:

$$\frac{x\,dx}{5x+1} = \frac{y\,dy}{3+2y}.$$

Интегрируем обе части последнего равенства:

$$\int \frac{xdx}{5x+1} = \int \frac{ydy}{3+2y},$$

$$\frac{1}{5}\int \frac{(5x+1)-1}{5x+1}dx = \frac{1}{2}\int \frac{(3+2y)-3}{3+2y}dy,$$

$$\frac{1}{5}\int\left(1-\frac{1}{5x+1}\right)dx = \frac{1}{2}\int\left(1-\frac{3}{3+2y}\right)dy,$$

$$\frac{1}{5}\left(x-\frac{1}{5}\ln|5x+1|\right)+C = \frac{1}{2}\left(y-\frac{3}{2}\ln|3+2y|\right).$$

Следовательно, общим интегралом исходного уравнения является

$$\frac{1}{5}\left(x-\frac{1}{5}\ln|5x+1|\right)+C = \frac{1}{2}\left(y-\frac{3}{2}\ln|3+2y|\right).$$

Задание 2

Найти общее решение линейного дифференциального уравнения первого порядка

$$y' + \frac{y}{x} = \frac{\sin x}{x}.$$

Решение. Так как уравнение линейное, то решаем его с помощью подстановки Бернулли:

$$y = u \cdot v, \text{ где } u = u(x),\ v = v(x).$$

Имеем: $y' = u'v + uv'$. Подставив в исходное уравнение выражения для y и y', получим уравнение

$$u'v + uv' + \frac{uv}{x} = \frac{\sin x}{x},$$

которое преобразуем к виду

$$\left(v' + \frac{v}{x}\right)u + u'v = \frac{\sin x}{x}.$$

Так как только произведение $u \cdot v$ должно удовлетворять исходному уравнению, то одну из неизвестных функций, например v, можно выбрать произвольно. Выбираем в качестве v любое частное решение $v = v(x)$ уравнения $v' + \frac{v}{x} = 0$.

Тогда $\frac{dv}{dx} = -\frac{v}{x}$. Разделим переменные, имеем:

$$\frac{dv}{v} = -\frac{dx}{x}.$$

Интегрируя, получим:

$$\int \frac{dv}{v} = -\int \frac{dx}{x},\ \ln|v| = -\ln|x| + \ln C_1.$$

Полагая $C_1 = 1$, выбираем частное решение $v = \frac{1}{x}$. Далее найдем общее решение из уравнения $u'v = \frac{\sin x}{x}$, где $v = \frac{1}{x}$. Имеем:

$$u' = \sin x,\ \frac{du}{dx} = \sin x,\ u = \int \sin x\, dx + C = -\cos x + C.$$

Общее решение исходного уравнения

$$y = uv = \frac{1}{x}(-\sin x + C).$$

Задание 3

а) Найти общее решение уравнения

$$xy'' = y' \ln \frac{y'}{x} \qquad (1.\ 1)$$

Решение. Данное уравнение относится к уравнениям вида $F(x,y',y'')=0$. Понизив его порядок с помощью подстановки $y'=P,$ где $P=P(x)$. Тогда $y''=\dfrac{dP}{dx}$. Подставив в уравнение (1. 1) вместо y' и y'' их выражения, получим

$$x\frac{dP}{dx}=P\ln\frac{P}{x} \qquad (1.\ 2)$$

Это однородное уравнение первого порядка относительно функции $P(x)$.
Уравнение (1. 2) решим с помощью подстановки $P=Ux,\quad P'=U'x+U.$
Подставив это в уравнение (1. 2), получим

$$U'x+U=U\ln U$$

$$x\frac{dU}{dx}=U(\ln U-1)$$

Разделив переменные и проинтегрировав, получим

$$\int\frac{dU}{U(\ln U-1)}=\int\frac{dx}{x}$$

$$\ln\left|\ln U-1\right|=\ln x+\ln C,$$

$$\ln U-1=C_1x,\qquad \ln U=C_1x+1,$$

$$U=e^{C_1x+1},\qquad P=xe^{C_1x+1},$$

$$\frac{dy}{dx}=xe^{C_1x+1},\qquad dy=xe^{C_1x+1}dx\,.$$

Проинтегрировав, получим

$$\int dy=\int x\,e^{C_1x+1},$$

$$y=\frac{1}{C_1}x\,e^{C_1x+1}-\frac{1}{C_1^{\,2}}x\,e^{C_1x+1}+C_2.$$

б) Найти общее решение уравнения

$$yy''-(y')^2=y^2y' \quad . \qquad (1.\ 3)$$

Решение. Данное дифференциальное уравнение второго порядка, допускающее понижение порядка, относится к уравнениям вида $F(x,y',y'')=0.$ Порядок такого уравнения понижается подстановкой $y'=P$, где $P=P(y)$. Тогда

$$y''=\frac{dP}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}=P\frac{dP}{dy}.$$

Подставляя вместо y' и y'' их выражения в уравнение (1. 3), получим

$$yP\frac{dP}{dy}-P^{2}=y^{2}P \quad \text{или}$$

$y\dfrac{dP}{dy}-P=y^{2}$ – линейное дифференциальное уравнение первого порядка относительно искомой функции $P(y)$.

Решаем подстановкой $P=U\cdot V$, $P'=U'V+V'U$.

$$y(U'V+V'U)-UV=y^{2},$$

$$y\,U'V+U(V'y-V)=y^{2}\ . \tag{1. 4}$$

Функцию V выберем так, чтобы коэффициент при U был равен нулю.

$$y\frac{dV}{dy}-V=0 \qquad \text{или} \qquad \frac{dV}{V}=\frac{dy}{y}$$

$$\int\frac{dV}{V}=\int\frac{dy}{y}; \qquad \ln V=\ln y, \qquad V=y.$$

Подставляя $V=y$ в уравнение (1. 4), получим

$$y^{2}\frac{dU}{dy}=y^{2}, \quad (y\neq 0)$$

$$\int dU=\int dy, \qquad U=y+C_1\,.$$

Тогда $P=(y+C_1)y$, или

$$\frac{dy}{dx}=y(y+C_1).$$

Разделив переменные и проинтегрировав, получим

$$\int\frac{dy}{y(y+C_1)}=\int dx, \qquad \frac{1}{C_1}\ln\left|\frac{y}{y+C_1}\right|=x+C_2$$

$\ln\dfrac{y}{y+C_1}=C_1(x+C_2)$ – общий интеграл данного уравнения при $P\neq 0$.

Если $P=0$, т.е. $\dfrac{dy}{dx}=0$, то $y=C$.

Ответ: $y=C$, $\ln\dfrac{y}{y+C_1}=C_1(x+C_2)$.

Задание 4. Найти частное решение дифференциального уравнения $y''+4y'+3y=0$, удовлетворяющее начальным условиям $y(0)=1$, $y'(0)=0$.

Решение. Составим и решим характеристическое уравнение

$$\kappa^{2}+4\kappa+3=0$$

$$\kappa_1=-1, \quad \kappa_2=-3.$$

Так как корни характеристического уравнения действительные и разные, то общее решение y имеет вид

$$y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-3x}.$$

Найдем теперь частное решение, удовлетворяющее начальным условиям $y(0)=1,\ y'(0)=0.$ В нашем случае $y' = -C_1 e^{-x} - 3C_2 e^{-3x}$, а $y'(0) = -C_1 e^0 - 3C_2 e^0$ или $-C_1 - 3C_2 = 0$, $y(0) = C_1 e^0 + C_2 e^0$ или $C_1 + C_2 = 1$. Теперь решаем систему уравнений

$$\begin{cases} -C_1 - 3C_2 = 0, \\ C_1 + C_2 = 1. \end{cases} \quad \text{Откуда} \quad C_1 = 3/2;\ C_2 = -1/2..$$

Следовательно, $y = 3/2e^{-x} - 1/2e^{-3x}$ – искомое частное решение.

Задание 5

Найти частное решение дифференциального уравнения $y'' + 4y' + 3y = 9e^{-3x}$, удовлетворяющее начальным условиям $y(0)=1,\ y'(0)=0.$

Решение. Общее решение данного уравнения состоит из суммы общего решения y^* соответствующего однородного уравнения и частного решения $\overline{y}$ неоднородного уравнения, т.е. $y = y^* + \overline{y}$.

Решим сначала однородное уравнение

$$y'' + 4y' + 3y = 0.$$

Составим и решим характеристическое уравнение

$$\kappa^2 + 4\kappa + 3 = 0$$

$$\kappa_1 = -1, \quad \kappa_2 = -3.$$

Так как корни характеристического уравнения действительные и разные, то общее решение y^* будет иметь вид

$$y^* = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-3x}.$$

Частное решение неоднородного уравнения будем искать в виде $\overline{y} = x^r Q_n(x) e^{\alpha x}$.

В нашем случае $\alpha = -3,\ n = 0,\ r = 1,$ так как $\alpha = -3$ встречается один раз среди корней характеристического уравнения.

Итак, $\overline{y} = x \cdot A \cdot e^{-3x}$, где $Q_0(x) = A -$ это многочлен нулевой степени.

(Если $n = 1$, то $Q_1(x) = Ax + B$; при $n = 2$ $Q_2(x) = Ax^2 + Bx + C$ и т.д.).

Чтобы найти коэффициент А, найдем $\overline{y'}, \overline{y''}$ и подставим в первоначальное уравнение.

$$\overline{y'} = Ae^{-3x} - 3Axe^{-3x};$$

$$\overline{y''}=-3Ae^{-3x}-3Ae^{-3x}+9Axe^{-3x}=-6Ae^{-3x}+9Axe^{-3x}.$$

$$-6Ae^{-3x}+9Axe^{-3x}+4Ae^{-3x}-12Axe^{-3x}+3Axe^{-3x}=9e^{-3x}.$$

Приведя подобные и сократив на e^{-3x}, получим

$$-2A=9, \quad \text{откуда} \quad A=-9/2$$

и частное решение имеет вид $\overline{y}=-9/2xe^{-3x}$.

Общее решение данного уравнения:

$$y=C_1e^{-x}+C_2e^{-3x}-9/2xe^{-3x}.$$

Найдем y' и поставим начальные условия, откуда найдем C_1 и C_2.

$$y'=-C_1e^{-x}-3C_2e^{-3x}-9/2e^{-3x}+27/2xe^{-3x}$$

$$\begin{cases} C_1+C_2=1 \\ -C_1-2C_2=9/2, \end{cases} \quad \text{откуда} \quad C_2=-11/2; \quad C_1=13/2.$$

И частное решение будет иметь вид

$$y=13/2e^{-x}-11/2e^{-3x}-9/2xe^{-3x}.$$

Задание 6

Найти частное решение соответствующего однородного уравнения $y''-5y'-6y=3xe^{-x}$, удовлетворяющее заданным начальным условиям $y(0)=1, y'(0)=0$, и указать вид частного решения неоднородного уравнения.

Решение. Сначала найдем общее решение соответствующего однородного уравнения $y''-5y'-6y=0$. Составим характеристическое уравнение

$$k^2-5k-6=0.$$

Это квадратное уравнение имеет корни $k_1=-1$, $k_2=6$. По теореме о структуре общего решения линейного однородного дифференциального уравнения решение запишем в виде

$$y^*(x)=C_1e^{k_1x}+C_2e^{k_2x}.$$

Следовательно, $y^*(x)=C_1e^{-x}+C_2e^{6x}$.

Для нахождения частного решения однородного уравнения найдем производную $(y^*)'=-C_1e^{-x}+6C_2e^{6x}$ и решим систему

$$\begin{cases} y^*(0)=C_1+C_2=1 \\ (y^*)'(0)=-C_1+6C_2=0 \end{cases}, \text{ откуда } C_1=\frac{6}{7}, C_2=\frac{1}{7}.$$

Следовательно, частное решение однородного уравнения имеет вид

$$y^* = \frac{6}{7}e^{-x} + \frac{1}{7}e^{6x}.$$

Теперь укажем вид частного решения заданного в условии неоднородного уравнения.

Правая часть уравнения – функция $f(x) = 3xe^{-x} = P_1(x)e^{\alpha x}$ имеет специальный вид, что позволяет установить вид частного решения. Частное решение для такой правой части ищем в виде $\bar{y}(x) = x^r e^{\alpha x} Q_n(x)$, где по условию $\alpha = -1, n = 1$; r – число корней характеристического уравнения совпадающих с числом $\alpha = -1$. Так как один из корней характеристического уравнения $k_1 = -1$ и совпадает с числом $\alpha = -1$, то частное решение $\bar{y}(x)$ ищем в виде

$$\bar{y}(x) = (Ax + B)e^{-x}x = (Ax^2 + Bx)e^{-x}.$$

Тема 2. Кратные и криволинейные интегралы

1 Знать определение двойного интеграла и его свойства.
2 Уметь вычислять повторный интеграл.
3 Уметь расставлять пределы интегрирования в двойном интеграле.
4 Уметь вычислять площадь фигур с помощью двойного интеграла.
5 Знать определение криволинейного интеграла первого рода и его свойства.
6 Уметь вычислять криволинейный интеграл первого рода.
7 Знать определение криволинейного интеграла второго рода и его свойства.
8 Уметь вычислять криволинейный интеграл второго рода.
9 Знать и уметь применять формулу Грина.

Задания для самостоятельного выполнения

1 Вычислить повторный интеграл:

a) $\int_2^4 dx \int_1^2 xydy$;

b) $\int_1^e dx \int_4^6 \frac{y}{x} dy$;

c) $\int_3^5 dx \int_0^2 (x+y)dy$;

d) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^0 dy \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x+y)\, dx$.

2 Расставить пределы интегрирования в том и другом порядке в повторном интеграле, к которому сводится двойной интеграл $\iint\limits_{(s)} f(x,y)dxdy$, где S ограничена линиями y=x^2, y=4.

3 Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями xy=4, x+y-5=0.

4 Вычислить $\int\limits_{AB}\frac{yds}{\sqrt{x}}$, если AB – дуга полукубической параболы $y^2=(4/9)x^3$ от A (3, $2\sqrt{3}$) до B (4; 2).

5 Вычислить криволинейный интеграл $\int\limits_{\grave{A}\hat{A}}(\tilde{o}^2-\acute{o}^2)dx+xydy$, если путь от A(1; 1) до B (3; 4) – отрезок прямой.

Образцы решения заданий

Задание 1. Расставить пределы интегрирования в двойном интеграле $\iint\limits_D dxdy$ в том и другом порядке, если область D задана линиями $y=x/3,\quad y=\sqrt{x},\quad x=1$ и вычислить площадь этой области.

Решение. Строим область D:

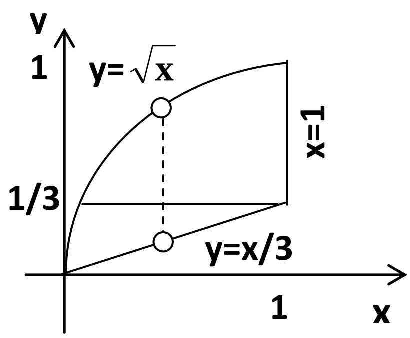


Рисунок 1 – Область D

Площадь плоской области D с помощью двойного интеграла вычисляется по формуле

$$S=\iint\limits_D dxdy\,.$$

Расставим пределы интегрирования в том и другом порядке. Переменная x изменяется от 0 до 1, в это время y изменяется от прямой $y=x/3$ до параболы $y=\sqrt{x}$, так как прямая, параллельная оси ОУ, пересекает сначала прямую $y=x/3$ (нижний предел), а затем параболу $y=\sqrt{x}$ (верхний предел). При изменении порядка интегриования область D придется разбить на две области D_1 и D_2 прямой, параллельной оси Ox, так как правая часть контура области D состоит из двух линий, определяемых разными уравнениями $x=3y$ и $x=1$.
Следовательно,

$$\iint\limits_D dxdy=\int\limits_0^1 dx\int\limits_{x/3}^{\sqrt{x}}dy=\int\limits_0^{1/3}dy\int\limits_{y^2}^{3y}dx+\int\limits_{1/3}^{1}dy\int\limits_{y^2}^{1}dx.$$

$$S=\int_0^1 dx\int_{x/3}^{\sqrt{x}} dy=\int_0^1 (y|_{x/3}^{\sqrt{x}})dx=\int_0^1 (\sqrt{x}-\frac{x}{3})dx=\frac{2\cdot x^{3/2}}{3}\Big|_0^1-\frac{x^2}{6}\Big|_0^1=\frac{2}{3}-\frac{1}{6}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2} \text{ (кв.ед.)}$$

Задание 2. Сделать чертеж области интегрирования. Изменить порядок интегрирования в двойном интеграле $I=\int_0^2 dy\int_{y/2}^{\sqrt{5-y^2}} f(x,y)dx$ и вычислить в одном из случаев двойной интеграл при $f(x,y)=x\cdot y$.

Решение. Зная пределы интегрирования $0\le y\le 2$, $y/2\le x\le\sqrt{5-y^2}$, найдем границы области интегрирования *D*: $y=0$, $y=2$, $x=y/2$, $x=\sqrt{5-y^2}$ и построим их (рисунок 2).

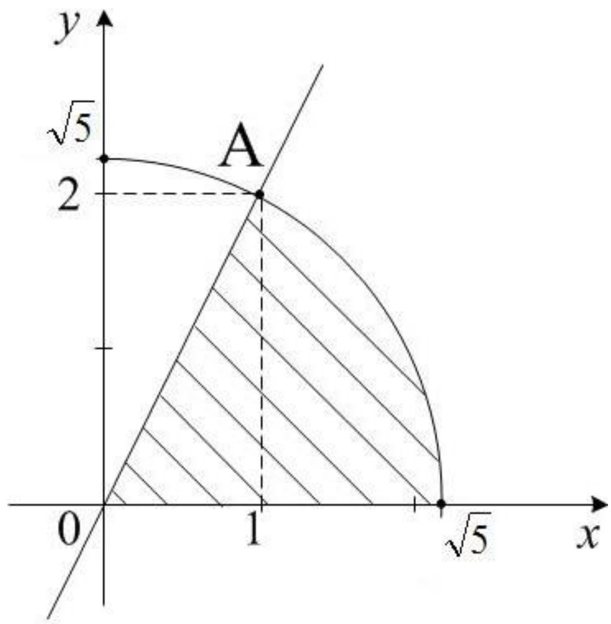


Рисунок 2 – Область интегрирования

Найдем координаты точки *A*, точки пересечения прямой $x=y/2$ и полуокружности $x=\sqrt{5-y^2}$. Так как в точке пересечения ордината $y=2$, то подставив в любое из двух уравнений, найдем $x=1$. Итак, точка *A* имеет координаты *A*(1;2).

Для того чтобы расставить пределы интегрирования в другом порядке, проведем через область *D* прямые, параллельные оси *Oy*. Эти прямые пересекают сначала ось Ox, затем прямую $y = 2x$ или дугу полуокружности $y = \sqrt{5-x^2}$. Следовательно, линией входа будет $y = 0$ $(0 \le x \le \sqrt{5})$, а линиями выхода будут $y = 2x$ $(0 \le x \le 1)$ и $y = \sqrt{5-x^2}$ $(1 \le x \le \sqrt{5})$. Так как линия выхода задается двумя различными аналитическими выражениями, то область D необходимо разбить прямой $x = 1$ на две области, и двойной интеграл будет равен сумме интегралов по каждой из этих областей.

Таким образом, получим

$$I = \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{2x} f(x;y)dy + \int\limits_1^{\sqrt{5}} dx \int\limits_0^{\sqrt{5-x^2}} f(x;y)dy .$$

Вычислим $I = \int\limits_0^2 dy \int\limits_{y/2}^{\sqrt{5-y^2}} f(x,y)dx$,если $f(x,y) = x \cdot y$,то есть

$$I = \int\limits_0^2 dy \int\limits_{y/2}^{\sqrt{5-y^2}} x \cdot y dx .$$

Вычисляем сначала внутренний интеграл по переменной x, считая y постоянной величиной, имеем:

$$I = \int\limits_0^2 dy \int\limits_{y/2}^{\sqrt{5-y^2}} x \cdot y dx = \int\limits_0^2 dy\, y \cdot \frac{x^2}{2}\Bigg|_{y/2}^{\sqrt{5-y^2}} = \frac{1}{2}\int\limits_0^2 y \cdot \left(5 - y^2 - \frac{y^2}{4}\right)dy =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_0^2 \left(5y - y^3 - \frac{y^3}{4}\right)dy = \frac{1}{2}\int\limits_0^2 \left(5y - \frac{5y^3}{4}\right)dy =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{5y^2}{2} - \frac{5y^4}{16}\right)\Bigg|_0^2 = \frac{1}{2}(10-5) = \frac{5}{2}.$$

Ответ: $I = \dfrac{5}{2}$.

Задание 3. Вычислить $\int\limits_L (\tilde{o} - \acute{o})ds$, *ãäå* L – отрезок прямой от A(0; 0) до B (4; 3).

Решение. Уравнение прямой АВ имеет вид $\acute{o}=(3/4)\tilde{o}.$ Находим $\acute{o}^{/}=(3/4)$ и, следовательно,

$$\int\limits_{L}(\tilde{o}-\acute{o})ds=\int\limits_{0}^{4}(x-\frac{3}{4}x)\sqrt{1+\frac{9}{16}}dx=\frac{5}{16}\int\limits_{0}^{4}xdx=\frac{5}{32}x^{2}\Big|_{0}^{4}=\frac{5}{2}.$$

Задание 4. Вычислить криволинейный интеграл $\int\limits_{AB}(x-y)dx+dy$,

где АВ–дуга параболы $y=2x^{2}$ от т.А$(1;2)$ до т.В $(2;8)$.

Решение. Изобразим кривую, вдоль которой ведется интегрирование:

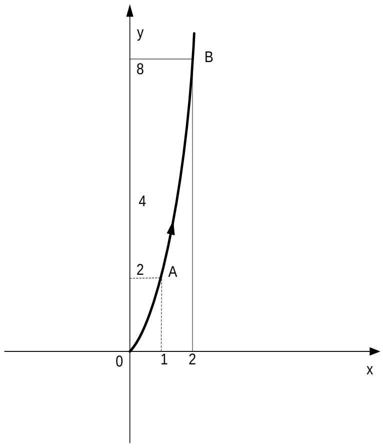


Рисунок 3 – Кривая, вдоль которой ведется интегрирование

Вычисление криволинейного интеграла $\int\limits_{AB}(x-y)dx+dy$ сведем к вычислению определенного интеграла по формуле

$$\int\limits_{AB}P(x;y)dx+Q(x;y)dy \;=\; \int\limits_{x_A}^{x_B}(P(x;y(x))+Q(x;y(x))\cdot y^{/}(x))dx.$$

Так как АВ–дуга параболы, заданной уравнением $y=2x^{2}$ от т.А$(1;2)$ до т.В $(2;8)$, то $dy=y^{/}dx=(2x^{2})^{/}dx=4xdx$, а переменная x меняется в пределах от 1 до 2. Следовательно,

$$\int\limits_{AB}(x-y)dx+dy=\int\limits_1^2((x-2x^2)dx+4xdx)=\int\limits_1^2(5x-2x^2)dx=\left(\frac{5x^2}{2}-\frac{2x^3}{3}\right)\Bigg|_1^2=$$

$$=(10-\frac{16}{3})-(\frac{5}{2}-\frac{2}{3})=10-\frac{16}{3}-\frac{5}{2}+\frac{2}{3}=\frac{15}{2}-\frac{14}{3}=\frac{45-28}{6}=\frac{17}{6}.$$

Задание 5. Применяя формулу Грина, вычислить

$I=\oint\limits_C 2(x^2+y^2)dx+(x+y)^2dy, \text{åñëè}\tilde{N}$ – контур треугольника с вершинами L(1; 1), M(2; 2), N(1; 3), пробегаемый против хода часовой стрелки.

Решение. Здесь $Ð(x,y)=2(x^2+y^2), Q(x,y)=(x+y)^2$. Находим

$$\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=2(x+y)-4y=2(x-y).$$

Таким образом,

$I=\oint\limits_C 2(x^2+y^2)dx+(x+y)^2dy=\iint\limits_D 2(x-y)dxdy,$ где область D – треугольник LMN. Уравнение прямой $LM:\ \ y=x,$ уравнение $MN: y=-x+4.$ Вычислим двойной интеграл по данной области:

$$I=2\int\limits_1^2 dx\int\limits_x^{4-x}(x-y)dy=2\int\limits_1^2\left[xy-\frac{1}{2}y^2\right]\Bigg|_x^{4-x}dx=$$

$$=2\int\limits_1^2\left[x(4-x)-\frac{1}{2}(4-x)^2-x^2+\frac{1}{2}x^2\right]dx=$$

$$=4\int\limits_1^2(4x-x^2-4)dx=4\left[2x^2-\frac{1}{3}x^3-4x\right]\Bigg|_1^2=-\frac{4}{3}.$$

Тема 3. Числовые и функциональные ряды

1 Находить члены числовых рядов.
2 Определять, какой ряд является знакопеременным, знакочередующимся, гармоническим, обобщенным гармоническим.
3 Знать определение сходящегося ряда.
4 Знать и уметь применять необходимый признак сходимости ряда.
5 Знать и уметь применять достаточные признаки сходимости положительных рядов: признаки сравнения, признак Даламбера, признак Коши, интегральный признак сходимости.
6 Знать и уметь применять признак Лейбница сходимости знакочередующегося ряда.

7 Определять коэффициенты степенного ряда.
8 Находить радиус сходимости степенного ряда.
9 Находить интервал сходимости степенного ряда.
10 Находить область сходимости степенного ряда.
11 Знать определение ряда Тейлора, ряда Маклорена.

Задания для самостоятельного выполнения

1 Записать первые пять членов ряда по заданному общему члену:

а) $a_n = \frac{n}{2n+1}$;

б) $a_n = \frac{n+3}{n!}$, где $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$;

в) $a_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n+1}$.

2 Исследовать сходимость ряда:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{3n+2}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} n \sin \frac{1}{n}$

3 Исследовать сходимость ряда:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\ 5^n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^3+6}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{3^n(2n-1)}$; г) $\sum_{n=1}^{\infty} (\frac{5n-3}{3n+1})^n$;

д) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^2 n}$.

4 Исследовать на абсолютную или условную сходимость ряд:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n+1}}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^3}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{5n-2}$.

5 Определить коэффициенты степенного ряда:

а) $\sum_{n=0}^{\infty} n 2^n x^n$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} n!(x-2)^n$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^{2n}}{n(3^n+1)}$.

6 Найти радиус сходимости степенного ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{n^2 7^n}$.

7 Найти интервал сходимости степенного ряда $\sum_{n=1}^{\infty} (\frac{n+1}{n})^{n^2} x^n$.

8 Найти область сходимости степенного ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+5)^n}{n^4}$.

9 Найти первые четыре члена ряда Тейлора для функции $f(x)=\frac{1}{x+5}$ в окрестности точки $x=2$.

Образцы решения заданий

Задание 1. Написать первые три члена ряда, общий член которого

$$\grave{a}_n=\frac{(-1)^n}{(3n-2)\cdot 5^n}$$

Решение. Полагая в данной формуле n=1,2,3, получаем:

$$\grave{a}_1=-\frac{1}{1\cdot 5},\ \grave{a}_2=\frac{1}{4\cdot 5^2},\ \grave{a}_3=-\frac{1}{7\cdot 5^3}.$$

Задание 2. Найти формулу общего члена ряда

$$1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+.....$$

Решение. В рассматриваемом ряде члены представлены в виде дробей. Числитель каждой дроби – число 1, а знаменатель – квадрат натурального числа. Тогда $\grave{a}_n=\frac{1}{n^2}$. Данный ряд можно записать также в виде $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$.

Задание 3. Исследовать ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{2n+1}$ на сходимость.

Решение. Заметим, что предел общего члена рассматриваемого ряда $\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{2n+1}=\frac{1}{2}\neq 0$. Поэтому, согласно необходимому признаку сходимости, ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{2n+1}$ не может сходиться, т.е. он расходится.

Задание 4. Исследовать на сходимость ряд

$$1+\frac{1}{4}+\frac{1}{12}+\frac{1}{32}+\frac{1}{80}+.....$$

Решение. Заданный ряд запишем в виде $1+\frac{1}{2\cdot 2}+\frac{1}{3\cdot 2^2}+\frac{1}{4\cdot 2^3}+\frac{1}{5\cdot 2^4}+\ldots+\frac{1}{n\cdot 2^{n-1}}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n2^{n-1}}$ и сравним его с рядом $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{n-1}}$. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{n-1}}$ сходится, т.к. является геометрическим рядом со знаменателем $q=\frac{1}{2}$. Кроме того, $\frac{1}{n\cdot 2^{n-1}}\le\frac{1}{2^{n-1}}$, $n=1,2,3,\ldots$. Значит, согласно признаку сравнения, ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\cdot 2^{n-1}}$ сходится.

Задание 5. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n+1}{n^3+5n-1}$.

Решение. Возьмем для сравнения ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$, который сходится как обобщенный гармонический ряд, у которого $\alpha = 2>1$.

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n+1}{n^3+5n-1}:\frac{1}{n^2}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(3n+1)n^2}{n^3+5n-1}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n^3+n^2}{n^3+5n-1}=3$. Значит, согласно предельному признаку сравнения, ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n+1}{n^3+5n-1}$ сходится.

Задание 6. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}$.

Решение. Запишем $\grave{a}_n=\frac{n}{2^n}$. Чтобы получить выражение для $\grave{a}_{n+1}$, необходимо в формулу n-го члена ряда подставить n+1 вместо n: $\grave{a}_{n+1}=\frac{n+1}{2^{n+1}}$.

Имеем: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{\grave{a}_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)2^n}{2^{n+1}n}=\frac{1}{2}\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}=\frac{1}{2}<1.$

По признаку Д$^/$Аламбера данный ряд сходится.

Задание 7. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{7^{n+1}}$.

Решение. $\grave{a}_n=\frac{n!}{7^{n+1}}$, $\grave{a}_{n+1}=\frac{(n+1)!}{7^{n+2}}$

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)!\,7^{n+1}}{7^{n+2}n!}=\frac{1}{7}\lim\limits_{n\to\infty}(n+1)=\infty$. Данный ряд расходится.

Задание 8. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{\ddot{\imath}}{3n+1}\right)^{n}$.

Решение. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\dfrac{n}{3n+1}\right)^{n}} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{3n+1} = \dfrac{1}{3} < 1.$

По признаку Коши ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{\ddot{\imath}}{3n+1}\right)^{n}$ сходится.

Задание 9. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\arcsin\dfrac{1}{n}\right)^{n}$.

Решение. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty}\arcsin\dfrac{1}{n} = 0 < 1.$ Данный ряд сходится.

Задание 10. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{2^n}\left(\dfrac{\ddot{\imath}+1}{n}\right)^{n^2}$.

Решение.

$$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{2^n}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n} = \frac{1}{2}\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} = \frac{1}{2}\cdot e > 1.$$

Согласно признаку Коши ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{2^n}\left(\dfrac{\ddot{\imath}+1}{n}\right)^{n^2}$ расходится.

Задание 11. Исследовать на сходимость ряд $1-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{4}+\ldots+(-1)^{n-1}\dfrac{1}{n}+\ldots$

Решение. Данный ряд является знакочередующимся, исследуем его по признаку Лейбница:

а) $1>\dfrac{1}{2}>\dfrac{1}{3}>\ldots>\dfrac{1}{n}>\ldots;$ б) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}=0$. Итак, данный ряд сходится.

Задание 12. Выяснить вопрос об условной или абсолютной сходимости ряда $1-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{4}+\ldots+(-1)^{n-1}\dfrac{1}{n}+\ldots$.

Решение. Ряд сходится условно, т.к. он сходится по признаку Лейбница, а ряд, составленный из его модулей $1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\ldots+\dfrac{1}{n}+\ldots$, расходится, ибо является гармоническим рядом.

Задание 13. Найти радиус и интервал сходимости степенного ряда и исследовать сходимость ряда на концах интервала сходимости $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{5^n \sqrt{n+3}}$.

Решение. Для определения радиуса сходимости степенного ряда воспользуемся формулой: $R = \lim\limits_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$.

Так как $a_n = \frac{1}{5^n \sqrt{n+3}}$ и $a_{n+1} = \frac{1}{5^{n+1} \sqrt{n+4}}$, то

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{5^{n+1}\sqrt{n+4}}{5^n \sqrt{n+3}} \right| = 5 \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n+4}}{\sqrt{n+3}} = 5 \lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{n+4}{n+3}} = 5 \sqrt{\lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{4}{n}}{1+\frac{3}{n}}} = 5.$$

Итак, радиус сходимости ряда $R = 5$.

Определим интервал сходимости данного степенного ряда:

$$|x+2| < 5 \Rightarrow -5 < x+2 < 5 \Rightarrow -7 < x < 3.$$

Итак, $(-7; 3)$ – интервал сходимости степенного ряда.

Исследуем сходимость ряда на концах интервала сходимости, то есть в точках $x = -7$ и $x = 3$.

Пусть $x = -7$. Подставим это значение в исследуемый степенной ряд. Получим знакочередующийся числовой ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-5)^n}{5^n \sqrt{n+3}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+3}}.$$

Так как $\frac{1}{2} > \frac{1}{\sqrt{5}} > \frac{1}{\sqrt{6}} > \ldots$ и $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n+3}} = 0$, то согласно признаку Лейбница данный ряд сходится. Таким образом, $x = -7$ принадлежит области сходимости степенного ряда.

Пусть $x = 3$. Подставив это значение в исследуемый степенной ряд, получим числовой ряд с положительными членами:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{5^n \sqrt{n+3}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+3}}.$$

Сравним данный ряд с обобщенным гармоническим рядом $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ при $p = \frac{1}{2} < 1$, который является расходящимся. Для исследования на сходимость применим предельный признак сравнения. Получим

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+3}} = 1 \neq 0.$$

Следовательно, оба ряда ведут себя одинаково и исследуемый ряд, как и вспомогательный ряд, расходится. Таким образом, $x = 3$ не принадлежит области сходимости степенного ряда.

Поэтому, областью сходимости исследуемого степенного ряда является полуинтервал [– 7; 3).

Ответ: R = 5, [– 7; 3).

Тема 4. Теория вероятностей

1 Знать и уметь применять основные формулы комбинаторики.
2 Знать классическое, статистическое и геометрическое определения вероятности.
3 Знать и уметь применять теоремы сложения и умножения вероятностей.
4 Знать и уметь применять формулы полной вероятности и Байеса.
5 Знать и уметь применять формулу Бернулли.
6 Знать и уметь применять локальную и интегральную теоремы Муавра-Лапласа.
7 Знать и уметь применять формулу Пуассона.
8 Знать определение случайной величины.
9 Знать определение функции распределения и ее свойства.
10 Знать определение плотности распределения вероятности и ее свойства.
11 Знать определение математического ожидания, дисперсии и среднего квадратического отклонения случайной величины и их свойства.

Задания для самостоятельного выполнения

Задача 1. Порядок выступления 8 участников конкурса определяется жребием. Сколько различных вариантов жеребьевки при этом возможно?

Задача 2. Расписание одного дня состоит из 4 дисциплин. Определить количество вариантов расписания при выборе из 15 дисциплин.

Задача 3. В шахматном турнире участвуют 12 человек. Сколько партий должно быть сыграно в турнире, если между любыми двумя участниками должна быть сыграна одна партия?

Задача 4. Из 25 студентов 5 имеют спортивные разряды. Какова вероятность того, что выбранные наудачу 2 студента – разрядники?

Задача 5. Среди 1000 новорожденных оказалось 487 девочек. Найти относительную частоту рождения девочек.

Задача 6. На отрезке L длины 30 см помещен меньший отрезок l = 15 см. Найти вероятность того, что точка наудачу поставленная на больший отрезок, попадет также и на меньший отрезок. Предполагается, что вероятность попадания точки на отрезок пропорциональна длине отрезка и не зависит от его расположения.

Задача 7. Вероятность того, что студент сдаст первый экзамен, равна 0,9; второй – 0,8; третий – 0,7. Найти вероятность того, что студентом будут сданы: а) только первый экзамен; б) только один экзамен; в) три экзамена; г) по крайней мере два экзамена; д) хотя бы один экзамен.

Задача 8. Среди 1000 лотерейных билетов 25 выигрышных. Найти вероятность того, что два наудачу выбранные билета окажутся выигрышными.

Задача 9. В торговую фирму поступили телевизоры от трех поставщиков в отношении 1:4:5. Практика показала, что телевизоры поступающие от 1-го, 2-го и 3-го поставщиков, не потребуют ремонта в течение гарантийного срока в 98 %, 88 % и 92 % случаев.

1) Найти вероятность того, что поступивший в торговую фирму телевизор не потребует ремонта в течение гарантийного срока.

2) Проданный телевизор потребовал ремонта в течение гарантийного срока. От какого поставщика вероятнее всего поступил этот телевизор?

Задача 10. В среднем 20 % пакетов акций на аукционах продаются по первоначально заявленной цене. Найти вероятность того, что из 8 пакетов акций в результате торгов по первоначально заявленной цене: 1) будет продано 2 пакета; 2) не будут проданы 5 пакетов.

Задача 11. По результатам проверок налоговыми инспекциями установлено, что в среднем каждое второе частное предприятие региона имеет нарушение финансовой дисциплины. Найти вероятность того, что из 100 зарегистрированных в регионе частных предприятий имеют нарушения финансовой дисциплины: а) 48 предприятий; б) от 48 до 55.

Задача 12. Завод отправил на базу 10000 стандартных изделий. Среднее число изделий, повреждаемых при транспортировке составляет 0,02 %. Найти вероятность того, что из 10000 изделий будет повреждено три изделия.

Задача 13.Дискретная случайная величина X задана законом распределения

X	3	5	8
P	0,3	0,5	0,2

Найти функцию распределения $F(x)$ и построить ее график.

Задача 14. Случайная величина X задана функцией распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0, если\ x < 1; \\ \dfrac{x-1}{2}, если\ 1 \le x \le 3; \\ 1, если\ x > 3. \end{cases}$$

Вычислить вероятности попадания СВ X в интервалы (1,5; 2,5) и (2,5; 3,5).

Задача 15. Случайная величина X задана функцией распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0, если\ x < 2; \\ (x-2)^2, если\ 2 \le x \le 3; \\ 1, если\ x > 3. \end{cases}$$

Найти плотность распределения СВ X.

Задача 16. СВ X подчинена закону распределения с плотностью *f(x)*, причем

$$f(x) = \begin{cases} 0, если\ x < 0; \\ a(3x - x^2), если\ 0 \le x \le 3; \\ 0, если\ x > 3. \end{cases}$$

Требуется: 1) найти коэффициент *a*; 2) найти вероятность попадания X в промежуток (1; 2).

Задача 17. Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение СВ X, заданной законом распределения:

X	–5	-2	1	3	4
p	0,2	0,1	0,3	0,15	0,25

Задача 18. СВ X в интервале (0; 4) задана плотностью распределения $f(x) = \frac{1}{16}x$, вне этого интервала $f(x) = 0$. Найти дисперсию X.

Образцы решения заданий

Задание 1. Сколько существует способов распределить три премии между десятью сотрудниками отдела: а) одинакового размера; б) разных размеров; в) одинакового размера, если сотрудники могут быть премированы за различные показатели и более одного раза; г) разного размера, если сотрудники могут быть премированы за различные показатели и более одного раза?

Решение. Каждому работнику отдела поставим в соответствие некоторый номер – 1, 2, …, 10. Тогда любая тройка номеров из этого списка соответствует одному варианту распределения премий. Условимся также премии располагать слева направо в порядке убывания, когда они различаются по размеру.

а) если премии одинакового размера, то наборы номеров, например, (1, 2, 3); (1, 3, 2); (2, 1, 3); (2, 3, 1) неразличимы (они соответствуют факту награждения первых трёх сотрудников по списку). Поэтому здесь важен только состав, порядок расположения элементов в наборе роли не играет. Значит, способов распределить три премии одинакового размера столько же, сколько сочетаний «из 10 по 3», $C_{10}^3 = \frac{10!}{7!3!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 120$.

б) если премии разного размера, то наборы номеров, например, (1, 2, 3); (1, 3, 2) разные (для 2-го и 3-го сотрудников). Поэтому здесь важен не только состав, но и порядок расположения элементов в наборе. Значит, способов распределить три премии разного размера столько же, сколько размещений « из 10 по 3», $A_{10}^3 = \frac{10!}{(10-3)!} = \frac{10!}{7!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{1} = 720$.

в) если премии одинакового размера, а сотрудники могут быть премированы и более одного раза, то наборы номеров, например, (1, 1, 3); (1, 3, 1) неразличимы. В обоих случаях 2 премии получил работник с № 1 и 1 премию – работник № 3. Значит, способов распределить три премии одинакового размера в этом случае столько же, сколько существует сочетаний с повторениями « из 10 по 3», $\overline{C}_{10}^3 = \frac{(10+3-1)!}{(10-1)!3!} = \frac{12!}{9!3!} = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 220$

г) если премии разного размера, а сотрудники могут быть премированы и более одного раза, то наборы номеров, например, (1, 1, 3); (1, 3, 1) различные. В первом варианте 1-й работник имеет премию максимальную и 2-ю по величине, во 2-м варианте 1-й работник имеет премию максимальную и 3-ю по величине. Значит, наборы представляют собой размещения с повторениями. Поэтому способов распределить три премии разного размера в столько же, сколько существует размещений с повторениями « из 10 по 3», $\overline{A}_{10}^3 = 10^3 = 1000$.

Задание 2. Сколько трехзначных чисел можно составить из множества цифр {1,2,3,4,5,6}

а) без повторений; б) с повторениями?

Решение. а) Так как числа 123 и 321 разные, то порядок расположения внутри набора существенен. Поэтому чисел можно составить столько, сколько будет размещений « из 6 по 3»,

$A_6^3 = \frac{6!}{(6-3)!} = \frac{6!}{3!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{1} = 120$.

б) Если цифры повторяются, то важен и состав, и порядок в наборе. Поэтому чисел можно составить столько, сколько будет размещений с повторениями « из 6 по 3», то есть $\overline{A}_6^3 = 6^3 = 216$.

Задание 3. В отделении банка работают 25 человек, 10 из них мужчины. Для перевода в другое отделение банка необходимо отобрать 5 сотрудников. Какова вероятность того, что среди отобранных сотрудников три женщины?

Решение. Пусть событие A означает, что из 5 отобранных для перевода в другое отделение сотрудников три женщины. Тогда

$$P(A)=\frac{m}{n}.$$

Общее число n способов выбора 5 сотрудников из 25 равно числу сочетаний из 25 по 5, т.е. C_{25}^{5}. Определим число m, благоприятствующих событию A исходов — «среди отобранных 5 сотрудников будут 3 женщины». Число способов выбрать 3 женщины из 15 равно C_{15}^{3}. Каждому такому выбору соответствует C_{10}^{2} способов выбора 2-х мужчин из 10. Следовательно, $m=C_{15}^{3}C_{10}^{2}$. Тогда

$$P(A)=\frac{m}{n}=\frac{C_{15}^{3}\cdot C_{10}^{2}}{C_{25}^{5}}=\frac{15!\cdot 10!\cdot 5!\cdot (25-5)!}{3!\cdot (15-3)!\cdot 2!\cdot (10-2)!\cdot 25!}=\frac{15!\cdot 10!\cdot 5!\cdot 20!}{3!\cdot 12!\cdot 2!\cdot 8!\cdot 25!}$$

$$=\frac{13\cdot 14\cdot 15\cdot 9\cdot 10\cdot 4\cdot 5}{2\cdot 21\cdot 22\cdot 23\cdot 24\cdot 25}=\frac{195}{506}\approx 0{,}38.$$

Ответ: $P(A)=0{,}38.$

Задание 5. В течение года три фирмы независимо друг от друга могут обанкротиться (прекратить функционирование) с вероятностями $p_1=0{,}06,\ p_2=0{,}09\ и\ p_3=\ 0{,}08$ соответственно. Вычислить вероятность того, что в течение года будут функционировать:

а) только две фирмы;
б) хотя бы одна фирма;
в) не более одной фирмы.

Решение

Пусть A_i, i=1, 2, 3 – события, означающие банкротство каждой из трёх фирм. Тогда P(A_1) = 0,06, P(A_2) = 0,09, P(A_3) = 0,08; P($\overline{A_1}$) =0,94, P($\overline{A_2}$) = = 0,91, P($\overline{A_3}$) = 0,92. Здесь $\overline{A_1}$, $\overline{A_2}$, $\overline{A_3}$ – противоположные относительно A_1 , A_2, A_3 случайные события.

а) Рассмотрим событие B=$\overline{A_1}\ \overline{A_2}A_3+\overline{A_1}A_2\overline{A_3}+\ A_1\overline{A_2}\ \overline{A_3}$. Оно заключается в том, что в течение года не обанкротятся только две фирмы.

Так как $\overline{A_1}\ \overline{A_2}A_3$, $\overline{A_1}A_2\overline{A_3}$, $A_1\overline{A_2}\ \overline{A_3}$ несовместны и A_i (i=1, 2, 3) независимы, то на основании теорем сложения и умножения вероятностей получим :

$$P(B)=P(\overline{A_1})\,P(\overline{A_2})\,P(A_3)+P(\overline{A_1})\,P(A_2)\,P(\overline{A_3})+P(A_1)\,P(\overline{A_2})\,P(\overline{A_3})=$$
$$=0{,}94\cdot 0{,}91\cdot 0{,}08+0{,}94\cdot 0{,}09\cdot 0{,}92+0{,}06\cdot 0{,}91\cdot 0{,}92=0{,}196496\approx 0{,}1965.$$

б) Обозначим через C событие, состоящее в том, что все три фирмы в течение года обанкротятся. Тогда

$$P(C)=P(A_1A_2A_3)=P(A_1)\,P(A_2)P(A_3)=0{,}06\cdot 0{,}09\cdot 0{,}08=0{,}000432.$$

Вероятность того, что хотя бы одна фирма не обанкротится, равна

$$1-P(C)=1-0{,}000432=0{,}999568\approx 0{,}9996.$$

в) Пусть теперь D – случайное событие, состоящее в том, что в течение года будет функционировать не более одной фирмы. Оно означает, что либо все три фирмы обанкротятся, либо будет функционировать только одна фирма. Тогда D= $A_1A_2A_3+\overline{A_1}A_2A_3+A_1\overline{A_2}A_3+A_1A_2\overline{A_3}$ и

$$P(D)=P(C)+P(\overline{A_1})\,P(A_2)\,P(A_3)+P(A_1)\,P(\overline{A_2})P(A_3)+P(A_1)P(A_2)P(\overline{A_3})=$$
$$=0{,}000432+0{,}94\cdot 0{,}09\cdot 0{,}08+0{,}06\cdot 0{,}91\cdot 0{,}08+0{,}06\cdot 0{,}09\cdot 0{,}92=0{,}016536\approx 0{,}0165.$$

Ответ: а) 0,1965; б) 0,9996; в)0,0165.

Задание 6. В магазине имеются холодильники, произведенные двумя заводами в количественном соотношении 2:9. Вероятность выхода из строя в течение гарантийного срока холодильника, произведенного первым заводом, равна 0,005, а вторым – 0,009. Купленный в магазине холодильник выдержал гарантийный срок. Вычислить вероятность того, что этот холодильник произведен вторым заводом.

Решение

Пусть A–событие, состоящее в том, что холодильник выдержит гарантийный срок, H_1 и H_2– гипотезы, состоящие в том, что он произведен первым или вторым заводом соответственно. Тогда

$$P(H_1)=\frac{2}{11};P(H_2)=\frac{9}{11}.$$

Из условия задачи следует, что: $P_{H_1}(A)=1-0,005=0,995$; $P_{H_2}(A)=1-0,009=0,991$.

Вероятность того, что холодильник, выдержавший гарантийный срок, произведен вторым заводом, т.е. $P_A(H_2)$ вычислим по формуле Бейеса:

$$P_A(H_2)=\frac{P(H_2)P_{H_2}(A)}{P(H_1)P_{H_1}(A)+P(H_2)P_{H_2}(A)}=\frac{\frac{9}{11}\cdot 0,991}{\frac{2}{11}\cdot 0,995+\frac{9}{11}\cdot 0,991}=\frac{9\cdot 0,991}{2\cdot 0,995+9\cdot 0,991}=\frac{8,919}{1,99+8,919}=\frac{8,919}{10,909}\approx 0,82$$

Ответ: 0,82.

Задание 7. При проведении социологического опроса студентов каждый из них, независимо друг от друга, может дать неискренний ответ с вероятностью 0,12. Вычислить вероятность того, что из 300 ответов неискренних будет:

а) ровно 30;

б) не более 70;

в) не менее 30 и не более 70.

Решение

а) Так как число опрошенных студентов $n=300$ достаточно велико , а вероятность $p=0,12$ сравнительно мала, то воспользуемся локальной теоремой Муавра–Лапласа:

$$P_n(m)=\frac{1}{\sqrt{npq}}\varphi(x),\ \text{где}\quad x=\frac{m-np}{\sqrt{npq}}.$$

В нашем случае $m_1=30$, $q=1-0,12=0,88$,

$$x=\frac{30-300\cdot 0,12}{\sqrt{300\cdot 0,12\cdot 0,88}}\approx\frac{-6}{5,63}\approx -1,07$$

Функция $\varphi(x)$ четная, поэтому φ(– 1,07)= φ (1,07). По таблице [3, Приложение 1] найдем φ(1,07) = 0,2251. Искомая вероятность $P_{300}(30)=\frac{1}{5,63}\cdot 0,2251\approx 0,0401$.

б) Требование, чтобы неискренних ответов было не более 70, означает, что их число может быть равно 0, 1,2,…,70. Таким образом, в рассматриваемом случае следует принять $m_1=0$, $m_2=70$ и воспользоваться интегральной теоремой Муавра–Лапласа, по которой

$P_n(m_1,m_2)=\Phi(x'')-\Phi(x')$, где $\Phi(x)$ – функция Лапласа, $x'=\frac{m_1-np}{\sqrt{npq}}$;

$x''=\frac{m_2-np}{\sqrt{npq}}$.

Вычислим x' и x'':

$x' = \dfrac{0-300\cdot 0,12}{\sqrt{300\cdot 0,12\cdot 0,88}} \approx \dfrac{-36}{5,63} \approx -6,39$; $x'' = \dfrac{70-300\cdot 0,12}{\sqrt{300\cdot 0,12\cdot 0,88}} \approx \dfrac{34}{5,63} \approx 6,04$.

Учитывая, что функция Лапласа нечетная, т.е. $\Phi(-x) = -\Phi(x)$, используя таблицу значений $\Phi(x)$ [3,Приложение 2], получим

$$P_{300}(0,70) = \Phi(6,04) - \Phi(-6,39) = \Phi(6,04) + \Phi(6,39) = 0,5 + 0,5 = 1.$$

Для значений $x > 5$ полагают $\Phi(x) = 0,5$.

в) В этом пункте нужно вычислить $P_{300}(30;70)$, т.е. вероятность того, что из ответов трехсот опрошенных студентов неискренних будет не менее 30 и не более 70. Вычислим x' и x'':

$x' = \dfrac{30-300\cdot 0,12}{\sqrt{300\cdot 0,12\cdot 0,88}} \approx \dfrac{-6}{5,63} \approx -1,07$; $x'' = \dfrac{70-300\cdot 0,12}{\sqrt{300\cdot 0,12\cdot 0,88}} \approx \dfrac{34}{5,63} \approx 6,04$.

Следовательно,

$P_{300}(30,70) = \Phi(6,04) - \Phi(-1,07) = \Phi(6,04) + \Phi(1,07) = 0,5 + 0,3577 = 0,8577.$

Ответ: а) 0,0401; б) 1; в) 0,8577.

Задание 8. Два товароведа проверяют партию изделий на качество. Производительности их труда относятся как 5 : 4. Вероятность выявления брака первым товароведом составляет 85 %, вторым – 90 %. Из проверенных изделий отбирают три. Составить закон распределения случайного числа X – годных изделий среди отобранных. Вычислить математическое ожидание $M(X)$, дисперсию $D(X)$ и среднее квадратическое отклонение σ (X).

Решение

Из условия задачи следует, что X – дискретная случайная величина, возможными значениями которой являются числа $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$, $x_4 = 3$.

Так как имеют место оба условия схемы Бернулли , вероятности их появления будем вычислять по формуле Бернулли $P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}$.

Пусть А– случайное событие, состоящее в том, что каждое изделие из трех отобранных для проверки окажется годным; H_1, H_2 – гипотезы, заключающиеся в том, что оно проверено первым или вторым товароведом соответственно. Тогда по формуле полной вероятности

$$P(A) = P(H_1)P_{H_1}(A) + P(H_2)P_{H_2}(A).$$

По условию $P(H_1) = \dfrac{5}{9}$, $P(H_2) = \dfrac{4}{9}$, $P_{H_1}(A) = 0,85$, $P_{H_2}(A) = 0,9$.

Значит, $P(A) = \dfrac{5}{9}\cdot 0,85 + \dfrac{4}{9}\cdot 0,9 = \dfrac{7,85}{9} \approx 0,87$.

Итак, для вычисления вероятностей возможных значений случайной величины X по формуле Бернулли $p = P(A) = 0,87$. $q = 1 - 0,87 = 0,13, \quad n = 3, \quad k = 0,1,2,3.$

Тогда

$P_3(0) = q^3 = (0,13)^3 = 0,002197$; $\qquad P_3(1) = C_3^1 pq^2 = 3 \cdot 0,87 \cdot (0,13)^2 = 0,044109$;

$P_3(2) = C_3^2 p^2 q = 3 \cdot (0,87)^2 \cdot 0,13 = 0,295191$; $\qquad P_3(3) = p^3 = (0,87)^3 = 0,658503$.

Контроль: 0,002197+0,044109+0,295191+0,658503 = 1.

Закон распределения случайной величины X имеет вид:

Таблица 4.1

X	0	1	2	3
P	0,002197	0,044109	0,295191	0,658503

Найдем математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение.

По определению $M(X) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + x_3 p_3 + x_4 p_4$.

Значит, $M(X) = 0 \cdot 0,002197 + 1 \cdot 0,044109 + 2 \cdot 0,295191 + 3 \cdot 0,658503 = 2,61$.

По формуле $D(X) = M(X^2) - (M(X))^2$ вычислим дисперсию.

$D(X) = 1^2 \cdot 0,044109 + 2^2 \cdot 0,295191 + 3^2 \cdot 0,658503 - (2,61)^2 = 0,3393 \approx 0,34$.

Среднее квадратическое отклонение $\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{0,3393} \approx 0,58$.

Замечание. Рассмотренная в задаче случайная величина X – дискретная и распределена по биномиальному закону. Поэтому математическое ожидание и дисперсию можно вычислить так:

$M(X) = np = 3 \cdot 0,87 = 2,61$; $\qquad D(X) = npq = 3 \cdot 0,87 \cdot 0,13 = 0,3393$.

Задание 9. Вероятность того, что при составлении бухгалтерского баланса не допущена ошибка, равна 0,9. Аудитору на заключение представлено 4 баланса предприятия. Составьте закон распределения случайной величины X – числа положительных заключений на проверяемые балансы. Найдите:

1) числовые характеристики этого распределения: ***M(X), D(X)***;
2) функцию распределения ***F(X)*** и постройте ее график;
3) вероятность того, что:
   а) ни один бухгалтерский баланс не получит положительного заключения;
   б) хотя бы один бухгалтерский баланс получит положительное заключение;
   в) не более двух бухгалтерских балансов получат положительное заключение.

Решение. Составим закон распределения случайной величины X – числа положительных заключений на проверяемые балансы. Из четырех проверяемых балансов положительное заключение может получить ни один баланс, один, два, три и все четыре баланса, т.е.

$$x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = 2, x_4 = 3, x_5 = 4.$$

Вероятности вычислим по формуле Бернулли $p_n(m) = C_n^m \cdot p^m \cdot q^{n-m}$, при этом $n = 4,\ p = 0{,}9,\ q = 0{,}1$.

$$p_1 = P(X = 0) = C_4^0 p^0 q^4 = \frac{4!}{0! \cdot (4-0)!} \cdot (0.9)^0 (0{,}1)^4 = 0{,}0001;$$

$$p_2 = P(X = 1) = C_4^1 p^1 q^3 = \frac{4!}{1! \cdot (4-1)!} \cdot 0{,}9 \cdot (0{,}1)^3 = 0{,}0036;$$

$$p_3 = P(X = 2) = C_4^2 p^2 q^2 = \frac{4!}{2! \cdot (4-2)!} \cdot (0{,}9)^2 \cdot (0{,}1)^2 = 0{,}0486;$$

$$p_4 = P(X = 3) = C_4^3 p^3 q = \frac{4!}{3! \cdot (4-3)!} \cdot (0{,}9)^3 \cdot (0{,}1) = 0{,}2916;$$

$$p_5 = P(X = 4) = C_4^4 p^4 q^0 = \frac{4!}{4! \cdot (4-4)!} \cdot (0{,}9)^4 \cdot (0{,}1)^0 = 0{,}6561.$$

Проверим выполнение соотношения $\sum\limits_{i=1}^{n} p_i = 1$.

$$\sum_{i=1}^{5} p_i = 0{,}0001 + 0{,}0036 + 0{,}0486 + 0{,}2916 + 0{,}6561 = 1.$$

Тогда ряд распределения случайной величины X – числа положительных заключений на проверяемые балансы примет вид

Таблица 4.2

X	0	1	2	3	4
p	0,0001	0,0036	0,0486	0,2916	0,6561

1) Найдём математическое ожидание $M(X)$.

$$M(X)=\sum_{i=1}^{4} x_i p_i =$$

$$0\cdot 0{,}0001+1\cdot 0{,}0036+2\cdot 0{,}0486+3\cdot 0{,}2916+4\cdot 0{,}6561=3{,}6$$

Найдём дисперсию $D(X)$.

$$D(X)=\sum_{i=1}^{n} x_i^2 p_i-(M(X))^2=(0)^2\cdot 0{,}0001+(1)^2\cdot 0{,}0036+(2)^2\cdot 0{,}0486+$$

$$+(3)^2\cdot 0{,}2916+(4)^2\cdot 0.6561-(3{,}6)^2=0{,}36.$$

Замечание. Так как случайная величина X имеет *биномиальное распределение*, то числовые характеристики можно вычислять по формулам:

$$M(X)=np,\quad D(X)=npq.$$

2) Найдём функцию распределения $F(x)$.

$$F(x)=\begin{cases} 0, & \text{если } x\le 0,\\ 0{,}0001, & \text{если } 0<x\le 1,\\ 0{,}0001+0{,}0036, & \text{если } 1<x\le 2,\\ 0{,}0001+0{,}0036+0{,}0486, & \text{если } 2<x\le 3,\\ 0{,}0001+0{,}0036+0{,}0486+0{,}2916, & \text{если } 3<x\le 4,\\ 0{,}0001+0{,}0036+0{,}0486+0{,}2916+0{,}6561, & \text{если } x>4 \end{cases}$$

или

$$F(x)=\begin{cases} 0, & \text{если } x\le 0,\\ 0{,}0001, & \text{если } 0<x\le 1,\\ 0{,}0037, & \text{если } 1<x\le 2,\\ 0{,}0523, & \text{если } 2<x\le 3,\\ 0{,}3439, & \text{если } 3<x\le 4,\\ 1, & \text{если } x>4. \end{cases}$$

Построим график функции $F(x)$.

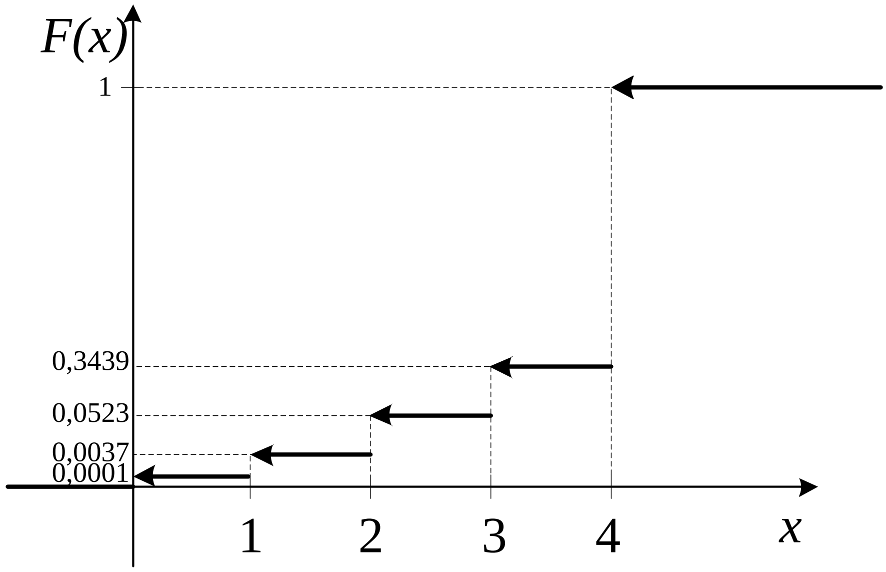


Рисунок 4 – График функции $F(x)$

3) Искомые вероятности найдем, используя закон распределения СВ*X:*

а) $p(X = 0) = 0{,}0001$;

б) $p(X \geq 1) = p(X = 1) + p(X = 2) + p(X = 3) + p(X = 4) =$

$= 0{,}0036 + 0{,}0486 + 0{,}2916 + 0{,}6561 = 0{,}9999$,

Или

$$p(X \geq 1) = 1 - p(X = 0) = 1 - 0{,}0001 = 0{,}9999.$$

в) $p(X \leq 2) = p(X = 0) + p(X = 1) + p(X = 2) =$

$= 0{,}0001 + 0{,}0036 + 0{,}0486 = 0{,}0523$.

Ответ: 1) $M(X) = 3{,}6$; $D(X) = 0{,}36$; 3) а) 0,0001; б) 0,9999; в) 0,0523.

Задание 10. Дана функция распределения СВ X:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \leq 0, \\ ax^2, & \text{если } 0 < x \leq 2, \\ 1, & \text{если } x > 2. \end{cases}$$

Найти:
1) коэффициент a;
2) математическое ожидание $M(X)$, дисперсию $D(X)$;

3) $P\left(\frac{1}{2} < X < \frac{3}{2}\right)$.

Построить графики функций $F(x)$ и $f(x)$.

Решение. Найдем вид функции плотности распределения вероятностей заданной случайной величины.

$$f(x) = F'(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \le 0, \\ 2ax, & \text{если } 0 < x \le 2, \\ 0, & \text{если } x > 2. \end{cases}$$

1) Для нахождения значения параметра a используем свойство нормированности функции плотности распределения вероятностей: $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$.

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{0} 0dx + \int\limits_{0}^{2} 2axdx + \int\limits_{2}^{+\infty} 0dx = ax^2\Big|_0^2 = 4a = 1,$$

откуда, $a = \frac{1}{4}$.

Таким образом,

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \le 0, \\ \frac{1}{4}x^2, & \text{если } 0 < x \le 2, \\ 1, & \text{если } x > 2, \end{cases} \quad f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \le 0, \\ \frac{1}{2}x, & \text{если } 0 < x \le 2, \\ 0, & \text{если } x > 2. \end{cases}$$

2) Математическое ожидание $M(X)$ найдем по формуле

$$M(X) = \int\limits_{a}^{b} \tilde{o} f(x)dx = \int\limits_{0}^{2} x \cdot \frac{1}{2}xdx = \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3}\Big|_0^2 = \frac{4}{3}.$$

Дисперсию $D(X)$ найдем по формуле

$$D(X) = \int\limits_{a}^{b} \tilde{o}^2 f(x)dx - (M(X))^2 =$$

$$= \int\limits_{0}^{2} x^2 \cdot \frac{1}{2}xdx - \left(\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{x^4}{4}\Big|_0^2 - \frac{16}{9} = 2 - \frac{16}{9} = \frac{2}{9}.$$

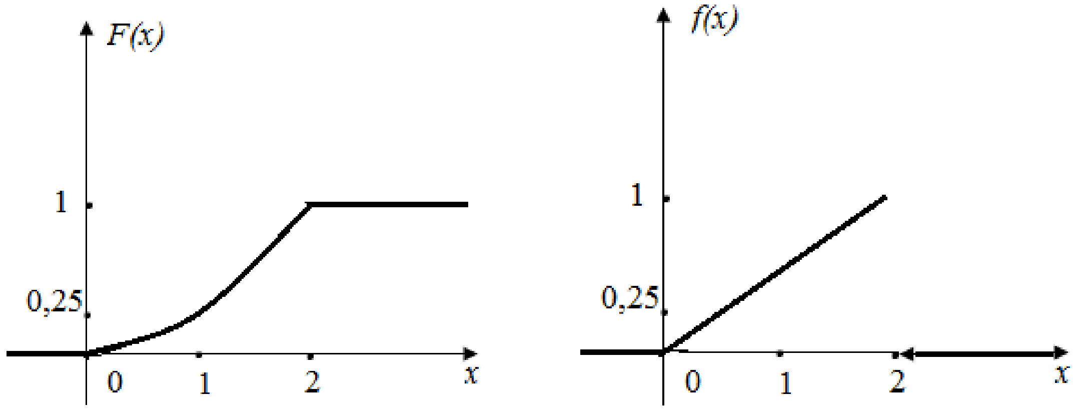
3) Для нахождения вероятности попадания случайной величины X в интервал $\left(\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right)$ воспользуемся формулой

$$P(\alpha \le X \le \beta) = F(\beta) - F(\alpha).$$

Получим

$$P\left(\frac{1}{2} < X < \frac{3}{2}\right) = F\left(\frac{3}{2}\right) - F\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{9}{16} - \frac{1}{16} = \frac{8}{16} = \frac{1}{2}$$

Построим графики функций $F(x)$ и $f(x)$ (рисунки 5а, 5б)



а) б)

Рисунок 5 – Графики функций $F(x)$ и $f(x)$

Ответ: 1) $a = \frac{1}{4}$; 2) $M(X) = \frac{4}{3}$; $D(X) = \frac{2}{9}$; 3) $P\left(\frac{1}{2} < X < \frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2}$.

Тема 5. Элементы теории функции комплексной переменной

1 Знать определение функции комплексной переменной и уметь ее геометрически изображать.

2 Уметь находить действительную и мнимую части функции комплексной переменной.

3 Знать определение предела функции комплексной переменной и уметь их вычислять.

4 Знать определение функции непрерывной в точке.

5 Знать определение производной функции комплексной переменной.

6 Знать условия дифференцируемости функции комплексной переменной (условия Коши-Римана).

Задания для самостоятельного выполнения

1 Дана функция $f(z) = z^2 + z$. Найти значения функции при: а) $z = 1 + i$, б) $z = 2 - i$, в) $z = i$, г) $z = -1$.

2 Определить действительную и мнимую части функции $f(z)$:

а) $f(z) = 3z + 2i$, б) $f(z) = iz^2 + 2z$, в) $f(z) = iz - 3z + 1$.

3 Найдите пределы:

а) $\lim\limits_{z\to 3i}\dfrac{z^2+9}{z-3i}$; *б*) $\lim\limits_{z\to -i}\dfrac{z^2+4}{z+i}$; *в*) $\lim\limits_{z\to 2+i}\dfrac{z^2-4z+5}{z^2-2iz-5}$.

4 Показать, что функция *f*(*z*) дифференцируема и найти ее производную.

а) $f(z)=z^2+1+2i$; б) $f(z)=z^2+2z-1$;

в) $f(z)=iz^2+z$; г) $f(z)=z^2-3iz$.

Образцы решения заданий

Задание 1.Дана функция $f(z)=z^2-3z$. Найти значения функции при $z=2+i$.

Решение. Имеем

$$f(2+i)=(2+i)^2-3(2+i)=4+4i+i^2-6-3i=-3+i.$$

Задание 2. Определить действительную и мнимую части функции $f(z)=z^2+iz$.

Решение. Определим действительную и мнимую часть функции $f(z)=z^2+iz$, т.е. представим функцию $f(z)$ в виде $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$.

Так как $z=x+iy$, то

$$f(z)=z^2+iz=(x+iy)^2+3i(x+iy)=x^2+2xiy+i^2y^2+3ix+3i^2y=$$
$$=(x^2-y^2-3y)+i(2xy+3x).$$

Следовательно,

$$u(x,y)=x^2-y^2-3y;\ \ v(x,y)=2xy+3x.$$

Задание 3. Найдите предел $\lim\limits_{z\to -1+2i}\dfrac{z^2+2z+5}{z+1-2i}$

Решение.

$$\lim_{z\to -1+2i}\frac{z^2+2z+5}{z+1-2i}=\left(\begin{array}{l}\text{Ïîäñòàâèì â÷èñëèòåëü è çíàìåíàòåë ü}\\ z=-1+2i,\ \text{òîãäà}\ \dfrac{(-1+2i)^2+2(-1+2i)+5}{(-1+2i)^2-1+2i}=\\ \dfrac{1-4i+4i^2-2+4i+5}{-1+2i+1-2i}=\left|i^2=1\right|\end{array}\right)=$$

$$=\left(\frac{0}{0}\right)=\left(\begin{array}{l}\text{Êâàäðàòíûé òðåõ÷ëåí â ÷èñëèòåëå èìååò êîðíè}\\ -1\pm 2i\ \text{è , ñëåäîâàòåëüíî , åãî ìîæíî ðàçëîæèòü}\\ \text{íà ëèíåéíûå ìíîæèòåëè}\ \ (z-(-1+2i)(z-(-1-2i))=\\ (z+1-2i)(z+1+2i)\end{array}\right)=$$

$$=\lim_{z\to -1+2i}\frac{(z+1-2i)(z+1+2i)}{z+1-2i}=\lim_{z\to -1+2i}(z+1+2i)=-1+2i+1+2i=4i$$

Пусть функция $w = f(z)$ определена в некоторой области G комплексного переменного z. Пусть точки z и $z+\Delta z$ принадлежат области G. Приращение функции w в точке z:

$$\Delta w = f(z+\Delta z) - f(z), \text{ где } \Delta z = \Delta x + i\Delta y.$$

Производной $f'(z)$ $\left(\text{или } \dfrac{dw}{dz} \right)$ функции $w = f(z)$ в точке $z \in G$ называется предел отношения $\dfrac{\Delta w}{\Delta z}$ при $\Delta z \to 0$

$$\lim_{\Delta z\to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \lim_{\Delta z\to 0} \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z} = f'(z),$$

если он существует и конечен.

Если существует производная $f'(z)$, то функция $f(z)$ называется *дифференцируемой в* точке z.

Пусть $z = x + iy$, тогда $w = f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ и в каждой точке дифференцируемости функции $w = f(z)$ выполняются соотношения:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Эти соотношения называются *условиями Коши-Римана*.

Обратно, если в некоторой точке (x,y) выполняются условия Коши-Римана и, кроме того, функции $u = u(x,y)$ и $v = v(x,y)$ дифференцируемы как функции двух действительных переменных, то функция $f(z) = u + iv$ является дифференцируемой в точке, как функция комплексного переменного z.

Задание 4. Показать, что функция $f(z) = iz^3 + z^2 - 3iz$ дифференцируема.

Решение. Определим действительную и мнимую часть функции $f(z) = iz^3 + z^2 - 3iz$, т.е. представим функцию $f(z)$ в виде $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$.

Так как $z = x + iy$, то

$$\begin{aligned} f(z) &= iz^3 + z^2 - 3iz = i(x + iy)^3 + (x + iy)^2 - 3i(x + iy) = \\ &= i(x^3 + 3x^2yi - 3xy^2 - y^3i) + x^2 + 2xyi - y^2 - 3xi + 3y = \\ &= x^3i - 3x^2y - 3xy^2i + y^3 + x^2 + 2xyi - y^2 - 3xi + 3y = \\ &= (y^3 + x^2 - y^2 - 3x^2y + 3y) + i(x^3 - 3xy^2 + 2xy - 3x). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$u(x,y) = y^3 + x^2 - y^2 - 3x^2y + 3y; \quad v(x,y) = x^3 - 3xy^2 + 2xy - 3x.$$

Проверим выполнение условий Коши–Римана:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Найдем частные производные функций $u(x,y)$ и $v(x,y)$:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x - 6xy; \quad \frac{\partial v}{\partial y} = -6xy + 2x;$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 3y^2 - 2y - 3x^2 + 3; \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 3x^2 - 3y^2 + 2y - 3 = -(3y^2 - 3x^2 - 2y + 3).$$

Условия Коши-Римана выполняются при всех значениях x и y, следовательно, функция $f(z) = iz^3 + z^2 - 3iz$ является дифференцируемой на всей комплексной плоскости.

Тема 6. Элементы операционного исчисления

1 Знать определения оригинала и изображения. Изображения некоторых функций.

2 Используя таблицу основных формул соответствия и теоремы операционного исчисления, уметь находить изображения оригиналов и оригиналы по их изображениям.

3 Уметь находить изображения дифференциального выражения.

4 Уметь находить операционным методом частные решения дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.

Задания для самостоятельного выполнения

1 Найти изображение $F(p)$ по заданному оригиналу $f(t)$:

а) $3t - t^2 + e^{5t}$; б) $1 - 2t^2 + \cos 3t + e^{2t}$; в) $3 - 2t^2 + 3\sin 4t$.

2 Найти оригинал $f(t)$ по изображению $F(p)$:

а) $F(p) = \dfrac{2}{p} - \dfrac{1}{p-3} + \dfrac{5p}{p^2+1}$; б) $F(p) = \dfrac{p}{p^2-4} - \dfrac{3}{p+i} + \dfrac{6}{p^2+1}$;

в) $F(p) = \dfrac{p}{p^2 - 2p + 5}$.

3 Найти изображение дифференциального выражения:

а) $y''(t) - y'(t) - y(t),\ \ y(0) = 0, y'(0) = 0, Y(p) = L\{y(t)\}$;

б) $y(t) - 2y'(t),\ \ y(0) = 0, Y(p) = L\{y(t)\}$;

в) $y'''(t) - y''(t) + 2y'(t) - 2y(t),\ \ y(0) = 0, y'(0) = 1, y''(0) = 2, Y(p) = L\{y(t)\}$.

4 Операционным методом найти решение дифференциального уравнения, удовлетворяющего заданным начальным условиям.

а) $y'' - 3y' + 2y = 4,\ \ y(0) = 1, y'(0) = 2$; б) $y'' - 4y = 4t,\ \ y(0) = 0, y'(0) = 0$.

Образцы решения заданий

Любая комплексная функция $f(t)$ действительного переменного t называется *оригиналом*, если она удовлетворяет следующим условиям:

1) $f(t)$ – кусочно–непрерывная при $t \geq 0$, это значит, что она либо непрерывна, либо в каждом конечном интервале имеет лишь конечное число точек разрыва 1-го рода;

2) $f(t) \equiv 0$ при $t < 0$;

3) при $t \to \infty$ функция $f(t)$ растёт не быстрее некоторой показательной функции (имеет ограниченную степень роста), т.е. существует такое положительное число M и такое неотрицательное число s, что для всех $t \geq 0$ выполняется неравенство: $|f(t)| \leq M \cdot e^{st}$, $M > 0$, $s \geq 0$.

Точная нижняя грань $s_0 \geq 0$ тех значений s, для которых выполняется указанное условие, называется *показателем ро*ста функции $f(t)$.

Изображением функции $f(t)$ *по Лапласу* называется функция $F(p)$ комплексного переменного $p = s + i\sigma$ из некоторой области D плоскости комплексного переменного p, определяемая равенством

$$F(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t)\,dt.$$

Связь между функциями $f(t)$ и $F(p)$ будем обозначать в дальнейшем следующим образом: $f(t) = L^{-1}\{F(p)\}$ или $F(p) = L\{f(t)\}$.

Первую запись следует читать так: «Оригинал $f(t)$ имеет изображение $F(p)$». Вторую запись следует читать так: «Изображение $F(p)$ имеет оригинал $f(t)$» или «$f(t)$ является оригиналом изображения $F(p)$». Используются также и другие обозначения.

Свойства преобразования Лапласа

1 **Теорема единственности.** Если два изображения $F(p)$ и $\Phi(p)$ совпадают, то совпадают между собой и соответствующие им оригиналы во всех точках, за исключением, быть может, точек разрыва. То есть, если

$F(p) = L\{f(t)\}$, $\Phi(p) = L\{\varphi(t)\}$ и $F(p) \equiv \Phi(p)$, то $f(t) \equiv \varphi(t)$

во всех точках непрерывности $f(t)$.

2 **Теорема линейности.** Если $f(t) = L^{-1}\{F(p)\}$, $g(t) = L^{-1}\{G(p)\}$ для любых действительных или комплексных постоянных c_1 и c_2

$$c_1 f(t) + c_2 g(t) = c_1 L^{-1}\{F(p)\} + c_2 L^{-1}\{G(p)\}, \quad Re\,p > s_0^{(k)}\,(k = 1,2,)$$

т.е. линейной комбинации оригиналов соответствует такая же линейная комбинация изображений.

3 **Теорема подобия.** Если $f(t) = L^{-1}\{F(p)\}$, $Re\,p > s_0$, то для любого числа $a > 0$

$$f(at) = \frac{1}{a} L^{-1}\{F\left(\frac{p}{a}\right)\}, Re\,p > as_0,$$

т.е. умножение аргумента оригинала на положительное число приводит к делению аргумента изображения и самого изображения на то же число a.

4 **Теорема запаздывания.** Если $f(t) = L^{-1}\{F(p)\}$, $Re\, p > s_0$, то для любого положительного числа τ

$$f(t-\tau) = e^{-p\tau} L^{-1}\{F(p)\},\ Re\, p > s_0.$$

5 **Теорема о смещении изображения (затухания).** Если $f(t) = L^{-1}\{F(p)\}$, $Re\, p > s_0$, то для любого действительного или комплексного числа α

$$e^{\alpha t} f(t) = L^{-1}\{F(p-\alpha)\},\ Re\,(p-\alpha) > s_0,$$

т.е. умножение оригинала на функцию $e^{\alpha t}$, влечёт за собой «смещение» переменной p.

6 **Теорема дифференцирования оригинала.** Если функции $f(t), f'(t), \ldots, f^{(n)}(t)$ являются функциями-оригиналами, то

$$f'(t) = p\, L^{-1}\{F(p)\} - f(0),$$

$$f''(t) = p^2\ L^{-1}\{F(p)\} - p\, f(0) - f'(0),$$

$$\ldots$$

$$f^{(n)}(t) = p^{(n)}\ L^{-1}\{F(p)\} - p^{n-1} f(0) - p^{n-2} f'(0) - \ldots - f^{(n-1)}(0).$$

Величина $f^{(k)}(0)$, $k=0, 1, \ldots, n-1$, понимается как $\lim\limits_{t\to+0} f^{(k)}(t)$.

7 **Теорема об интегрировании оригинала.** Если функция $f(t)$ является оригиналом и $f(t) = L^{-1}\{F(p)\}$ то функция $g(t) = \int\limits_0^t f(t)dt$ также является оригиналом и $g(t) = \dfrac{1}{p}\ L^{-1}\{F(p)\}$

т. е. интегрирование оригинала в пределах от 0 до t приводит к делению изображения на p.

На основании определений оригинала и изображения и основных свойств преобразований Лапласа можно составить таблицу основных формул соответствия (таблица 6. 1).

Таблица 6. 1 – Таблица основных формул соответствия

Номер формулы	Оригинал	Изображение
1	1	$\dfrac{1}{p}$
2	$e^{\alpha t}$	$\dfrac{1}{p-\alpha}$
3	$\sin \omega t$	$\dfrac{\omega}{p^2+\omega^2}$
4	$\cos \omega t$	$\dfrac{p}{p^2+\omega^2}$

Продолжение таблицы 6.1

Номер формулы	Оригинал	Изображение
5	$sh\ \omega t$	$\dfrac{\omega}{p^2-\omega^2}$
6	$ch\ \omega t$	$\dfrac{p}{p^2-\omega^2}$
7	t	$\dfrac{1}{p^2}$
8	t^n	$\dfrac{n!}{p^{n+1}}$
9	$t^n \cdot e^{\alpha t}$	$\dfrac{n!}{(p-\alpha)^{n+1}}$
10	$t \cdot sin\ \omega t$	$\dfrac{2p\omega}{(p^2+\omega^2)^2}$
11	$t \cdot cos\ \omega t$	$\dfrac{p^2-\omega^2}{(p^2+\omega^2)^2}$

Задание 1 . Найти изображение функции $f(t)=2+t^2+e^{-t}\sin 2t+t\cos 2t$, используя основные свойства (теоремы) преобразования Лапласа.

Решение. Найдем изображение каждого из слагаемых функции $f(t)=2+t^2+e^{-t}\sin 2t+t\cos 2t$. Из таблиц соответствия известно, что:

$$1 = L^{-1}\{\frac{1}{p}\}.$$

По теореме об интегрировании оригинала имеем

$$t^2 = L^{-1}\left\{\frac{2!}{p^{2+1}}\right\} = L^{-1}\left\{\frac{2}{p^3}\right\}.$$

Так как $\sin \omega t = L^{-1}\left\{\dfrac{\omega}{p^2+\omega^2}\right\}$, то $\sin 2t = L^{-1}\left\{\dfrac{2}{p^2+4}\right\}$. Тогда по теореме о смещении изображения (затухания) получим

$$e^{-t}\sin 2t = L^{-1}\left\{\frac{2}{(p+1)^2+4}\right\}.$$

$$\cos t = L^{-1}\left\{\frac{p}{p^2+1}\right\}.$$

Применяя теорему подобия, находим

$$\cos 2t = L^{-1}\left\{\frac{p}{p^2+4}\right\}.$$

Для нахождения изображения функции $t\cos 2t$ применим теорему о дифференцировании изображения. Получим

$$t\cos 2t = L^{-1}\left\{\frac{p^2-4}{(p^2+4)^2}\right\}.$$

Далее, применяя теорему линейности преобразования Лапласа, получим

$$f(t) = 2 + t^2 + e^{-t}\sin 2t + t\cos 2t = 2\cdot 1 + t^2 + e^{-t}\sin 2t + t\cos 2t =$$

$$= 2\,L^{-1}\{\frac{1}{p}\} + L^{-1}\left\{\frac{2}{p^3}\right\} + L^{-1}\left\{\frac{2}{(p+1)^2+4}\right\} + L^{-1}\left\{\frac{p^2-4}{(p^2+4)^2}\right\}.$$

Следовательно,

$$F(p) = \frac{2}{p} + \frac{2}{p^3} + \frac{2}{(p+1)^2+4} + \frac{p^2-4}{(p^2+4)^2}.$$

Задание 2. Найти оригинал $f(t)$ по изображению

$$F(p) = \frac{3}{p} - \frac{2}{p-i} + \frac{5p}{p^2+4}.$$

Решение. Используя табличные операционные соотношения и свойства линейности, получаем $f(t) = 3 - 2e^{it} + 5\cos 2t$.

Задание 3. Найти изображение дифференциального выражения $y''(t) - 3y'(t) + 2y(t)$, $y(0) = 1, y'(0) = -1$, $y\,(t) = L^{-1}\{Y\,(p)\}$

Решение. На основании свойства дифференцирования оригинала получаем:

$y'(t) = p\,L^{-1}\{Y\,(p)\} - y\,(0)$,

$y'(t) = pY(p) - y(0) = pY(p) - 1$,

$y''(t) = p^2Y(p) - py(0) - y'(0) = p^2Y(p) - p + 1.$

Используя свойство линейности, находим

$$y''(t) - 3y'(t) + 2y(t) = p^2Y(p) - p + 1 - 3(pY(p) - 1) + 2Y(p) =$$

$$= p^2Y(p) - p + 1 - 3pY(p) + 3 + 2Y(p) = Y(p)(p^2 - 3p + 2) - p + 4,$$

Применение операционного исчисления к решению линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами и непрерывной правой частью

Рассмотрим линейное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами

$$a_0 y''(t) + a_1 y'(t) + a_2 y(t) = f(t), \qquad (6.\ 1)$$

$f(t)$ – непрерывная функция действительного переменного.

Требуется найти частное решение уравнения, удовлетворяющее начальным условиям:

$$y(0)=y_0, \quad y'(0)=y'_0, \qquad (6.\ 2)$$

где y_0, y'_0 – заданные числа (задача Коши).

Будем предполагать, что функция $f(t)$ является оригиналом. Искомую функцию $y(t)$ и её производные $y'(t)$, $y''(t)$ также предполагаем оригиналами. Полагаем $f(t) = L^{-1}\{F(p)\}$, $y(t) = L^{-1}\{Y(p)\}$.

Для решения поставленной задачи (6. 1), (6. 2) перейдём от уравнения (6. 1) к изображающему (или операторному) уравнению, связывающему изображения $Y(p)$ и $F(p)$.

Применяя два раз теорему о дифференцировании оригинала, получим:

$$y'(t) = pY(p) - y_0,$$

$$y''(t) = p^2Y(p) - py_0 - y'_0.$$

Далее, применяя теорему линейности перейдём от уравнения (6. 1) к операторному уравнению:

$$a_0(p^2Y(p) - py_0 - y'_0) + a_1(pY(p) - y_0) + a_2Y(p) = F(p). \qquad (6.3)$$

Из уравнения (6. 3) выразим $Y(p)$.Искомое частное решение $y(t)$ является оригиналом, соответствующим данному изображению. Оно определяется с помощью таблиц соответствия.

Задание 4. Найти частное решение уравнения $y''-2y'+2y=2t-2$, удовлетворяющее начальным условиям: $y(0)=0, y'(0)=0$.

Решение. Обозначим через $y(t)$ искомое частное решение, через $Y(p)$ – его изображение. Тогда:

$$y'(t) = L^{-1}\{pY(p) - y(0)\} = pY(p),$$

$$y''(t) = L^{-1}\{p^2Y(p) - py(0) - y'(0)\} = p^2Y(p),$$

$$2t-2 = L^{-1}\left\{\frac{2}{p^2} + \frac{2}{p}\right\} = \frac{2(1-p)}{p^2}.$$

Операторное уравнение будет иметь вид

$$p^2Y(p) - 2pY(p) + 2Y(p) = \frac{2(1-p)}{p^2},$$

откуда

$$Y(p) = \frac{2(1-p)}{p^2(p^2-2p+2)}.$$

Дробь $\dfrac{2(1-p)}{p^2(p^2-2p+2)}$ разложим на сумму простых элементарных дробей и найдем коэффициенты разложения:

$$\frac{2(1-p)}{p^2(p^2-2p+2)}=\frac{A}{p}+\frac{B}{p^2}+\frac{Cp+D}{p^2-2p+2}=$$

$$=\frac{Ap(p^2-2p+2)+B(p^2-2p+2)+(Cp+D)p^2}{p^2(p^2-2p+2)}.$$

$$2-2p=Ap^3-2Ap^2+2Ap+Bp^2-2Bp+2B+Cp^3+Dp^2.$$

Из системы:

$$\begin{cases} A+C=0, \\ -2A+B+D=0, \\ 2A-2B=-2, \\ 2B=2. \end{cases}$$

Откуда $B=1,\ A=0,\ C=0,\ D=-1.$

Тогда

$$Y(p)=\frac{2(1-p)}{p^2(p^2-2p+2)}=\frac{1}{p^2}-\frac{1}{p^2-2p+2}=\frac{1}{p^2}-\frac{1}{(p-1)^2+1}.$$

Используя таблицы соответствия, найдём: $Y(p)=L\{t-e^t\sin t\}$.

Таким образом, искомое частное решение: $y(t)=t-e^t\sin t$.

Тема 7. Основные уравнения математической физики

1 Знать определение дифференциального уравнения в частных производных.

2 Знать, что является решением дифференциальных уравнений в частных производных, какие условия являются начальными, а какие граничными (краевыми).

3 Уметь находить решение задачи Коши о колебаниях бесконечной струны.

Задания для самостоятельного выполнения

1 Методом Даламбера найти уравнение $u = u(x.t)$ формы однородной бесконечной струны, определяемой волновым уравнением

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2},$$

если в начальный момент $t_0 = 0$ форма струны и скорость точки струны с абсциссой x определяются соответственно заданными функциями

$$u(x,0) = fx),\ \frac{\partial u(x,0)}{\partial t}=F(x):$$

а) $f(x)=3x,\ F(x)=e^{-x}$; б) $f(x)=e^x,\ F(x)=x^2$.

Образец решения задания

Рассмотрим задачу Коши для бесконечной однородной струны. Пусть требуется найти решение волнового уравнения

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}, \ -\infty < x < +\infty; \ t > 0,$$

при начальных условиях

$$u(x,0) = f x), \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = F(x).$$

Искомое решение задачи Коши для бесконечной струны $u(x,t)$ определяется по формуле:

$$u(x,t) = \frac{f(x+at) + f(x-at)}{2} + \frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at} F(\tau)d\tau,$$

которая называется *формулой Даламбера для бесконечной струны*.

Задание 1. Найти форму бесконечной однородной струны, если начальная форма струны $f(x) = e^x$, а начальная скорость ее $F(x) = \cos 2x$.

Решение. Искомое решение $u(x,t)$ найдем по формуле Даламбера:

$$u(x,t) = \frac{f(x+at) + f(x-at)}{2} + \frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at} F(\tau)d\tau.$$

Так как $f(x) = e^x$, $F(x) = \cos 2x$, то

$$u(x,t) = \frac{e^{x+at} + e^{x-at}}{2} + \frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at}\cos 2\tau d\tau = \frac{e^x(e^{at} + e^{-at})}{2} + \frac{1}{4a}\sin 2\tau\Big|_{x-at}^{x+at} =$$

$$= e^x \cdot \mathrm{ch}at + \frac{1}{4a}\big(\sin 2(x+at) - \sin 2(x-at)\big) = e^x \cdot \mathrm{ch}at + \frac{1}{2a}\cos 2x \cdot \sin 2at.$$

Тема 8. Математическая статистика

Знания на уровне понятий, определений, формулировок, описаний

1 Генеральная и выборочная совокупность, частота варианты, относительная частота варианты.

2 Выборки повторные и безповторные. Репрезентативность выборки. Статистическое распределение выборки, вариационный ряд.

3 Теоретическая и эмпирическая функции распределения.

4 Графическое представление выборки: полигон и гистограмма.

5 Числовые характеристики выборки: выборочная средняя, выборочная дисперсия и исправленная выборочная дисперсия , выборочное среднее

квадратическое отклонение и исправленное выборочное среднее квадратическое отклонение, выборочная мода, выборочная медиана, эмпирические начальные и центральные моменты различных порядков.

6 Точечные оценки неизвестных параметров генеральной совокупности. Метод моментов и метод максимального правдоподобия получения точечных оценок.

7 Интервальные оценки неизвестных параметров генеральной совокупности: доверительный интервал, доверительная вероятность

8 Требования, предъявляемые к оценкам: несмещённость, эффективность, состоятельность.

9 Доверительный интервал для неизвестного математического ожидания нормально распределённой генеральной совокупности при известной генеральной дисперсии.

10 Доверительный интервал для неизвестного математического ожидания нормально распределённой генеральной совокупности при неизвестной генеральной дисперсии.

11 Доверительный интервал для неизвестного среднеквадратического отклонения нормально распределённой генеральной совокупности.

12 Понятие статистической гипотезы. Гипотезы простые и сложные, параметрические и непараметрические. Нулевая гипотеза, альтернативная гипотеза, ошибки первого и второго рода.

13 Уровень значимости и мощность критерия.

14 Методика проверки статистической гипотезы. Статистический критерий, область принятия решения, критическая область, критическая точка, односторонние и двусторонние критические области.

15 Проверка гипотезы о равенстве генерального среднего конкретному значению.

16 Проверка гипотезы о равенстве генеральных средних двух генеральных совокупностей

17 Проверка гипотезы о равенстве дисперсий двух генеральных совокупностей.

18 Критерии согласия: χ^2 Пирсона и Колмогорова.

19 Зависимости функциональные, статистические и корреляционные.

20 Линейная регрессия случайных величин X и Y

21 Выборочный коэффициент корреляции. Проверка гипотезы о наличии или отсутствии зависимости между случайными величинами с помощью выборочного коэффициента корреляции

22 Прямые линейной эмпирической регрессии “X на Y” и “Y на X”.

Знания на уровне доказательств и выводов

1 Построение доверительного интервала для неизвестного математического ожидания нормально распределённой генеральной совокупности при известной генеральной дисперсии.

2 Построение доверительного интервала для неизвестного математического ожидания нормально распределённой генеральной совокупности при неизвестной генеральной дисперсии.

Умения в решении задач

1 Строить полигон и гистограмму по выборке

2 Строить эмпирическую функцию распределения и её график по выборке

3 Вычислять числовые характеристики выборки: выборочную среднюю, выборочную дисперсию и исправленную выборочную дисперсию, выборочное среднее квадратическое отклонение и исправленное выборочное среднее квадратическое отклонение, выборочную моду, выборочную медиану.

4 Строить доверительный интервал для неизвестного математического ожидания нормально распределённой генеральной совокупности при известной генеральной дисперсии

5 Строить доверительный интервал для неизвестного математического ожидания нормально распределённой генеральной совокупности при неизвестной генеральной дисперсии

6 Проверять гипотезу о равенстве генеральных средних двух генеральных совокупностей

7 Проверять гипотезу о равенстве дисперсий двух генеральных совокупностей.

8 Проверять гипотезу о законе распределения по критерию согласия χ^2.

9 По данным двумерной выборки строить эмпирическую простую линейную регрессию.

Задания для самостоятельного выполнения

Здесь везде N -номер студента по списку.

1 Пусть выборка задана таблицей 8. 1. Найти её числовые характеристики.

Таблица 8.1

x_i	$-1+N$	$0+N$	$1+N$	$2+N$
m_i	3	5	1	1

2 Найти доверительный интервал для неизвестного математического ожидания нормально распределённой генеральной совокупности с надёжностью $\gamma=0{,}95$ при известной генеральной дисперсии $\sigma^2=64+N$, выборочном среднем $\bar{x}=N$, найденным по выборке объёма $n=121$.

3 Найти доверительный интервал для неизвестного математического ожидания нормально распределённой генеральной совокупности при неизвестной генеральной дисперсии с надёжностью $\gamma=0{,}95$, выборочном среднем $\bar{x}=N$ и выборочной дисперсии $s^2=0{,}49\cdot N^2$, найденных по выборке объёма $n=25$.

4 Для проверки эффективности новой технологии отбираются две группы рабочих. В первой группе (где она применяется) численностью $n_1=2N$ человек средняя выработка $\overline{X}=3N$ шт., $S_X=10$ шт. Эти же показатели для другой группы (без применения новой технологии) численностью $n_2=N+10$ человека : $\overline{Y}=2N$ шт., $S_Y=9$ шт. На уровне значимости $\alpha=0{,}05$ определить, действительно ли новая технология влияет на производительность.

5 При уровне значимости $\alpha = 0{,}05$ проверить гипотезу о нормальном распределении генеральной совокупности по эмпирическим и теоретическим частотам:

Таблица 8.2

n_i	$6+N$	$12+N$	$16+N$	$40+N$	$13+N$
$n_i^{'}$	4	6	15	25	10

Образцы решения заданий.

Задание1.Пусть выборка задана таблицей 8. 3.Найти её числовые характеристики.

Таблица 8.3

x_i	–1	0	1	2
m_i	3	5	1	1

Решение. Выборочная средняя $\bar{x} = \dfrac{-1\cdot 3 + 0\cdot 5 + 1\cdot 1 + 2\cdot 1}{3+5+1+1} = 0$, выборочная дисперсия $s^2 = \dfrac{(-1)^2\cdot 3 + 0^2\cdot 5 + 1^2\cdot 1 + 2^2\cdot 1}{3+5+1+1} - 0^2 = 0{,}8$, исправленная выборочная дисперсия $S^2 = \dfrac{10}{9}s^2 = \dfrac{10}{9}\cdot 0{,}8 = \dfrac{8}{9}$, выборочное среднеквадратическое отклонение $s = \sqrt{0{,}8} \approx 0{,}89$, исправленное выборочное среднеквадратическое отклонение $S = \sqrt{\dfrac{8}{9}} \approx 0{,}94$, выборочная мода $x_{MO} = 0$, выборочная медиана $x_{ME} = \dfrac{x_5 + x_6}{2} = \dfrac{0+0}{2} = 0$.

Задание 2.Найти доверительный интервал для неизвестного математического ожидания нормально распределённой генеральной совокупности с надёжностью $\gamma = 0{,}99$ при известной генеральной дисперсии $\sigma^2 = 64$, выборочном среднем $\bar{x} = 9{,}5$, найденным по выборке объёма $n = 128$.

Решение. Искомый доверительный интервал имеет вид: $\left(\bar{x} - u_\gamma \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}; \bar{x} + u_\gamma \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$. Квантиль стандартного нормального распределения u_γ может быть найден, например, по таблицам значений функции Лапласа $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{\frac{-t^2}{2}} dt$ как решение уравнения $\Phi\left(u_\gamma\right) = \frac{\gamma}{2}$. Здесь $u_{0,99} \approx 2{,}58$. Подставляя в формулу данные задачи, получим: $(7{,}68;\ 11{,}32)$.

Задание 3.Найти доверительный интервал для неизвестного математического ожидания нормально распределённой генеральной совокупности при неизвестной генеральной дисперсии с надёжностью $\gamma = 0{,}99$, выборочном среднем $\bar{x} = 10$ и выборочной дисперсии $s^2 = 0{,}49$, найденных по выборке объёма $n = 20$.

Решение. Искомый доверительный интервал имеет вид: $\left(\bar{x} - t_{\gamma, n-1} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}; \bar{x} + t_{\gamma, n-1} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}\right)$. Квантиль распределения Стьюдента, соответствующий надёжности $\gamma = 0{,}99$ для числа степеней свободы $n - 1 = 19$ возьмём из соответствующей таблицы: $t_{0{,}99;19} = 2{,}86$. Исправленное выборочное среднеквадратичное отклонение $S = \sqrt{\frac{n}{n-1}} \cdot s = \sqrt{\frac{20}{19}} \cdot 0{,}7 \approx 0{,}718$. Подставляя, получим: $(9{,}54;\ 10{,}46)$.

Задание 4. Для проверки эффективности новой технологии отбираются две группы рабочих. В первой группе (где она применяется) численностью $n_1 = 54$человек средняя выработка $\overline{X} = 80$ шт., $S_X = 7$ шт. Эти же показатели для другой группы (без применения новой технологии) численностью $n_2 = 56$ человека : $\overline{Y} = 77$ шт., $S_Y = 6$ шт. На уровне значимости $\alpha = 0{,}05$определить, действительно ли новая технология влияет на производительность.

Решение. Для проверки гипотезы о равенстве генеральных средних двух генеральных совокупностей (новая технология не влияет на производительность) вычислим статистику:

$$Z_{экс} = \frac{\overline{X} - \overline{Y}}{\sqrt{n_1 \cdot S_X^2 + n_2 \cdot S_Y^2}} \cdot \frac{\sqrt{n_1 + n_2 - 2}}{\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}}$$ и сравним её с $Z_{КРИТ} = u_{1-\alpha}$ - квантилью стандартного нормального распределения. Квантиль стандартного нормального распределения $u \; u_{1-\alpha}$ может быть найден, например, по таблицам значений функции Лапласа $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^x e^{\frac{-t^2}{2}} dt$ как решение уравнения $\Phi\left(u \; u_{1-\alpha} \right) = \frac{1-\alpha}{2}$. Подставляя, получим: $Z_{экс} = 2{,}41$. При этом $Z_{КРИТ} = u_{0{,}95} = 1{,}96$. Так как $\left| Z_{экс} \right| > Z_{КРИТ}$, то выдвинутую гипотезу об отсутствии влияния отклоняем.

Задание 5. При уровне значимости $\alpha = 0{,}05$ проверить гипотезу о нормальном распределении генеральной совокупности по эмпирическим и теоретическим частотам:

Таблица 8. 4

n_i	6	12	16	40	13	8	5
$n_i^{'}$	4	11	15	43	15	6	6

Решение. Необходимые вычисления проведём в таблице 8. 5.

Таблица 8.5

№	1	2	3	4	5	6	7	$\sum$
n_i	6	12	16	40	13	8	5	
$n_i^{'}$	4	11	15	43	15	6	6	
$\ddot{\imath}_i - n_i^{'}$	2	1	1	-3	-2	2	-1	
$\left(\ddot{\imath}_i - n_i^{'} \right)^2$	4	1	1	9	4	4	1	
$\frac{\left(\ddot{\imath}_i - n_i^{'} \right)^2}{n_i^{'}}$	1	0,09	0,07	0,21	0,27	0,67	0,17	2,47

Видно, что наблюдаемое значение критерия $\chi^2{}_{\text{íàáë}} = 2{,}47$. Заданному уровню значимости $\alpha = 0{,}05$ и числу степеней свободы $\nu = 7 - 2 - 1 = 4$ соответствует $\chi^2{}_{\text{êðèò}} = \chi^2{}_{0,05;4} = 9{,}49$. Так как $\chi^2{}_{\text{íàáë}} < \chi^2{}_{\text{êðèò}}$, то нет оснований отклонить гипотезу о нормальном распределении генеральной совокупности на данном уровне значимости .

Задание 6. По данным корреляционной таблицы 8. 6 построить выборочные уравнения регрессии.

Таблица 8.6

Себестоимость, у.е. y	Производительность труда, x					$\sum$
	11	13	15	17	19	
7			1	1	2	4
9			3	4	1	8
11		3	7	4		14
13	2	4	5			11
15	2	1				3
$\sum$	4	8	16	9	3	40

Решение. Уравнение регрессии “y на x”: $y - \overline{y} = r_{XY} \dfrac{s_y}{s_x}\left(x - \overline{x}\right)$, “$x$ на y”:

$x - \overline{x} = r_{XY} \dfrac{S_X}{S_Y}\left(y - \overline{y}\right).$

Для удобства выпишем распределения составляющих:

Таблица 8. 7

x	11	13	15	17	19
m_x	4	8	16	9	3

Таблица 8.8

y	7	9	11	13	15
m_y	4	8	14	11	3

По таблицам 8.7 и 8.8 рассчитаем $\overline{x} = 14{,}95$, $\overline{x^2} = 228$, $S_X^2 = \overline{x^2} - \left(\overline{x}\right)^2 = 4{,}50$, $S_X = \sqrt{S_X^2} = 2{,}12$, $\overline{y} = 11{,}05$, $\overline{y^2} = 126{,}8$, $S_Y^2 = \overline{y^2} - \left(\overline{y}\right)^2 = 4{,}70$, $S_Y = \sqrt{S_Y^2} = 2{,}17$, $\sum xy = 6472$, $\overline{xy} = 161{,}8$, $K_{XY} = \overline{xy} - \overline{x}\,\overline{y} = -3{,}40$, $r_{XY} = \dfrac{K_{XY}}{S_X \cdot S_Y} = -0{,}74$, $r\dfrac{S_Y}{S_X} = -0{,}76$;

$r\dfrac{S_X}{S_Y} = -0{,}72$.

Тогда уравнение регрессии “y на x”: $y - 11{,}05 = -0{,}76(x - 14{,}95)$, “$x$ на y”: $x - 14{,}95 = -0{,}72(y - 11{,}05)$.

Тема 9. Математическое программирование

1 Уметь построить область допустимых планов, которая задается системой линейных уравнений и неравенств.

2 Уметь построить вектор-градиент целевой функции и линию нулевого уровня.

3 Знать различные формы записи задачи линейного программирования (ЗЛП).

4 Уметь переходить от одной формы ЗЛП к другой.

5 Знать алгоритм симплекс-метода.

6 Знать критерий оптимальности решения ЗЛП на максимум.

7 Уметь для ЗЛП, заданной в симметричной форме, построить двойственную ей задачу.

8 Уметь построить начальный опорный план транспортной задачи (ТЗ) методом северо-западного угла и методом минимального элемента.

9 Знать критерий оптимальности решения ТЗ.

10Уметь перейти к нехудшему опорному решению ТЗ.

Задачи для самостоятельного выполнения

ЗЛП решить графически:

1 $$z = 6x_1 - 2x_2 \to \max$$
$$\begin{cases} x_1 - x_2 \le 1 \\ 3x_1 - x_2 \le 6 \end{cases}$$
$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$$

2 $\begin{cases} x_1 - 2x_2 \ge 2 \\ -2x_1 + 3x_2 \ge 2 \end{cases}$

$z = 2{,}5x_1 + 3x_2 \to \max$

$z = 2x_1 - 6x_2 \to \min$

3 $\begin{cases} -x_1 - x_2 \le -2 \\ -x_1 + x_2 \le 1 \end{cases}$

$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$

$z = x_1 + x_2 \to \max$

4 $\begin{cases} x_1 - x_2 \ge 1 \\ x_1 - x_2 \le -1 \end{cases}$

$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$

$z = x_1 + x_2 \to \max$

5 $\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 1 \\ 2x_1 + x_2 \le 1 \end{cases}$

$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$

ЗЛП решить симплекс-методом:

$z = x_1 + x_2 \to \max$

1 $\begin{cases} x_1 + (N+1)\cdot x_2 \le 1 \\ (N+1)x_1 + x_2 \le 1 \end{cases}$ (здесь N – номер студента по списку)

$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$

Для приведённых ЗЛП написать двойственную:

$z = 6x_1 - 2x_2 \to \max$

1 $\begin{cases} x_1 - x_2 \le 1 \\ 3x_1 - x_2 \le 6 \end{cases}$

$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$

$z = 2x_1 - 6x_2 \to \min$

2 $\begin{cases} -x_1 - x_2 \le -2 \\ -x_1 + x_2 \le 1 \end{cases}$

$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$

$z = 6x_1 - 2x_2 + 4x_3 \to \max$

3 $\begin{cases} x_1 - x_2 \le 1 \\ 3x_1 - x_2 \le 8 \\ x_1 - x_2 + 14x_3 \le 10 \end{cases}$

$x_j \ge 0 \quad \forall j$

$$
4\quad \begin{aligned}
&z=-2x_1+5x_2+4x_3\to\min\\
&\begin{cases} x_1-x_2\ge 1\\ 3x_1-9x_2\ge 7\\ -0{,}5x_1-x_2+11x_3\le 10\end{cases}\\
&x_j\ge 0\quad \forall j
\end{aligned}
$$

$$
5\quad \begin{aligned}
&z=6x_1-12x_2\to\min\\
&\begin{cases} 8x_1-11x_2\ge 1\\ 13x_1-4x_2\ge 6\end{cases}\\
&x_1\ge 0, x_2\ge 0
\end{aligned}
$$

Составить первоначальный план ТЗ методом северо-западного угла и(или) методом минимального элемента по следующим данным:

1 Таблица 9.1

B_j / A_i		1	2	3
		65	158	63
1	175	7	2	3
2	37	4	7	5
3	195	6	5	6

2 Таблица 9.2

B_j / A_i		1	2	3
		48	144	175
1	68	3	5	7
2	34	7	5	3
3	141	1	2	3

3 Таблица 9.3

B_j / A_i		1	2
		140	184
1	67	3	7
2	48	6	3
3	88	6	3
4	175	4	4

4 Таблица 9.4

B_j / A_i		1	2	3	4
		92	29	114	199
1	21	5	1	4	6
2	72	0	7	3	3
3	95	4	6	3	1

5 Таблица 9.5

B_j / A_i		1	2	3
		135	23	63
1	10	5	1	6
2	81	2	2	1
3	192	1	6	1

Образцы решения задач линейного программирования:

Задание 1

Решить задачу линейного программирования графическим методом

$$\max(\min) Z = 2x_1 + 3x_2;$$

$$\begin{cases} 3x_1 - 4x_2 \geq -16, \\ x_1 + 2x_2 \leq 14, \\ -4x_1 + x_2 \geq -13, \\ -x_1 + 2x_2 \geq 2, \\ 5x_1 + 3x_2 \geq 16, \end{cases}$$

$$x_1,\ x_2 \geq 0.$$

Решение

1 Построим область допустимых решений. Для этого запишем уравнения сторон многоугольника допустимых решений, положив в ограничениях вместо неравенств равенства

$$3x_1 - 4x_2 = -16, \quad (I)$$

$$x_1 + 2x_2 = 14, \quad (II)$$

$$-4x_1 + x_2 = -13, \quad (III)$$

$$-x_1 + 2x_2 = 2, \quad (IV)$$

$$5x_1 + 3x_2 = 16. \quad (V)$$

Строим прямые, определяемые уравнениями *(I)* – *(V)* и определяем полуплоскости, удовлетворяющие исходным неравенством. Пересечение этих полуплоскостей образует пятиугольник *ABCDE*.

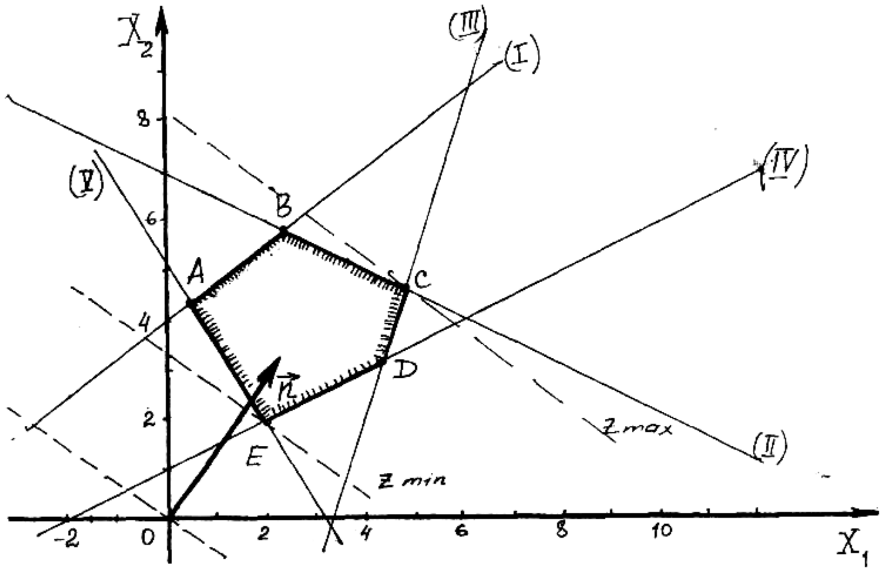


Рисунок 6 – Область допустимых решений

2 Строим вектор $\vec{n} = (2;3)$.

3 Проводим линию нулевого уровня $2x_1 + 3x_2 = 0$, перпендикулярную вектору $\vec{n} = (2;3)$.

4 Перемещаем линию нулевого уровня в направлении вектора $\vec{n}$. Первая точка контакта линии уровня с пятиугольником *ABCDE* является точка *E* и, следовательно, $Z_{\min} = Z(E)$. Последняя точка контакта – точка *C* и, следовательно, $Z_{\max} = Z(C)$.

5 Найдем координаты точек *E* и *C*.

E – точка пересечения прямых *(IV)* и *(V)*.

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 = 2, \\ 5x_1 + 3x_2 = 16. \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 = 2, \\ x_2 = 2. \end{cases}$$

E(2; 2), $Z_{\min} = Z(E) =$ *E(2; 2)* $= 2 \cdot 2 + 3 \cdot 2 = 10$.

C – точка пересечения прямых *(III)* и *(II)*.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 14, \\ -4x_1 + x_2 = -13. \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 = 4\frac{4}{9}, \\ x_2 = 4\frac{7}{9}. \end{cases}$$

$C\,(4\frac{4}{9};4\frac{7}{9}),\quad Z_{\max} = Z(C) = Z\,(4\frac{4}{9};4\frac{7}{9}) \quad = \quad 2 \cdot 4\frac{4}{9} + 3 \cdot 4\frac{7}{9} = 23\frac{2}{3}.$

Ответ: $Z_{\min} = 10, \quad Z_{\max} = 23\frac{2}{3}$.

Задание 2

Для изготовления 4-х видов продукции используют три вида сырья. Количество сырья вида i $(i=\overline{1,3})$, необходимое для изготовления единицы продукции вида j $(j=\overline{1,4})$ a_{ij}, запасы сырья b_i и прибыль от реализации единицы продукции вида j c_j заданы матрицей

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 & 5 & 60 \\ 2 & 3 & 4 & 2 & 40 \\ 3 & 4 & 5 & 2 & 40 \\ 6 & 9 & 6 & 8 & Z \end{bmatrix}.$$

Требуется:

1) составить экономико-математическую модель задачи, пользуясь которой, можно найти план выпуска продукции, при котором общая прибыль Z будет наибольшей;

2) симплексным методом найти оптимальный план выпуска продукции и максимальную величину прибыли;

3) составить задачу, двойственную к исходной, и пояснить ее экономическую суть. Используя теорию двойственности, установить соответствие между переменными прямой и двойственной задач, найти двойственные оценки;

4) с помощью двойственных оценок исследовать:

а) степень полезности отдельных видов ресурсов в условиях производства;

б) величину финансовых потерь в расчете на единицу продукции в случае, если предприятие вынуждено будет производить невыгодные ему виды продукции. При необходимости такого производства обосновать цены на готовую продукцию.

Решение

1) Составим экономико-математическую модель задачи. Обозначим через X_1, X_2, X_3, X_4 количество весовых единиц четырех видов продукции, которые планируется изготовить. Тогда прибыль, полученная от реализации выпущенной продукции, будет равна:

$$Z = 6X_1 + 9X_2 + 6X_3 + 8X_4 \to \max \qquad (9.\ 1)$$

Переменные X_1, X_2, X_3, X_4 должны удовлетворять ограничениям, накладываемым на расход имеющихся в распоряжении предприятия ресурсов сырья, что выражается неравенствами:

$$\begin{cases} 4X_1 + 2X_2 + X_3 + 5X_4 \le 60, \\ 2X_1 + 3X_2 + 4X_3 + 2X_4 \le 40, \\ 3X_1 + 4X_2 + 5X_3 + 2X_4 \le 40. \end{cases} \tag{9.2}$$

По смыслу задачи

$$X_1 \ge 0, \quad X_2 \ge 0, \quad X_3 \ge 0, \quad X_4 \ge 0. \tag{9.3}$$

Таким образом, условия (9. 1) – (9.3) определяют экономико-математическую модель поставленной задачи.

2) Решим задачу линейного программирования (9.1)–(9.3) симплексным методом. Для этого перейдем к канонической форме записи задачи линейного программирования, введя дополнительные (балансовые) переменные X_5, X_6, X_7, которые означают возможные остатки ресурсов сырья:

$$Z = 6X_1 + 9X_2 + 6X_3 + 8X_4 + 0X_5 + 0X_6 + 0X_7 \to \max; \tag{9.1$'$}$$

$$\begin{cases} 4X_1 + 2X_2 + X_3 + 5X_4 + X_5 = 60, \\ 2X_1 + 3X_2 + 4X_3 + 2X_4 + X_6 = 40, \\ 3X_1 + 4X_2 + 5X_3 + 2X_4 + X_7 = 40. \end{cases} \tag{9.2$'$}$$

$$X_j \ge 0 \qquad (j = \overline{1,7}). \tag{9.3$'$}$$

Составим начальную симплексную таблицу по данным математической модели (9. 1′)–(9. 3′).

Таблица 9.6

БП	$C_Б$	Ao	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	Θ
			6	9	6	8	0	0	0	
X_5	0	60	4	2	1	5	0	0	0	$\frac{60}{2}=30$
X_6	0	40	2	3	4	2	0	1	0	$\frac{40}{3}=13,3$
X_7	0	40	3	4	5	2	0	0	1	$\frac{40}{4}=10$
$Z_j–C_j$		0	–6	–9	–6	–8	0	0	0	

Этой симплексной таблице соответствует опорный план $\overline{X_0} = (0,0,0,0,60,40,40)$, который не является оптимальным, так как в индексной строке Z_j–C_j есть отрицательные элементы. Построим новый опорный план, более близкий к оптимальному. Для этого выполним симплексные преобразования таблицы 1. Наибольший по модулю отрицательный элемент индексной строки (–9) указывает на то, что переменную X_2 надо ввести в число базисных переменных (т.е. столбец, соответствующий переменной X_2, берем в качестве разрешающего). Чтобы определить переменную, которую необходимо вывести из числа базисных, составляем симплексные отношения и выбираем наименьшее из них:

$$\min\left\{\frac{60}{2};\frac{40}{3};\frac{40}{4}\right\} = \frac{40}{4} = 10.$$

Следовательно, из базиса выводим переменную X_7, а соответствующий столбец называем разрешающим. На пересечении разрешающего столбца и разрешающей строки находится разрешающий (ключевой) элемент 4. С помощью разрешающего элемента выполняем симплексные преобразования, которые приводят к таблице 9.7.

Таблица 9.7

БП	$C_Б$	Ao	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	Θ
			6	9	6	8	0	0	0	
X_5	0	40	2,5	0	–1,5	4	1	0	–0,5	$\frac{40}{4}=10$
X_6	0	10	–0,25	0	0,25	0,5	0	1	–0,75	$\frac{10}{0,5}=20$
X_2	9	10	0,75	1	1,25	0,5	0	0	0,25	$\frac{10}{0,5}=20$
Zj–Cj		90	0,75	0	5,25	–3,5	0	0	2,25	

Полученный опорный план $\overline{X_1} = (0,10,0,0,40,10,0)$ не является оптимальным, так как в индексной строке есть отрицательный элемент (–3,5), который соответствует переменной X_4 (а соответствующий столбец будет разрешающим). Определим разрешающую строку, выбрав из симплексных отношений наименьшее:

$$\min\left\{\frac{40}{4};\frac{10}{0,5};\frac{10}{0,5}\right\} = \min\{10;20;20\} = 10.$$

Таким образом, в качестве разрешающей строки необходимо взять строку, соответствующую переменной X_5. Это означает, что базисную переменную X_5 необходимо заменить свободной переменной X_4. Проводя симплексные преобразования, мы придем к таблице 9.8.

Таблица 9.8

БП	$C_Б$	Ao	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	Θ
			6	9	6	8	0	0	0	
X_4	8	10				1				
X_6	0	5				0				
X_2	9	5				0				
Zj-Cj		125	2,94	0	3,94	0	0,88	0	1,81	
			Y_4	Y_5	Y_6	Y_7	Y_1	Y_2	Y_3	

В полученной симплексной таблице в индексной строке нет отрицательных элементов, поэтому опорный план $\overline{X}_3^* = \left(X_1^*, X_2^*, X_3^*, X_4^*, X_5^*, X_6^*, X_7^*\right) = (0;5;0;10;0;5;0)$ является оптимальным, он является единственным, так как все индексные оценки свободных переменных больше 0.

Вывод. Максимальная возможная прибыль предприятия (в имеющихся условиях) будет 125 денежных единиц, если оно произведёт 5 единиц измерения продукции 2-го вида и 10 единиц измерения продукции 4-го вида, а продукцию 1-го и 3-го видов вообще выпускать не будет. При таком плане производства ресурсы 1-го и 3-го видов будут израсходованы полностью ($X_5^* = X_7^* = 0$), но останется неизрасходованным ресурс 2-го вида в объеме 5 единиц измерения ($X_6^* = 5$).

3) Составим математическую модель двойственной задачи. Запишем матрицу математической модели исходной задачи.

$$A=\begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 & 5 & 60 \\ 2 & 3 & 4 & 2 & 40 \\ 3 & 4 & 5 & 2 & 40 \\ 6 & 9 & 6 & 8 & Z \end{bmatrix}.$$

Тогда, чтобы получить матрицу математической модели двойственной задачи, необходимо матрицу А транспонировать (т.е. поменять местами соответствующие строки и столбцы).

$$A^T = A' = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 3 & 6 \\ 2 & 3 & 4 & 9 \\ 1 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 2 & 2 & 8 \\ 60 & 40 & 40 & f \end{bmatrix}.$$

Обозначив через Y_1, Y_2, Y_3 – (прикидочные) цены ресурсов, по матрице A^T строим математическую модель двойственной задачи.

$$f = 60Y_1 + 40Y_2 + 40Y_3 \to \min \tag{9.4}$$

$$\begin{cases} 4Y_1 + 2Y_2 + 3Y_3 \geq 6, \\ 2Y_1 + 3Y_2 + 4Y_3 \geq 9, \\ Y_1 + 4Y_2 + 5Y_3 \geq 6, \\ 5Y_1 + 2Y_2 + 2Y_3 \geq 8. \end{cases} \tag{9.5}$$

$$Y_j \geq 0, \qquad (j = \overline{1,7}). \tag{9.6}$$

Перейдем к канонической форме записи математической модели двойственной задачи введя дополнительные (балансовые) переменные Y_4, Y_5, Y_6, Y_7, которые означают возможные превышения затрат на производство 1 единицы измерения каждого вида продукции над прибылью, получаемой предприятием.

$$f = 60Y_1 + 40Y_2 + 40Y_3 + 0Y_4 + 0Y_5 + 0Y_6 + 0Y_7 \to \min \tag{9.4$'$}$$

$$\begin{cases} 4Y_1 + 2Y_2 + 3Y_3 - Y_4 = 6, \\ 2Y_1 + 3Y_2 + 4Y_3 - Y_5 = 9, \\ Y_1 + 4Y_2 + 5Y_3 - Y_6 = 6, \\ 5Y_1 + 2Y_2 + 2Y_3 - Y_7 = 8. \end{cases} \qquad (9.5')$$

$$Y_j \geq 0, \qquad (j = \overline{1,7}). \qquad (9.6')$$

Из 1-й теоремы двойственности следует, что если решена одна из пары взаимодвойственных задач симплексным методом, то по последней симплексной таблице можем получить и компоненты оптимального плана двойственной задачи (они находятся в индексной строке). При этом необходимо использовать соответствие между переменными пары взаимодвойственных задач:

$$\begin{array}{ccccccc} \multicolumn{4}{c}{\overbrace{X_1 \quad X_2 \quad X_3 \quad X_4}^{СП}} & \multicolumn{3}{c}{\overbrace{X_5 \quad X_6 \quad X_7}^{БП}} \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\ \multicolumn{4}{c}{\underbrace{Y_4 \quad Y_5 \quad Y_6 \quad Y_7}_{БП}} & \multicolumn{3}{c}{\underbrace{Y_1 \quad Y_2 \quad Y_3}_{СП}} \end{array}.$$

Для нашей задачи имеем оптимальный план двойственной задачи:

$$\overline{Y}^* = \left(Y_1^*, Y_2^*, Y_3^*, Y_4^*, Y_5^*, Y_6^*, Y_7^*\right) = (0,88;\ 0;\ 1,81;\ 2,94;\ 0; 3,\ 94;\ 0).$$

4) Оценки для 1-го и 3-го видов ресурсов положительные. Это указывает, что эти виды ресурсов наиболее дефицитные (и используются полностью). Увеличение объема ресурса 1-го вида на одну единицу измерения позволило бы получить увеличение максимальной прибыли предприятия на 0,88 денежных единиц; а для ресурса 3-го вида соответственно на 1,81 денежную единицу. Равенство нулю оценки для ресурса 2-го вида ($Y_2^* = 0$) говорит о том, что дальнейшее увеличение объема этого вида ресурса не повлияет на прибыль предприятия (ресурс 2-го вида при оптимальном плане производства остается в избытке).

Дополнительные двойственные переменные являются мерой убыточности продукции, которую согласно оптимальному плану нецелесообразно выпускать. Так как Y_4^* = 2,94, то это говорит, что на производстве 1 единицы продукции 1-го вида терпит убытки в количестве 2,94 денежные единицы. Следовательно, при необходимости производства продукции 1-го вида для ее рентабельности необходимо повысить цену на эту продукцию не менее чем на 2,94 денежные единицы.

Так как Y_6^*=3,94, то это говорит, что на производстве 1-й единицы продукции 3-го вида предприятие терпело убытки в объеме 3,94 денежные единицы (поэтому оно и не планирует эту продукцию производить). При необходимости производство этого вида продукции цена ее реализации должна быть увеличена не менее чем на 3,94 денежные единицы.

Задание 3

Имеется три поставщика и пять потребителей некоторой продукции. Количество груза a_i , которое может отгрузить поставщик $i\ (i=\overline{1,3})$, стоимость перевозки из пункта i в пункт j единицы груза c_{ij} и потребности потребителей в грузе b_j, $j=\overline{1,5}$ заданы матрицей:

$$\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} & c_{15} & a_1 \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} & c_{25} & a_2 \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & c_{34} & c_{35} & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 & Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 2 & 4 & 1 & 310 \\ 3 & 8 & 6 & 10 & 5 & 360 \\ 1 & 2 & 3 & 5 & 4 & 230 \\ 140 & 190 & 180 & 170 & 220 & Z \end{bmatrix}.$$

Составить экономико-математическую модель задачи и найти методом потенциалов оптимальный план перевозки груза, при котором общие транспортные затраты будут наименьшими.

Решение

Строим математическую модель задачи. Через X_{ij} обозначим объем продукции, доставленной от поставщика A_i (i=l,2,3) потребителю B_j ($j=\overline{1,5}$). Отметим, что в данном случае сумма количества продукции, которую могут отгрузить все поставщики, совпадает с суммой потребностей потребителей:

$$310+360+230=140+190+180+170+220 = 900 .$$

Значит, задача закрытого типа и имеет решение. Математическая модель задачи принимает вид:

$$Z=\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{5} C_{ij}X_{ij} \to \min; \tag{9.7}$$

$$\begin{cases} X_{11}+X_{12}+X_{13}+X_{14}+X_{15}=310,\\ X_{21}+X_{22}+X_{23}+X_{24}+X_{25}=360,\\ X_{31}+X_{32}+X_{33}+X_{34}+X_{35}=230,\\ X_{11}+X_{21}+X_{31}=140,\\ X_{12}+X_{22}+X_{32}=190,\\ X_{13}+X_{23}+X_{33}=180,\\ X_{14}+X_{24}+X_{34}=170,\\ X_{15}+X_{25}+X_{35}=220, \end{cases} \tag{9.8}$$

$$X_{ij}\ge 0\ (i=1,2,3;\ \ j=\overline{1,5})\,. \tag{9.9}$$

Строим начальную распределительную таблицу 9. 9:

Таблица 9.9

B_j / A_i	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	a_i	U_i
A_1	5	3	2 **90**	4	1 **220**	310	-4
A_2	+ 3 *	– 8 **100**	6 **90**	10 **170**	5	360	0
A_3	– 1 **140**	+ 2 **90**	3	5	4	230	-6
b_j	140	190	180	170	220	900	
V_j	7	8	6	10	5		

Построенному опорному решению отвечают затраты:

$Z_1 = \quad 90·2+220·1+100·8+90·6+170·10+140·1+90·2 = 3760.$

Проверим полученный опорный план на оптимальность. Для этого i-й строке и j-му столбцу ставим в соответствие числа U_i и V_j (потенциалы). Для каждой базисной переменной X_{ij} потенциалы должны удовлетворять условию

$U_i + V_j = C_{ij}$. Получаем систему:

$U_1+V_3 = 2,$ Так как система состоит из 7 уравнений, а неизвестных

$U_1+V_5 = l,$ 8, то, чтобы найти численное решение этой системы,
$U_2+V_2 = 8,$ одно из неизвестных зададим произвольно, тогда

$U_2+V_3 = 6,$ остальные переменные найдутся из системы однозначно.

$U_2+V_4 = 10,$

$U_3+V_1 = 1,$

$U_3+V_2 = 2.$

Пусть $U_2 = 0$, тогда $V_2 = 8$, $V_3 = 6$, $V_4 = 10$, $U_1 = -4$, $U_3 = -6$, $V_1 = 7$,

$V_5 = 5$.

Теперь для небазисных переменных (свободных клеток) найдем оценки

$$S_{ij} = C_{ij} - (U_i + V_j) :$$

$S_{11} = 5 - (-4 + 7) = 2$ $S_{21} = 3 - (0 + 7) = -4$

$S_{12} = 3 - (-4 + 8) = -1$ $S_{25} = 5 - (0 + 5) = 0$

$S_{14} = 4 - (-4 + 10) = -2$ $S_{33} = 3 - (-6 + 6) = 3$

$S_{34} = 5 - (-6 + 10) = l$

$S_{35} = 4 - (-6 + 5) = 5$

В силу критерия оптимальности опорного плана (все оценки S_{ij} неотрицательны) делаем вывод, что построенный план не оптимален, т. к. среди оценок есть отрицательные. В базис введем переменную X_{21} (отвечающую наибольшей по модулю отрицательной оценке) и строим замкнутый контур с вершинами в загруженных клетках. Присваиваем клеткам в вершинах контура поочередно по часовой стрелке знаки «+» и «–», начиная с (2,1), которой присваиваем знак «+». Выбираем наименьшее значение из клеток со знаком

« –» (min (140,100) = 100) и перераспределим продукцию вдоль контура: прибавляя 100 к значениям в клетках со знаком «+» и вычитая из значений в клетках со знаком « –» В результате приходим к таблице 9.10.

Таблица 9. 10

B_j / A_i	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	a_i	U_i
A_1	5	3	2 **90**	4	1 **220**	310	−4
A_2	+ 3 **100**	8	6 **90**	– 10 **170**	5	360	0
A_3	– 1 **40**	2 **190**	3	+ 5 *	4	230	-2
b_j	140	190	180	170	220	900	
V_j	3	4	6	10	5		

Полученному решению отвечают затраты:

$Z_2 = 90\cdot2+220\cdot1+100\cdot3+90\cdot6+170\cdot10+40\cdot1+190\cdot2=3360.$

Проверяем полученный план на оптимальность и получаем, что $S_{34} = –3 < 0$. Значит, решение неоптимальное и строим в таблице 12 новый цикл пересчета для клетки (3,4). Так как $\min(170,40)=40=X_{31}$,то перераспределяем продукцию вдоль контура, прибавляя 40 к значениям в клетках со знаком «+» и вычитая из значений в клетках со знаком «–». В результате получаем таблицу 9. 11.

Таблица 9. 11

A_i \ B_j	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	a_i	U_i
A_1	5	3	– 2 **90**	+ 4 *	1 **220**	310	–4
A_2	3 **140**	8	+ 6 **90**	– 10 **130**	5	360	0
A_3	1	2 **190**	3	5 **40**	4	230	–5
b_j	140	190	180	170	220	900	
V_j	3	7	6	10	5		

Полученному решению отвечают затраты:

$$Z_3 = 90\cdot 2+220\cdot 1+140\cdot 3+90\cdot 6+130\cdot 10+190\cdot 2+40\cdot 5=3240.$$

Аналогично предыдущему проверяем полученный план на оптимальность. Получаем, что $S_{14} = -2 < 0$. Теперь для улучшения плана загрузим клетку (1,4). В итоге приходим к таблице 9.12.

Таблица 9.12

A_i \ B_j	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	a_i	U_i
A_1	5	3	2	+ 4 **90**	– 1 **220**	310	–6
A_2	3 **140**	8	6 **180**	– $\boxed{10}$ **40**	+ 5 *	360	0
A_3	1	2 **190**	3	5 **40**	4	230	–5
b_j	140	190	180	170	220	900	
V_j	3	7	6	10	7		

$$Z_4 = 90 \cdot 4 + 220 \cdot 1 + 140 \cdot 3 + 180 \cdot 6 + 40 \cdot 10 + 190 \cdot 2 + 40 \cdot 5 = 3060.$$

Среди оценок свободных клеток имеем $S_{25} = -2<0$, следовательно, полученный план перевозок не является оптимальным, и для его улучшения необходимо загрузить клетку (2,5). В итоге вычислений приходим к таблице 9.13.

Таблица 9.13

B_j / A_i	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	a_i	U_i
A_1	5	3	2	4 **130**	1 **180**	310	–4
A_2	3 **140**	8	б **180**	10	5 **40**	360	0
A_3	1	2 **190**	3	5 **40**	4	230	–3
b_j	140	190	180	170	220	900	
V_j	3	5	6	8	5		

$$Z_5 = 130\cdot4+180\cdot l+140\cdot3+180\cdot6+40\cdot5+190\cdot2+40\cdot5=2980.$$

Полученный план оказывается оптимальным, так как все оценки незагруженных клеток неотрицательны. По этому плану перевозок 1–й поставщик отправляет 130 ед. продукции потребителю B_4 и 180 ед. – B_5; 2–й поставщик – 140 ед. потребителю B_1, 180 ед. потребителю B_3 и 40 ед. потребителю B_5; 3–й поставщик – 190 ед. потребителю B_2 и 40 ед. потребителю B_4.

Вопросы для подготовки к экзамену

Тема 1. Обыкновенные дифференциальные уравнения

1 Основные сведения о ДУ. ДУ первого порядка. Задача Коши. Общее, частное и особое решения ДУ.
2 Дифференциальные уравнения первого порядка с разделяющимися переменными.
3 Однородные дифференциальные уравнения первого порядка.
4 Линейные дифференциальные уравнения первого порядка.
5 Дифференциальные уравнения высших порядков. Уравнения, допускающие понижения порядка.
6 Однородные линейные дифференциальные уравнения второго порядка,
7 Линейные дифференциальные уравнения второго порядка, свойства их решений.
8 Структура общего решения линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка.
9 Линейные однородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами.
10 Линейные неоднородные дифференциальные уравнения второго порядка. Структура их общего решения.
11 Метод вариации произвольных постоянных (метод Лагранжа) решения линейных неоднородных дифференциальных уравнений второго порядка.
12 Линейные неоднородные дифференциальные уравнения второго порядка с правой частью специального вида.
13 Нормальная система обыкновенных дифференциальных уравнений. Векторная запись системы. Метод исключения для решения нормальных систем обыкновенных дифференциальных уравнений.

Тема 2. Кратные и криволинейные интегралы

1 Двойные интегралы, их свойства и вычисление в декартовых координатах.
2 Тройные интегралы, их свойства и вычисление в декартовых координатах.
3 Понятие о криволинейных координатах, якобиане преобразования. Замена переменных в двойном и тройном интегралах.
4 Двойной интеграл в полярной системе координат.
5 Тройной интеграл в цилиндрической системе координат.
6 Тройной интеграл в сферической системе координат.
7 Приложения двойных и тройных интегралов.
8 Определение криволинейного интеграла 1-го рода, свойства, вычисление, применение.

9 Определение криволинейных интегралов 2-го рода, свойства, вычисление, применение.
10 Формула Грина.

Тема 3. Числовые и функциональные ряды

1 Числовые ряды. Сходимость ряда и его сумма.
2 Необходимый признак сходимости. Гармонический ряд.
3 Достаточные признаки сходимости рядов с неотрицательными членами: Даламбера, Коши, интегральный признак Коши, признаки сравнения.
4 Ряд Дирихле и его сходимость.
5 Знакочередующиеся ряды. Признак Лейбница.
6 Знакопеременные ряды. Абсолютная и условная сходимость.
7 Функциональные ряды. Основные понятия. Область сходимости.
8 Степенные ряды. Радиус и интервал сходимости. Теорема Абеля.
9 Разложение функций в степенные ряды. Ряд Тейлора и Маклорена.
10 Применение степенных рядов к приближенным вычислениям.
11 Разложение функций в ряды Фурье.

Тема 4. Теория вероятностей

1 Элементы комбинаторики.
2 Предмет и задачи теории вероятностей.
3 Пространство элементарных событий. Алгебра событий.
4 Классическое, статистическое, аксиоматическое и геометрическое определения вероятности события.
5 Теоремы сложения вероятностей.
6 Условная вероятность. Теоремы умножения вероятностей.
7 Формула полной вероятности. Формула Байеса.
8 Схема испытаний Бернулли. Формула Бернулли.
9 Предельные теоремы в схеме Бернулли: Пуассона, Муавра–Лапласа.
10 Наивероятнейшее число появлений события при повторных испытаниях по схеме Бернулли.
11 Случайные величины (СВ) дискретные и непрерывные.
12 Закон распределения СВ, ряд распределения дискретной случайной величины.
13 Функция распределения СВ и её свойства.
14 Числовые характеристики дискретных случайных величин и их свойства.
15 Законы распределения конкретных дискретных случайных величин, имеющих биномиальное распределение, геометрическое распределение, распределение Пуассона, их числовые характеристики.

16 Непрерывные случайные величины. Дифференциальная функция распределения непрерывной СВ (плотность распределения СВ), её свойства.
17 Непрерывные СВ, имеющие равномерное, показательное распределения, их числовые характеристики.
18 Непрерывные СВ, имеющие нормальное распределение, числовые характеристики нормального распределения.
19 Свойства и график плотности нормально распределенной СВ, вероятность попадания в интервал.

Тема 5. Элементы теории функции комплексной переменной

1 Определение функции комплексного переменного, понятие об однозначных и многозначных функциях комплексного переменного.
2 Производная функции комплексного переменного в точке. Условия Коши-Римана. Понятие об аналитических функциях.

Тема 6. Элементы операционного исчисления

1 Определение преобразования Лапласа, оригинал и изображение; соответствие между оригиналом и изображением.
2 Свойства преобразования Лапласа. Теоремы: линейности, подобия, смещения, запаздывания.
3 Теоремы дифференцирования и интегрирования оригинала и изображения.
4 Применение операционного исчисления к решению дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами и их систем.

Тема 7. Основные уравнения математической физики

1 Дифференциальные уравнения в частных производных. Основные понятия. Классификация линейных дифференциальных уравнений в частных производных.
2 Примеры основных уравнений математической физики. Понятие о граничных и начальных условиях.
3 Понятие о методе Фурье разделения переменных для решения уравнения колебаний ограниченной струны.
4 Понятие о методе Д’Аламбера решения уравнения колебаний бесконечной струны.

Тема 8. Математическая статистика

1 Предмет и задачи математической статистики. Генеральная и выборочная совокупности. Статистическое распределение выборки.
2 Полигон и гистограмма. Эмпирическая функция распределения и её свойства.

3 Числовые характеристики вариационных рядов. Точечные оценки параметров распределения по опытным данным.
4 Основные законы распределения СВ, используемых в математической статистике: распределение χ^2, Стьюдента, Фишера.
5 Интервальные оценки параметров распределения по опытным данным. Понятие доверительного интервала, доверительной вероятности.
6 Доверительный интервал для неизвестного математического ожидания нормально распределённой СВ при известной и неизвестной дисперсии.
7 Доверительный интервал для неизвестного среднего квадратичного отклонения.
8 Статистическая проверка гипотез, основные понятия.
9 Критерии согласия Пирсона, Колмогорова.
10 Функциональная, статистическая и корреляционная зависимости.
11 Коэффициент корреляции.

Тема 9. Математическое программирование

1 Базисные и опорные решения системы линейных уравнений.
2 Постановка задачи линейного программирования (ЗЛП), различные формы записи ЗЛП.
3 Графический метод решения задачи линейного программирования.
4 Симплексный метод решения задачи линейного программирования.
5 Двойственность в линейном программировании. Правила построения двойственной задачи.
6 Основные теоремы двойственности.
7 Постановка и математическая модель транспортной задачи (ТЗ).
8 Открытая и закрытая модели транспортной задачи.
9 Методы северо-западного угла и минимального элемента построения плана ТЗ.
10 Метод потенциалов решения ТЗ.
11 Сетевой график комплекса операций. Временные параметры сетевого графика.
12 Основные понятия теории игр: стратегия игрока, платёжная матрица, седловая точка матричной игры, упрощение матричной игры.
13 Сведение матричной игры к ЗЛП.
14 Статистические игры. Критерии Байеса, Лапласа, Вальда, Сэвиджа, Гурвица решения статистических игр.
15 Задачи нелинейного программирования (ЗНП). Метод множителей Лагранжа.
16 Понятие о градиентных методах решения ЗНП.
17 Элементы финансово-экономических расчетов. Простые проценты. Сложные проценты. Формулы наращения.

Список использованных источников

1 Гусак, А.А. Высшая математика: в 2 т / А.А. Гусак. – Минск: Выш.шк.,1976. – 2003. – Т.2 – 327 с.

2 Гмурман, В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика / В.Е. Гмурман. – М.: Высшая школа, 1977 – 2003. – 479 с.

3 Гмурман, В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике / В.Е. Гмурман. – М.: Высшая школа, 1975–2003. – 400 с.

4 Сборник индивидуальных заданий по теории вероятностей и математической статистике / А.П. Рябушко [и др.]; под общ. ред. А.П. Рябушко. – Минск: Выш.шк., 1992. – 191 с.

5 Шнейдер, В.Е. Краткий курс высшей математики / В.Е.Шнейдер, А.С. Слуцкий, А.С. Шумов: в 2т. – М.: Высшая школа, 1978. – Т.2. – 328 с.

6 Данко, П.Е. Высшая математика в упражнениях и задачах / Данко, П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. – М.: Высшая школа,1980 г. – Ч.1 – 320 с.; Ч.2. – 400 с.

7 Письменный, Д.Т. Конспект лекций по высшей математике: полный курс / Д.Т. Письменный. – 4-е изд. – М.: Айрис-пресс, 2006. – 608с.

8 Кузнецов, А.В. Высшая математика: Математическое программмирование.: учебник – 2-е изд., перераб. и доп. / А.В. Кузнецов, В.А. Сакович, Н.И. Холод; под общ. ред. А.В. Кузнецова. – Минск: Выш. шк., 2001. – 351 с.

9 Кузнецов, А.В. Руководство к решению задач по математическому программированию: учеб. пособие / А.В. Кузнецов, Н.И. Холод, Л.С. Костевич; под общ. ред. А.В. Кузнецова. – 2-е изд., перераб. и доп. – Минск: Выш. шк., 2001. – 448 с.

Учебное издание

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

Методические указания

В трех частях

Часть 2

Составители:
Гарист Владислав Эдуардович
Рыдевская Людмила Ивановна
Гребенцов Юрий Михайлович

Редактор *А.А. Щербакова*
Технический редактор *Н.Г. Тверская*

Подписано в печать 19.12.2014. Формат 60×84 1/16.
Бумага офсетная. Гарнитура Таймс. Ризография.
Уч.-изд. л. 3,5. Усл. печ. л. 4,4.
Тираж 39 экз. Заказ 162.

Учреждение образования
«Могилевский государственный университет продовольствия».
Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя,
распространителя печатных изданий № 1/272 от 04.04.2014 г.
Пр-т Шмидта, 3, 212027, Могилев.

Отпечатано в учреждении образования
«Могилевский государственный университет продовольствия».
Пр-т Шмидта, 3, 212027, Могилев.