Министерство образования республики Беларусь

Учреждение образования
«Могилевский государственный университет продовольствия»

Кафедра высшей математики

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

Методические указания
для подготовки к аудиторной контрольной работе
студентов заочной формы получения высшего образования
по учебной дисциплине «Высшая математика»

В трех частях

Часть I

Могилев 2015

УДК 519.21
ББК 22.1

Рассмотрено и рекомендовано к изданию
на заседании кафедры высшей математики
Протокол № 7 от 15. 01. 2015.

Составители:
д.ф.-м. н., доцент А.М. Гальмак
к.ф.-м. н., доцент С.В. Подолян
старший преподаватель О.А. Шендрикова
старший преподаватель И.В. Юрченко

Рецензент
к.ф.-м. н., доцент Г.Н. Воробьев

УДК 51
ББК 22.1

Студенты первого курса заочной формы получения высшего образования на базе общего среднего образования и второго курса на базе среднего специального образования для выполнения аудиторной контрольной работы по курсу «Высшая математика» должны **знать и уметь**:

Тема 1. Элементы линейной и векторной алгебры, аналитической геометрии

1 Знать определение и уметь вычислять определители второго и третьего порядков.

2 Определять элемент заданного определителя по известным индексам этого элемента (номеру строки и номеру столбца).

3 Определять элементы главной диагонали, побочной диагонали заданного определителя.

4 Знать и использовать при вычислении определителей свойства определителей.

5 Находить минор заданного элемента определителя.

6 Находить алгебраическое дополнение заданного элемента определителя.

7 Знать определение матрицы.

8 Для заданных матриц находить:

- их сумму и разность, если они существуют;
- их произведение, если оно существует.

9 Для заданной матрицы находить:

- произведение ее на данное число;
- транспонированную матрицу.

10 Знать определение обратной матрицы и находить для заданной матрицы обратную ей матрицу.

11 Решать систему линейных уравнений по правилу Крамера.

12 Решать систему линейных уравнений матричным методом.

13 Находить координаты вектора, если известны координаты его начала и конца.

14 Для вектора, заданного координатами, находить его произведение на данное число.

15 Для двух векторов одинаковой размерности, заданных координатами:

- находить длины каждого из них;
- находить координаты их суммы;
- находить координаты их разности;
- находить скалярное произведение;
- находить косинус угла между ними;
- находить векторное произведение;
- вычислять площадь параллелограмма, построенного на этих векторах;
- вычислять площадь треугольника, построенного на этих векторах;
- проверить условие коллинеарности векторов;

- проверить условие перпендикулярности векторов.

16 Для трех векторов одинаковой размерности, заданных координатами:

- находить смешанное произведение;
- проверить условие компланарности векторов;
- вычислять объем параллелепипеда, построенного на этих векторах;
- вычислять объем треугольной пирамиды, построенной на этих векторах.

17 Определять координаты середины отрезка, если известны координаты его концов.

18 Для прямой, заданной уравнением:

- устанавливать, принадлежит ли данная точка прямой;
- находить точки пересечения прямой с координатными осями;
- определять нормальный вектор прямой;
- определять угловой коэффициент прямой.

19 Находить угловой коэффициент прямой параллельной (перпендикулярной) данной прямой.

20 Находить точки пересечения двух прямых, заданных уравнениями.

21 Находить расстояние от данной точки до данной прямой, заданной уравнением.

22 Находить косинус угла между двумя прямыми, заданными уравнениями.

23 Составлять уравнение прямой:

- по заданному угловому коэффициенту и проходящей через заданную точку;
- проходящей через две заданные точки;
- в отрезках по осям Ox и Oy;
- проходящей через точку перпендикулярно заданному вектору;
- проходящей через точку параллельно заданному вектору;
- проходящей через точку параллельно заданной прямой;
- проходящей через точку перпендикулярно заданной прямой.

24 Приводить уравнение прямой:

- к общему виду;
- к уравнению с угловым коэффициентом;
- к каноническим уравнениям;
- к параметрическим уравнениям.

25 Для данной плоскости, заданной уравнением, определять:

- проходит ли плоскость через данную точку;
- нормальный вектор плоскости.

26 Составлять уравнение плоскости:

- проходящей через данную точку перпендикулярно данному вектору;
- проходящей через три данные точки;
- в отрезках по осям Ox, Oy и Oz;
- проходящей через точку перпендикулярно заданной прямой.

27 Находить косинус угла между двумя плоскостями, заданными уравнениями.

28 Находить расстояние от данной точки до данной плоскости, заданной уравнением.

29 Находить направляющий вектор прямой, заданной каноническими уравнениями.

30 Составлять уравнение прямой в пространстве:

- проходящей через точку и параллельно вектору;
- проходящей через две заданные точки;
- проходящей через точку перпендикулярно заданной плоскости.

31 Находить косинус угла между двумя прямыми, заданными каноническими уравнениями.

32 Проверять условие параллельности прямой и плоскости в пространстве.

33 Проверять условие перпендикулярности прямой и плоскости в пространстве.

Задачи для самостоятельного решения

1 Вычислить определитель второго прядка $\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 7 \end{vmatrix}$.

2 Вычислить определитель третьего прядка $\begin{vmatrix} 6 & -1 & 0 \\ 7 & 4 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$.

3 Даны матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} 8 & -1 \\ -4 & 0 \\ 6 & 7 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 14 & 3 \\ -4 & -5 \\ 11 & 5 \end{pmatrix}.$$

Найти: $A + B$; $B - A$; $2 \cdot A$.

4 Найти произведения AB и BA матриц:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 9 & 7 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}.$$

5 Найти обратную матрицу для матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$.

6 Найти обратную матрицу для матрицы $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 9 & 7 & 6 \\ 5 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

7 Проверить, совместна ли система уравнений и решить ее по правилу Крамера:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 2, \\ 2x_1 + x_2 = 1. \end{cases}$$

8 Проверить, совместна ли система уравнений и решить ее:

1) по правилу Крамера;

2) матричным методом;

3) методом Гаусса

$$\begin{cases} x + 2y - z = 2, \\ 2x - 3y + 2z = 2, \\ 3x + y + z = 8. \end{cases}$$

9 Найти координаты вектора $\overrightarrow{AB}$, если известны координаты точек A(– 6; 7; 3), B(– 1; 3; 5).

10 Найти длину вектора $\vec{a} = (2; 4; 1)$.

11 Найти направляющие косинусы для вектора $\vec{c} = (1; 9; -1)$.

12 Вычислить скалярное произведение векторов $\vec{a} = (2;\ 4;\ 1)$ и $\vec{b} = (3; -5;\ 1)$.

13 Вычислить косинус угла между векторами $\vec{a} = (-2;\ 4;\ 1)$ и $\vec{b} = (3;\ 5;\ 1)$.

14 Вычислить векторное произведение векторов $\vec{a} = (5;\ 4;\ 1)$ и $\vec{b} = (-3;\ 2;\ 1)$.

15 Найти смешанное произведение векторов $\vec{a} = (2;\ 3;\ 1)$, $\vec{b} = (3; -1;\ 1)$ и $\vec{n} = (1;\ 0;\ 1)$.

16 Найти координаты середины отрезка AB, если координаты его концов A(– 7; 8; 1) и B(3; 3; 5).

17 Проверить, принадлежит ли точка A(8; 15) прямой $2x - y - 1 = 0$.

18 Найти точки пересечения прямой $8x - 5y - 1 = 0$ с осями координат.

19 Привести уравнение прямой $-4x + 3y + 3 = 0$ к нормальному виду.

20 Найти угловой коэффициент прямой параллельной прямой $4x - 2y + 3 = 0$.

21 Найти угловой коэффициент прямой перпендикулярной прямой $-x - y - 15 = 0$.

22 Найти точку пересечения прямых $x - y - 8 = 0$ и $x - y - 9 = 0$.

23 Проверить, являются ли прямые $\frac{x-1}{-2} = \frac{y-2}{4} = \frac{z}{2}$ и $\frac{x+1}{-1} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z}{2}$ перпендикулярными.

24 Вычислить расстояние от точки $H(-6; 2)$ до прямой $x - 5y - 1 = 0$.

25 Вычислить расстояние от точки $H(-1; 1; 5)$ до плоскости $2x - 3y - 3z + 1 = 0$.

26 Проверить, лежат ли прямые $\frac{x-1}{4} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z}{6}$ и $\frac{x+1}{-4} = \frac{y+2}{1} = \frac{z}{-6}$ в одной плоскости.

27 Найти точку пересечения прямой $\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z+4}{2}$ и плоскости $2x - 4y + 5z - 1 = 0$.

28. Вычислить эксцентриситет эллипса $\frac{16x^2}{9} + \frac{9y^2}{25} = 1$.

Образцы решений

Задание 1. Вычислить определитель 2-го порядка $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{vmatrix}$.

РЕШЕНИЕ

Вычислим определитель 2-го порядка по формуле:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = a \cdot d - b \cdot c .$$

Для нашей задачи имеем:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 2 \cdot 4 - 3 \cdot (-1) = 8 + 3 = 11.$$

Задание 2. Вычислить определитель 3-го порядка, пользуясь правилом треугольников

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

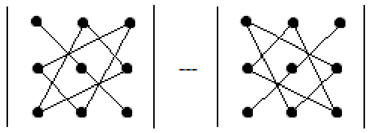
РЕШЕНИЕ

Вычисление определителя 3-го порядка выполняется по правилу

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}{\cdot}a_{22}{\cdot}a_{33} + a_{12}{\cdot}a_{23}{\cdot}a_{31} + a_{21}{\cdot}a_{32}{\cdot}a_{13} -$$

$$- (a_{13}{\cdot}a_{22}{\cdot}a_{31} + a_{12}{\cdot}a_{21}{\cdot}a_{33} + a_{23}{\cdot}a_{32}{\cdot}a_{11}).$$

При вычислении определителя 3-го порядка удобно пользоваться правилом треугольников (или Саррюса), которое символически можно записать так:



$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 2{\cdot}2{\cdot}0 + 3{\cdot}1{\cdot}3 + 0{\cdot}1{\cdot}(-1) - ((-1){\cdot}2{\cdot}3 + 1{\cdot}1{\cdot}2 + 3{\cdot}0{\cdot}0) =$$

$$= 0 + 9 - 0 + 6 - 2 - 0 = 13.$$

Задание 3. Вычислить определитель 3-го порядка методом разложения по элементам второй строки

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

РЕШЕНИЕ

Вычисление определителя 3-го порядка методом разложения по элементам второй строки проводится по следующей формуле:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{21} \cdot A_{21} + a_{22} \cdot A_{22} + a_{23} \cdot A_{23},$$

где A_{ij} — алгебраические дополнения элементов a_{ij} в данном определителе.

$A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$, а M_{ij} – миноры, соответствующие элементам a_{ij} определителя, которые являются определителями второго порядка, получаемые из данного определителя путем вычеркивания строки i и столбца j.

Следовательно, мы имеем:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0{\cdot}A_{21} + 2{\cdot}A_{22} + 1{\cdot}A_{23} = 0{\cdot}(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} +$$

$$+ 2\cdot(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} + 1\cdot(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 0 + 2\cdot1\cdot(2\cdot0 - (-1)\cdot3) +$$

$$+ 1\cdot(-1)\cdot(2\cdot1 - 3\cdot3) = 6 + 7 = 13.$$

Задание 4. Найти произведение двух матриц A и B, если

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

РЕШЕНИЕ

Операция умножения двух матриц вводится только для случая, когда *число столбцов первой матрицы равно числу строк второй матрицы.*

Произведением AB матрицы $A_{m\times n}$ на матрицу $B_{n\times k}$ называется матрица C размера $m\times k$

$$C = AB = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1k} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{m1} & c_{m2} & \dots & c_{mk} \end{pmatrix},$$

где $c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{in}b_{nj}$, т.е. каждый элемент c_{ij}, стоящий на пересечении i-й строки и j-го столбца равен сумме попарных произведений элементов i-й строки матрицы A на элементы j-го столбца матрицы B.

Рассмотрим на примере:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}_{2\times3} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{pmatrix}_{3\times2} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{32} \end{pmatrix}_{2\times2}.$$

В нашем случае имеем:

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1\cdot 3+2\cdot 2+3\cdot 1 & 1\cdot 5+2\cdot(-1)+3\cdot 2 \\ 4\cdot 3+5\cdot 2+6\cdot 1 & 4\cdot 5+5\cdot(-1)+6\cdot 2 \\ (-1)\cdot 3+0\cdot 2+2\cdot 1 & (-1)\cdot 5+0\cdot(-1)+2\cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 9 \\ 28 & 27 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Задание 5. Найти матрицу A^{-1}, обратную для матрицы A, где $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$.

РЕШЕНИЕ

Обратная матрица находится по формуле:

$$A^{-1} = \frac{A^*}{\det A},$$

где $A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix}$ – союзная матрица к матрице A, а $\det A$ – определитель, составленный из элементов данной матрицы. Подставляя в формулу, получаем:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix}.$$

В нашем случае:

1) Находим определитель данной матрицы:

$$\det A = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = -3-(-2) = -3+2 = -1 \neq 0,$$

следовательно обратная матрица существует.

2) Находим союзную матрицу к матрице A, т.е. A^*. Для этого найдем алгебраические дополнения элементов a_{ij} данной матрице (см. пример 3):

$A_{11} = (-1)^{1+1}\cdot(-1) = 1\cdot(-1) = -1;$

$A_{21} = (-1)^{2+1}\cdot 2 = (-1)\cdot 2 = -2;$

$A_{12} = (-1)^{1+2}\cdot(-1) = (-1)\cdot(-1) = 1;$

$A_{22} = (-1)^{2+2}\cdot 3 = 1\cdot 3 = 3.$

Получаем:

$$A^* = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

3) Подставляем полученные результаты в формулу и находим обратную матрицу A^{-1}:

$$A^{-1} = \frac{1}{-1}\cdot\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = -1\cdot\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}.$$

Задание 6. Проверить, является ли система линейных уравнений

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 4, \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 4, \\ x_1 + 3x_2 + 9x_3 = 2. \end{cases}$$

совместной и решить ее, в случае совместности:

а) решить систему по формулам Крамера;

б) матричным методом. Проверить правильность нахождения обратной матрицы матричным умножением ($AA^{-1} = A^{-1}A = E$);

в) методом Гаусса.

РЕШЕНИЕ

Совместность данной системы докажем, используя теорему Крамера, а именно: если главный определитель системы отличен от нуля, то система имеет единственное решение. Определитель системы

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{vmatrix} = 18 + 3 + 4 - 2 - 12 - 9 = 2 \neq 0.$$

Значит, система совместная.

а) Решим систему уравнений по формулам Крамера:

$$x = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad y = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \quad z = \frac{\Delta_3}{\Delta},$$

где Δ_1**,** Δ_2**,** Δ_3 – определители, которые получаются из определителя системы Δ посредством замены свободными членами элементов соответственно первого, второго и третьего столбцов.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{vmatrix} = 2.$$

Вычислим Δ_1, Δ_2, Δ_3:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 9 \end{vmatrix} = 4; \; \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 1 & 4 & 4 \\ 1 & 2 & 9 \end{vmatrix} = 6; \; \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = -2.$$

Отсюда

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{4}{2} = 2; \; x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{6}{2} = 3; \; x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{-2}{2} = -1.$$

Ответ: $x_1 = 2$, $x_2 = 3$, $x_3 = -1$.

б) Решим систему линейных уравнений матричным методом. Введем обозначения:

$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{bmatrix}$ – матрица системы, $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ – матрица-столбец из неизвестных, $B = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}$ – матрица-столбец из свободных членов системы.

Тогда заданную систему можно записать в виде: $AX = B$, откуда $X = A^{-1}B$, где A^{-1} – обратная матрица. Найдем A^{-1}, зная, что

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix},$$

где A_{ij} – алгебраические дополнения элементов a_{ij} матрицы A.

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij},$$

где M_{ij} – миноры элементов a_{ij} матрицы A.

Вычислим определитель матрицы коэффициентов системы

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{vmatrix} = 2.$$

Так как $\det A \neq 0$, то существует обратная матрица. Найдем ее.

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 9 \end{vmatrix} = 18 - 2 = 6,\ A_{12} = -5,\ A_{13} = 1,$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 9 \end{vmatrix} = -(9 - 3) = -6,\ A_{22} = 8,\ A_{23} = -2,$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 2 = 2,\ A_{32} = -3,\ A_{33} = 1.$$

Значит,

$$A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 6 & -6 & 2 \\ -5 & 8 & -3 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Проверим правильность вычисления обратной матрицы, используя матричное умножение, т.е. $AA^{-1} = A^{-1}A = E.$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} 6 & -6 & 2 \\ -5 & 8 & -3 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} 6-5+1 & -6+8-2 & 2-3+1 \\ 6-10+4 & -6+16-8 & 2-6+4 \\ 6-15+9 & -6+24-18 & 2-9+9 \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = E.$$

Аналогично доказывается, что $A^{-1}A = E$. Значит, матрица A^{-1} найдена верно. Тогда

$$X = A^{-1}B = \frac{1}{2}\cdot\begin{bmatrix} 6 & -6 & 2 \\ -5 & 8 & -3 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\cdot\begin{bmatrix} 24-24+4 \\ -20+32-6 \\ 4-8+2 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\cdot\begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Таким образом, $x_1 = 2$; $x_2 = 3$; $x_3 = -1$, тройка чисел $\{2, 3, -1\}$ является решением системы.

Ответ: $\{2, 3, -1\}$.

в) Решим систему линейных уравнений методом Гаусса.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 4, \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 4, \\ x_1 + 3x_2 + 9x_3 = 2, \end{cases} \Rightarrow \left| \begin{array}{l} \textit{Первое уравнение системы умножим на } (-1) \\ \textit{и сложим со вторым уравнением, результат} \\ \textit{сложения запишем вторым уравнением в новой} \\ \textit{системе. Затем первое уравнение системы умножим} \\ \textit{на } (-1) \textit{ и сложим с третьим уравнением системы,} \\ \textit{результат запишем третьим уравнением.} \end{array} \right| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 4, \\ \quad x_2 + 3x_3 = 0, \\ \quad 2x_2 + 8x_3 = -2, \end{cases} \Rightarrow \left| \begin{array}{l} \textit{Умножим второе уравнение системы на } (-2) \\ \textit{и сложим с третьим уравнением, результат} \\ \textit{запишем третьим уравнением эквивалентно} \\ \textit{преобразованной системы.} \end{array} \right| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 4, \\ \quad x_2 + 3x_3 = 0, \\ \qquad 2x_3 = -2, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 4 - x_2 - x_3, \\ x_2 = -3x_3, \\ x_3 = -1. \end{cases} \begin{cases} x_1 = 4 - x_2 - x_3, \\ x_2 = -3x_3, \\ x_3 = -1. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2, \\ x_2 = 3, \\ x_3 = -1. \end{cases}$$

Ответ: $\{2, 3, -1\}$.

Задание 7. Найти длину вектора $\overrightarrow{AB}$, если $A(1; 2; 3)$, $B(4; 6; 3)$.

РЕШЕНИЕ

Для нахождения длины заданного вектора вначале найдем его координаты по формуле $\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A)$, где $A(x_A; y_A; z_A)$ и $B(x_B; y_B; z_B)$. Затем по формуле $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$, где a_1, a_2, a_3 – координаты вектора $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$, найдем его длину. В нашем случае имеем:

$\overrightarrow{AB}$ = (4 – 1; 6 – 2; 3 – 3) = (3; 4; 0), тогда, подставляя координаты в формулу нахождения длины вектора, получаем:

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{3^2+4^2+0^2} = \sqrt{9+16+0} = \sqrt{25} = 5.$$

Задание 8. Вычислить скалярное произведение векторов $(\vec{a}, \vec{b})$, если $\vec{a}$ = (8; 4; 9) и $\vec{b}$ = (2; 6; 1).

РЕШЕНИЕ

Для вычисления скалярного произведения векторов пользуются следующей формулой:

$$(\vec{a}, \vec{b}) = \vec{a}\cdot\vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3,$$

где a_1, a_2, a_3 – координаты вектора $\vec{a}$, а b_1, b_2, b_3 – координаты вектора $\vec{b}$. В нашем случае имеем:

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = 8\cdot2 + 4\cdot2 + 9\cdot1 = 16 + 24 + 9 = 49.$$

Задание 9. Найти cosα между векторами $\vec{a}$ = (2; 1; 3) и $\vec{b}$ = (1; 3; 2).

РЕШЕНИЕ

Для того чтобы найти косинус угла между векторами, воспользуемся следующей формулой:

$$\cos\alpha = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|},$$

где в числителе стоит скалярное произведение данных векторов (см. пример 8), а в знаменателе произведение их длин (см. пример 7). Найдем вначале скалярное произведение данных векторов:

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = 2\cdot1 + 1\cdot3 + 3\cdot2 = 2 + 3 + 6 = 11.$$

Теперь найдем их длины:

$$|\vec{a}| = \sqrt{2^2+1^2+3^2} = \sqrt{4+1+9} = \sqrt{14};$$

$$|\vec{b}| = \sqrt{1^2+3^2+2^2} = \sqrt{1+9+4} = \sqrt{14}.$$

Подставляем найденные значения в формулу:

$$\cos\alpha = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|} = \frac{11}{\sqrt{14}\cdot\sqrt{14}} = \frac{11}{14}.$$

Задание 10. По координатам вершин пирамиды $A_1A_2A_3A_4$ найти:

а) косинус угла между ребрами A_1A_2 и A_1A_4;
б) площадь грани $A_1A_2A_3$;
в) объем пирамиды;

г) уравнение плоскости $A_1A_2A_3$;

д) уравнение высоты, опущенной из точки A_4 на грань $A_1A_2A_3$, и ее длину.

$A_1(0;\ 4;\ 5)$; $A_2(3;\ –\ 2;\ 1)$; $A_3(4;\ 5;\ 6)$; $A_4(3;\ 3;\ 2)$.

РЕШЕНИЕ

а) Угол между ребрами A_1A_2 и A_1A_4 находим как угол между двумя векторами $\overrightarrow{A_1A_2}$ и $\overrightarrow{A_1A_4}$. Для этого требуется знать координаты векторов $\overrightarrow{A_1A_2}$ и $\overrightarrow{A_1A_4}$. Найдем их:

$$\overrightarrow{A_1A_2} = (x_2 - x_1;\ y_2 - y_1;\ z_2 - z_1) = (3 – 0;\ 2 – 4;\ 1 – 5) = (3;\ – 6;\ – 4);$$

$$\overrightarrow{A_1A_4} = (x_4 - x_1;\ y_4 - y_1;\ z_4 - z_1) = (3 – 0;\ 3 – 4;\ 2 – 5) = (3;\ – 1;\ – 3).$$

Косинус угла между двумя векторами $\vec{a} = (a_1;\ a_2;\ a_3)$ и $\vec{b} = (b_1;\ b_2;\ b_3)$ найдем по формуле

$$\cos\varphi = \frac{\vec{a}\vec{b}}{|\vec{a}|\ |\vec{b}|} = \frac{a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}\ \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}.$$

Для данных векторов имеем:

$$\cos\varphi = \frac{9 + 6 + 12}{\sqrt{9 + 36 + 16}\ \sqrt{9 + 1 + 9}} = \frac{27}{\sqrt{61}\ \sqrt{19}}\ .$$

б) Известно, что модуль векторного произведения $\vec{a}\times\vec{b}$ численно равен площади параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Тогда площадь треугольника

$$S = \frac{1}{2}\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|.$$

Так как векторы $\overrightarrow{A_1A_2}$ и $\overrightarrow{A_1A_3}$:

$$\vec{a} = \overrightarrow{A_1A_2} = (3;\ – 6;\ – 4);$$

$$\vec{b} = \overrightarrow{A_1A_3} = (4;\ 1;\ 1),$$

то

$$\vec{a}\times\vec{b} = \overrightarrow{A_1A_2}\times\overrightarrow{A_1A_3} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & -6 & -4 \\ 4 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \vec{i}\begin{vmatrix} -6 & -4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} 3 & -6 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= 2\vec{i} - 19\vec{j} + 27\vec{k}.$$

Значит, $\vec{a}\times\vec{b} = (– 2;\ – 19;\ 27)$.

$$\left|\vec{a}\times\vec{b}\right| = \sqrt{(-2)^2 + (-19)^2 + (27)^2} = \sqrt{1094}.$$

Итак,

$$S_{A_1A_2A_3} = \frac{1}{2}\left|\vec{a}\times\vec{b}\right| = \frac{1}{2}\sqrt{1094}\text{ (ед. кв.).}$$

в) Объем пирамиды найдем по формуле

$$V = \frac{1}{6}\left|\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}\right| = \pm\frac{1}{6}\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix},$$

где $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$, $\vec{b} = (b_1; b_2; b_3)$, $\vec{c} = (c_1; c_2; c_3)$

Найдем координаты векторов $\overrightarrow{A_1A_2}$, $\overrightarrow{A_1A_3}$, $\overrightarrow{A_1A_4}$:

$$\overrightarrow{A_1A_2} = (3; -6; -4),\ \overrightarrow{A_1A_3} = (4; 1; 1),\ \overrightarrow{A_1A_4} = (3; -1; -3).$$

Тогда

$$V = \pm\frac{1}{6}\begin{vmatrix} 3 & -6 & -4 \\ 4 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & -3 \end{vmatrix} = 11\frac{1}{3}\text{ (ед.куб.).}$$

г) Составим уравнение грани $A_1A_2A_3$ как уравнение плоскости, которая проходит через три точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$; $M_1(x_1, y_1, z_1)$; $M_2(x_2, y_2, z_2)$:

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ x_1-x_0 & y_1-y_0 & z_1-z_0 \\ x_2-x_0 & y_2-y_0 & z_2-z_0 \end{vmatrix} = 0.$$

Для точек A_1, A_2, A_3 имеем:

$$\begin{vmatrix} x-0 & y-4 & z-5 \\ 3-0 & -2-4 & 1-5 \\ 4-0 & 5-4 & 6-5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x-0 & y-4 & z-5 \\ 3 & -6 & -4 \\ 4 & 1 & 1 \end{vmatrix} = x(-2)-(y-4)\cdot 19 + (z-5)\cdot 27 =$$

$= -2x - 19y + 76 + 27z - 135 = -2x - 19y + +27z - 59 = 0.$

Таким образом, $-2x - 19y + 27z - 59 = 0$ – уравнение грани $A_1A_2A_3$.

д) Из уравнения плоскости $A_1A_2A_3$ найдем нормальный вектор плоскости $\bar{n} = (-2; -19; 27)$. Этот вектор является направляющим вектором для высоты, опущенной из точки $A_4(3; 3; 2)$ на грань $A_1A_2A_3$, т.е. $\bar{l} = (-2;\ -19;\ 27)$. Уравнение высоты имеет вид

$$\frac{x-3}{-2} = \frac{y-3}{-13} = \frac{z-2}{27}.$$

Длину высоты, опущенной из точки A_4 на грань $A_1A_2A_3$, найдем как расстояние от точки A_4 до плоскости $A_1A_2A_3$ по формуле

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Тогда

$$d = \frac{|(-2)\cdot 3 + (-19)\cdot 3 + 27\cdot 2 - 59|}{\sqrt{(-2)^2 + (-19)^2 + (27)^2}} = \frac{65}{\sqrt{1094}}.$$

Задание 11. Написать общее уравнение прямой на плоскости, проходящей через две точки $A(2; -1)$ и $B(-3;2)$.

РЕШЕНИЕ

Уравнение прямой на плоскости, проходящей через две точки, имеет вид:

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1},$$

где x_1 и y_1 – координаты одной из точек, а x_2 и y_2 –другой.

В нашем случае это уравнение примет вид:

$$\frac{y-(-1)}{2-(-1)} = \frac{x-2}{-3-2};$$

$$\frac{y+1}{3} = \frac{x-2}{-5}.$$

Отсюда, воспользовавшись свойством пропорции, получим:

$$-5y - 5 = 3x - 6,$$

$3x + 5y - 1 = 0$ – общее уравнение прямой AB.

Задание 12. Найти точку пересечения двух прямых на плоскости, заданных общими уравнениями:

$$l_1: 2x - 3y - 1 = 0; \; l_2: 3x + 2y - 8 = 0.$$

РЕШЕНИЕ

Для нахождения точки пересечения двух прямых нужно составить систему из их общих уравнений и решить ее относительно x и y. Полученные значения и будут координатами точки пересечения данных прямых. В нашем случае имеем:

$$\begin{cases} 2x - 3y - 1 = 0, \\ 3x + 2y - 8 = 0. \end{cases}$$

Для решения данной системы умножим первое уравнение системы на (-3), а второе на 2:

$$\begin{cases} -6x + 9y + 3 = 0, \\ 6x + 4y - 16 = 0. \end{cases}$$

Теперь сложим почленно первое и второе уравнения:

$$13y - 13 = 0.$$

Получили линейное уравнение, найдем из него y:

$$y = 1.$$

Чтобы найти x, подставим $y = 1$ в любое из исходных уравнений, например, во второе:

$$3x + 2 \cdot 1 - 8 = 0,$$
$$3x = 6,$$
$$x = 2.$$

Таким образом, точка пересечения данных прямых имеет следующие координаты: (2; 1).

Задание 13. Написать уравнение прямой, проходящей через точку $A(2; -1)$ параллельно вектору $\overrightarrow{l_0} = (3; 4)$.

РЕШЕНИЕ

Уравнение прямой, проходящей через данную точку $M_0(x_0; y_0)$ параллельно заданному вектору $\overrightarrow{l_0} = (m; n)$, имеет вид:

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n}.$$

В нашем случае получаем:

$$\frac{x - 2}{3} = \frac{y - (-1)}{4}.$$

Отсюда получаем:

$$4x - 8 = 3y + 3,$$
$$4x - 3y - 11 = 0 \text{ – искомое уравнение.}$$

Задание 14. Написать уравнение прямой, проходящей через точку $A(2; -1)$ перпендикулярно вектору $\vec{n} = (3; 4)$.

РЕШЕНИЕ

Уравнение прямой, проходящей через данную точку $M_0(x_0; y_0)$, перпендикулярно заданному вектору $\vec{n} = (A; B)$, имеет вид:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0.$$

В нашем случае получаем следующее уравнение:

$$3(x - 2) + 4(y - (-1)) = 0,$$
$$3x - 6 + 4y + 4 = 0,$$
$$3x + 4y - 2 = 0 \text{ – искомое уравнение прямой.}$$

Задание 15. Даны координаты точек: $A(1; 3; 6)$, $B(2; 2; 1)$, $C(-1; 0; 1)$, $D(-4; 6; -3)$. Найти:

а) уравнение плоскости β, проходящей через точку C перпендикулярно вектору $\overrightarrow{AB}$;

б) канонические уравнения прямой l, проходящей через точку D перпендикулярно плоскости β.

РЕШЕНИЕ

а) Уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$ перпендикулярно вектору $\vec{n} = (A; B; C)$, имеет вид

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.$$

Найдем координаты вектора $\overrightarrow{AB} = (2 - 1; 2 - 3; 1 - 6) = (1; - 1; - 5)$.

Составим уравнение плоскости, проходящей через точку $C(-1; 0; 1)$ перпендикулярно вектору $\overrightarrow{AB} = (1; - 1; - 5)$:

$$1\cdot(x - (- 1)) + (- 1)\cdot(y - 0) + (- 5)\cdot(z - 1)= 0,$$

$$x + 1 - y - 5z + 5 = 0,$$

$$x - y - 5z + 6 = 0 \text{ – уравнение плоскости } \beta.$$

б) Из условия перпендикулярности прямой l и плоскости β следует, что в качестве направляющего вектора прямой $\vec{s}$ можно взять нормальный вектор $\vec{n} = (1; - 1; - 5)$ плоскости β. Тогда уравнение прямой l с учетом уравнения

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p},$$

где x_0, y_0, z_0 – координаты точки прямой; m, n, p – координаты направляющего вектора прямой, запишется в виде

$$\frac{x + 4_0}{1} = \frac{y - 6}{-1} = \frac{z + 3}{-5}.$$

Тема 2. Введение в математический анализ

1 Находить область определения функции, заданной уравнением.

2 Определять область значений функции, заданной уравнением.

3 Вычислять пределы с применением основных теорем о пределах функций.

4 Раскрывать неопределенность вида $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$ и $\left(\frac{0}{0}\right)$.

5 Знать и применять формулы первого и второго замечательных пределов.

6 Раскрывать неопределенность вида $\left(\frac{0}{0}\right)$ с помощью эквивалентных бесконечно малых.

7 Находить область непрерывности функции.

8 Определять точки разрыва функции и их тип.

Задачи для самостоятельного решения

1 Найти область определения функций:

а) $f(x)=\sqrt{4-x^2}$;

б) $f(x)=\sqrt{x-2}+\sqrt{5-x}$;

в) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2-5x}}$;

г) $f(x)=\log_2(2-x)+2\log_x 5$.

2 Для функции $y = 5x$ найти обратную функцию.

3 Вычислить пределы:

а) $\lim\limits_{x\to 1}(7x^2-9x+1)$; б) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x^2-x-6}{x^2+x-6}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 9x}{5x}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{6}{x}+1\right)^x$;

д) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4x-7x^2}{\sin 8x}$; е) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+9x+1}{7x^2+2x-5}$.

4 Исследовать на непрерывность функцию $f(x)=\begin{cases} x+4, & x<-1; \\ x^2+2, & -1\le x<1; \\ -2x, & x\ge 1. \end{cases}$

5 Найти точки разрыва функции, выяснить их тип:

$$f(x)=\frac{|x-4|}{x-4}.$$

Образцы решений

Задание 1. Вычислить пределы функций, не используя правило Лопиталя.

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+4x+2}{8-x^2}$.

Числитель и знаменатель дроби не имеют конечного предела при $x\to\infty$, значит, выражение под знаком предела представляет собой при $x\to\infty$ неопределенность типа $\dfrac{\infty}{\infty}$. Разделим числитель и знаменатель на x^2 (наивысшую степень переменной x) и, на основании теорем о пределах, получим

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2+4x+2}{8-x^2} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{3+\frac{4}{x}+\frac{2}{x^2}}{\frac{8}{x^2}-1} = \frac{\lim\limits_{x\to\infty}3+\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4}{x}+\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2}{x^2}}{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{8}{x^2}-\lim\limits_{x\to\infty}1} =$$

$$= \frac{3+0+0}{0-1} = -3.$$

б) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{9+x}-3}{x^2+x}$.

Так как $\lim\limits_{x\to0}(\sqrt{9+x}-3) = 0$ и $\lim\limits_{x\to0}(x^2+x) = 0$, то имеем неопределенность типа $\frac{0}{0}$.

Преобразуем выражение под знаком предела, домножив числитель и знаменатель на $(\sqrt{9+x}-3)$ – выражение, сопряженное числителю.

$$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{9+x}-3}{x^2+x} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to0}\frac{(\sqrt{9+x}-3)\,(\sqrt{9+x}+3)}{x(x+1)\,(\sqrt{9+x}+3)} = \lim_{x\to0}\frac{(\sqrt{9+x})^2-3^2}{x(x+1)\,(\sqrt{9+x}+3)} =$$

$$= \lim_{x\to0}\frac{9+x-9}{x(x+1)\,(\sqrt{9+x}+3)} = \lim_{x\to0}\frac{x}{x(x+1)\,(\sqrt{9+x}+3)} = \lim_{x\to0}\frac{1}{(x+1)\,(\sqrt{9+x}+3)} =$$

$$= \frac{\lim\limits_{x\to0}1}{\lim\limits_{x\to0}(x+1)\ \lim\limits_{x\to0}(\sqrt{9+x}+3)} = \frac{1}{6}.$$

в) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin^2 x}{1-\cos x}$.

Так как $\lim\limits_{x\to0}\sin^2 x = 0$ и $\lim\limits_{x\to0}(1-\cos x)=0$, то имеем неопределенность типа $\frac{0}{0}$. Для раскрытия этой неопределенности используем формулу $1-\cos x=2\sin^2\frac{x}{2}$ и первый замечательный предел $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x} = 1$.

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin^2 x}{1-\cos x} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to0}\frac{\sin^2 x}{2\sin^2\frac{x}{2}} = \frac{1}{2}\lim_{x\to0}\frac{\sin^2 x\cdot\left(\frac{x}{2}\right)^2\cdot 4}{x^2\cdot\sin^2\frac{x}{2}} =$$

$$=2\left(\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}\right)^2\left(\lim_{x\to0}\frac{\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\right)^2 = 2.$$

г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+2}{x+3}\right)^{2x-1}$.

Так как $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+2}{x+3}=1$, $\lim\limits_{x\to\infty}(2x-1)=\infty$, то имеем неопределенность типа 1^{∞}. Используем второй замечательный предел:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e.$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+2}{x+3}\right)^{2x-1}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{x+2}{x+3}-1\right)^{2x-1}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{x+2-x-3}{x+3}\right)^{2x-1}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{-1}{x+3}\right)^{2x-1}=\lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{-(x+3)}\right)^{-(x+3)}\right)^{\frac{1}{-(x+3)}\cdot 2x-1}=e^{-2}=\frac{1}{e^{2}}.$$

д) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg3x}{e^{2x}-1}$.

Вычислим предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg3x}{e^{2x}-1}$, используя эквивалентные бесконечно малые функции при $x\to x_0$.

Если при $x\to x_0$ $\alpha(x)\sim\alpha^{*}(x)$, $\beta(x)\sim\beta^{*}(x)$, тогда

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha^{*}(x)}{\beta(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\beta^{*}(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha^{*}(x)}{\beta^{*}(x)}.$$

Поэтому

$$\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{tg}3x}{e^{2x}-1}=\left|\mathrm{tg}3x\sim 3x,\ (e^{2x}-1)\sim 2x,\ \textit{при}\ x\to 0\right|=\lim_{x\to 0}\frac{3x}{2x}=\frac{3}{2}.$$

Задание 2. Исследовать функцию $y=f(x)$ на непрерывность: найти точки разрыва и определить их тип. Изобразить схематический график функции.

$$f(x)=\begin{cases}-x, & x\le 0,\\ x^{2}, & 0<x\le 2,\\ 2, & x>2\end{cases}$$

РЕШЕНИЕ

$$f(x)=\begin{cases}-x, & x\le 0,\\ x^{2}, & 0<x\le 2,\\ 2, & x>2.\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}y_1=-x, & x\le 0,\\ y_2=x^{2}, & 0<x\le 2,\\ y_3=2, & x>2.\end{cases}$$

На каждом из промежутков $(-\infty; 0)$; $(0; 2)$; $(2; +\infty)$ функция определена и является элементарной и, следовательно, непрерывна. Непрерывность функции может нарушаться лишь в точках, где меняется ее аналитическое задание, т.е. в точках $x = 0$ и $x = 2$. Исследуем функцию на непрерывность в этих точках. Найдем односторонние пределы функции в точках $x = 0$ и $x = 2$.

Если $x = 0$, то имеем:

$$\lim_{x \to -0} f(x) = \lim_{x \to -0} (-x) = 0;$$

$$\lim_{x \to +0} f(x) = \lim_{x \to +0} x^2 = 0;$$

$$f(0) = 0.$$

Так как, $f(0) = \lim\limits_{x \to -0} f(x) = \lim\limits_{x \to +0} f(x)$, то функция непрерывна в т. $x = 0$.

Если $x = 2$, то имеем:

$$\lim_{x \to 2-0} f(x) = \lim_{x \to 2-0} x^2 = 4;$$

$$\lim_{x \to 2+0} f(x) = \lim_{x \to 2+0} 2 = 2;$$

$$f(2) = 4.$$

Так как в точке $x = 2$ односторонние пределы функции не равны между собой, то эта точка является точкой разрыва функции. А так как эти пределы являются конечными числами, то это точка разрыва первого рода.

Сделаем чертеж.

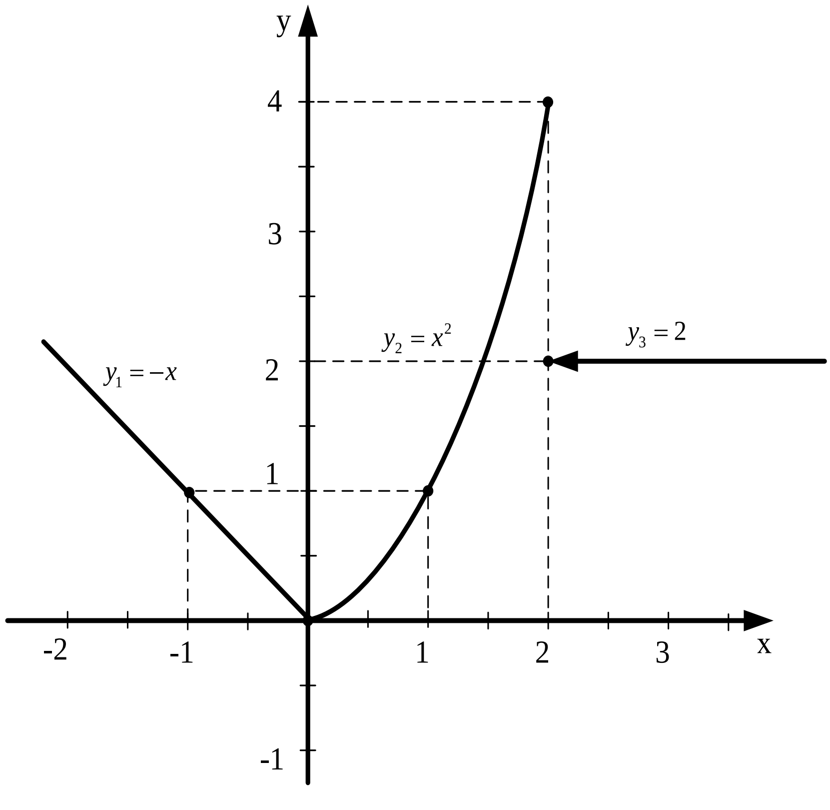


Рисунок 1 – График функции $f(x)$

Тема 3. Дифференциальное исчисление функции одной переменной

1 Знать и применять формулы для нахождения производной суммы, разности, произведения, частного двух функций.

2 Находить производную сложной функции.

3 Находить дифференциал функции $y = f(x)$ в заданной точке.

4 Находить пределы, используя правило Лопиталя.

5 Уметь находить точки экстремума.

6 Определять интервалы выпуклости вверх и выпуклости вниз графика функции.

7 Определять точки перегиба графика функции.

8 Находить вертикальные и наклонные асимптоты графика функции.

9 Строить графики функций с использованием производной.

Задачи для самостоятельного решения

1 Найти производную функции:

$$y = \frac{x^3}{3} + \frac{3}{x^3} - 4.$$

2 Найти производную функции:

$$y = -\sin(5x - 4).$$

3 Найти производную функции:

$$y = \frac{5x^7}{\cos(6x - 3)} + \sqrt[3]{x^2} - 1.$$

4 Найти производную третьего порядка функции:

$$y = -12x^2.$$

5 Найти производную третьего порядка функции:

$$y = -\sin(5x - 4).$$

6 Найти производную функции:

$$y = (arctg\sqrt{1 + x})^2.$$

7 Найти дифференциал функции:

$$f(x) = -2x^2 + \sin(2x - 11).$$

8 Найти дифференциал второго порядка d^2y ,если x – независимая переменная для функции:

$$y = \frac{1}{7}e^{-7x}.$$

9 Используя правило Лопиталя, вычислить предел:

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{tg4x}{tg8x}.$$

10 Используя правило Лопиталя, вычислить предел:

$$\lim_{x\to -3} tg\frac{\pi x}{4}(x+3).$$

11 Исследовать функцию на возрастание и убывание:

$$f(x)=3x^3-8x+1.$$

12 Найти экстремум функции:

$$y=\sqrt[3]{x^2}-\frac{x}{2}.$$

13 Исследовать на выпуклость и точки перегиба график функции:

$$y=3x^6-6x+1.$$

Образцы решений

Задание 1. Найти производные $y'=\dfrac{dy}{dx}$ данных функций.

а) $y=5^{7x}\cdot \mathrm{tg}(1-3x)$.

Производную данной функции найдем по формуле

$$y'=(u\cdot v)'=u'v+uv',$$

где $u=u(x)$ и $v=v(x)$ – дифференцируемые функции.

Тогда

$$y'=(5^{7x}\cdot \mathrm{tg}(1-3x))'=(5^{7x})'\mathrm{tg}(1-3x)+5^{7x}(\mathrm{tg}(1-3x))'=$$

$$=5^{7x}\cdot\ln5\cdot(7x)'\cdot\mathrm{tg}(1-3x)+5^{7x}\cdot\frac{1}{\cos^2(1-3x)}\cdot(1-3x)'=$$

$$=7\cdot5^{7x}\cdot\ln5\cdot\mathrm{tg}(1-3x)-3\cdot5^{7x}\cdot\frac{1}{\cos^2(1-3x)}=5^{7x}(7\ln5\cdot\mathrm{tg}(1-3x)-3\cdot\frac{1}{\cos^2(1-3x)}).$$

б) $y=\dfrac{1-3x+x^2}{\sin 4x}+\sqrt{5}$.

Производную данной функции найдем, используя формулу

$$y'=\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2},$$

где $u=u(x)$ и $v=v(x)$ – дифференцируемые функции.

Тогда

$$y'=\left(\frac{1-3x+x^2}{\sin 4x}+\sqrt{5}\right)'=\left(\frac{1-3x+x^2}{\sin 4x}\right)'+(\sqrt{5})'=$$

$$=\frac{(1-3x+x^2)'\sin 4x-(1-3x+x^2)(\sin 4x)'}{\sin^2 4x}=$$

$$=\frac{(-3+2x)\sin 4x-(1-3x+x^2)\cos 4x(4x)'}{\sin^2 4x}=$$

$$= \frac{(2x-3)\sin 4x - 4(1-3x+x^2)\cos 4x}{\sin^2 4x}.$$

в) $y = (\mathrm{arctg}2x + 3e^{2x} - 5x)^4$.

Данная функция является сложной и ее можно записать в виде $y = u^4$, где $u = \mathrm{arctg}2x + 3e^{2x} - 5x$. Производную сложной функции найдем по правилу

$$y_x' = y_u' u_x'.$$

Тогда

$$y' = ((\mathrm{arctg}2x + 3e^{2x} - 5x)^4)' = 4(\mathrm{arctg}2x + 3e^{2x} - 5x)^3(\mathrm{arctg}2x + 3e^{2x} - 5x)' =$$

$$= 4(\mathrm{arctg}2x + 3e^{2x} - 5x)^3\left(\frac{2}{1+4x^2} + 6e^{2x} - 5\right).$$

Задание 2. Используя правило Лопиталя, найти пределы:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{\sin 3x}$; б) $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{x^2}{e^x}$.

РЕШЕНИЕ

Согласно правилу Лопиталя:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{u(x)}{v(x)} = \lim_{x\to x_0}\frac{u'(x)}{v'(x)}$$

для неопределенностей вида $\frac{0}{0}$ и $\frac{\infty}{\infty}$.

Тогда в нашем случае:

а) $$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{\sin 3x} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{(\sin 5x)'}{(\sin 3x)'} = \lim_{x\to 0}\frac{5\cos 5x}{3\cos 3x} = \frac{5}{3}.$$

б) $$\lim_{x\to +\infty}\frac{x^2}{e^x} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to +\infty}\frac{(x^2)'}{(e^x)'} = \lim_{x\to +\infty}\frac{2x}{e^x} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to +\infty}\frac{(2x)'}{(e^x)'} =$$

$$= \lim_{x\to +\infty}\frac{2}{e^x} = 0.$$

Задание 3. Найти интервалы возрастания и убывания функции $y = 3x - x^2$.

РЕШЕНИЕ

Для нахождения интервалов возрастания и убывания функции используется следующий алгоритм:

1) Находим область определения функции $D(y)$.

2) Находим производную заданной функции.

3) Приравниваем производную к нулю и находим корни получившегося уравнения.

4) Найденными точками разбиваем область определения функции на интервалы и находим знак производной на каждом из них.

5) Если на интервале знакопостоянства $y' < 0$, то функция на этом интервале убывает, и наоборот – если $y' > 0$, то функция на этом интервале возрастает.

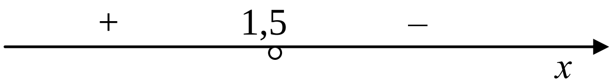
Следуя алгоритму, получаем:

$D(y) = R$.

Находим производную функции:

$$y' = (3x - x^2)' = 3 - 2x.$$

В области определения функции $y' = 0$ при $3 - 2x = 0$, т.е. при $x = \frac{3}{2}$. Найденная точка разбивает область определения функции на интервалы $(-\infty; \frac{3}{2})$ и $(\frac{3}{2}; +\infty)$.



В интервале $(-\infty; \frac{3}{2})$ производная $y' < 0$, следовательно, функция в данном интервале убывает, а в интервале $(\frac{3}{2}; +\infty)$ $y' > 0$ – функция возрастает.

Тема 4. Функции нескольких переменных

1 Находить значение функции двух переменных в точке.

2 Находить частные производные функции двух переменных.

3 Уметь находить полный дифференциал функции двух переменных в заданной точке.

4 Определять локальные экстремумы функции двух переменных.

Задачи для самостоятельного решения

1 Найти частные производные функции двух переменных:

$$z = x^3 + y^3 - 5xy - x^2y + 2xy^2.$$

2 Найти частные производные второго порядка функции двух переменных:

$$z = 3y \cdot \cos(7x + 2y).$$

3 Найти локальные экстремумы функции двух переменных:

$$z = 8x^2 - y^2 + 2x + 2y.$$

Образцы решений

Задание 1. Найти локальные экстремумы функции двух переменных

$$z = x^2y + xy^2 + 3xy \qquad (x < 0;\ y < 0).$$

РЕШЕНИЕ

Так как по условию $x < 0$, $y < 0$, то областью определения функции двух переменных является часть плоскости, лежащая внутри третьей четверти, не включая осей координат.

Если дифференцируемая функция $z = f(x,y)$ имеет в точке $M_0(x_0; y_0)$ локальный экстремум, то в этой точке обе ее частные производные первого порядка, если они существуют, равны нулю, т.е. $z'_x(M_0) = 0, z'_y(M_0) = 0$, либо хотя бы одна из этих частных производных в этой точке не существует.

Точки, принадлежащие области определения, в которых частные производные равны нулю или хотя бы одна из них не существует, называются *критическими.*

Находим частные производные данной функции:

$$z_x' = 2xy + y^2 + 3y,$$

$$z_y' = x^2 + 2xy + 3x.$$

Приравнивая их к нулю, получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} y(2x+y+3)=0, \\ x(x+2y+3)=0. \end{cases} \text{ Т.к. } x<0 \text{ и } y<0, \text{ то } \begin{cases} 2x+y+3=0, \\ x+2y+3=0. \end{cases}$$

Полученная система имеет одно решение, которое определяет критическую точку: $M_0\ (-1;-1)$.

Рассмотрим достаточные условия существования локального экстремума. Пусть существуют частные производные первого и второго порядков функции $z = f(x; y)$ и $M_0(x_0; y_0)$ – критическая точка функции $z = f(x; y)$, то есть $z'_x(M_0) = 0, z'_y(M_0) = 0$. Введем следующие обозначения:

$$A = z''_{xx}(M_0),\ \ B = z''_{xy}(M_0),\ \ C = z''_{yy}(M_0),\ \ \Delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = AC - B^2.$$

Тогда:

1) если $\Delta > 0$, $A > 0$ (или $C > 0$), то функция имеет в точке M_0 минимум;

2) если $\Delta > 0$, $A < 0$ (или $C < 0$), то функция имеет в точке M_0 максимум;

3) если $\Delta < 0$, то в точке M_0 экстремума нет;

4) если $\Delta = 0$, то экстремум может быть, а может и не быть (требуется дополнительное исследование).

Вычислим частные производные второго порядка функции $z = f(x,y)$:

$$z_{xx}'' = 2y;$$

$$z_{xy}'' = 2x + 2y + 3;$$

$$z_{yy}'' = 2x,$$

и для критической точки M_0 вычисляем соответствующее значение Δ:

$$M_0(-1;-1):\ \ A = -2,\ \ B = -1,\ \ C = -2,$$

тогда

$$\Delta(\mathrm{M}_0) = \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = 3 > 0,\ A = -2 < 0,$$

то в точке M_0 имеем точку локального максимума функции, в которой

$$Z_{\max}\ (-1; -1) = 1.$$

Тема 5. Комплексные числа

1 Знать определение комплексного числа и уметь выполнять действия над комплексными числами в алгебраической форме.

2 Указывать комплексное число, сопряженное данному комплексному числу.

3 Изображать комплексные числа на плоскости.

4 Определять модуль и аргумент комплексного числа.

5 Представлять комплексные числа в тригонометрической форме и выполнять действия над комплексными числами в тригонометрической форме.

6 Представлять комплексные числа в показательной форме.

7 Возводить в натуральную степень и извлекать корни натуральной степени из комплексных чисел.

Задачи для самостоятельного решения

1 Дано комплексное число $z = 3 - 2i$. Действительная часть комплексного числа равна …

2 Дано комплексное число $z = 3 - 2i$. Мнимая часть комплексного числа равна …

3 Дано комплексное число $z = 2 - i$. Комплексное число $\bar{z}$, сопряженное данному, равно …

4 Сумма комплексных чисел $z_1 = 1 + 2i$ и $z_2 = 2 - 4i$ равна …

5 Разность комплексных чисел $z_1 = 2 + 5i$ и $z_2 = 3 - 2i$ равна …

6 Произведение комплексных чисел $z_1 = 2 - 2i$ и $z_2 = 4 - 4i$ равно …

7 Частное комплексных чисел $z_1 = -1 + 2i$ и $z_2 = -2 - 4i$ равно …

8 Комплексное число $z_1 = -1 + 2i$ изображается точкой с координатами … либо радиус-вектором …

9 Дано комплексное число $z_1 = -1 + \sqrt{3}i$. Модуль числа $|z|$ равен …, аргумент φ этого числа равен …

10 Тригонометрическая форма комплексного числа $z = 1 - i$ …

11 Показательная форма комплексного числа $z = -1 + i$ …

Образцы решений

Задание 1. Дано комплексное число $z = -4\sqrt{3} - 4 \cdot i$. Требуется:

1) изобразить число z в виде радиус-вектора на комплексной плоскости;
2) записать число z в тригонометрической форме;
3) найти все значения $\sqrt[3]{z}$.

РЕШЕНИЕ

1) *Комплексным числом* называется число $z = x + i \cdot y$, где x и y – действительные числа, а i – мнимая единица, $i^2 = -1$.

$x = Rez$ называется *действительной частью комплексного числа*, а $y = Imz$ *– мнимой частью комплексного числа*.

Запись числа в виде $z = x + i \cdot y$ называется *алгебраической формой комплексного числа*.

Всякое комплексное число $z = x + i \cdot y$ можно изобразить точкой $M(x; y)$ плоскости Oxy такой, что $x = Rez$, $y = Imz$. Плоскость, на которой изображается комплексное число, называется *комплексной плоскостью*, при этом ось абсцисс называют *действительной осью*, а ось ординат – *мнимой осью*.

Комплексное число изображают также на комплексной плоскости с помощью радиус-вектора $\vec{r} = \overrightarrow{OM} = (x; y)$.

В нашем случае $z = -4\sqrt{3} - 4 \cdot i$. Имеем $x = \operatorname{Re} z = -4\sqrt{3}$, $y = \operatorname{Im} z = -4$.

Изобразим это число на комплексной плоскости в виде радиус-вектора. Для этого построим точку $M(-4\sqrt{3}; -4)$ и соединим ее с началом координат. Тогда радиус-вектор $\overrightarrow{OM}$ изображает число z на комплексной плоскости (рисунок 2).

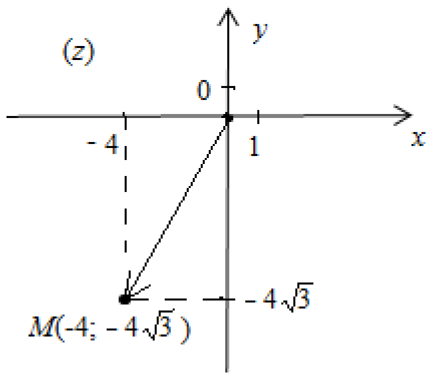


Рисунок 2

2) Запишем число z в тригонометрической форме

$$z = r(\cos\varphi + i \sin\varphi),$$

где $r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ – модуль комплексного числа, $\varphi = \arg z$ – аргумент комплексного числа z.

Аргумент комплексного числа $z \neq 0$ – величина многозначная и определяется с точностью до слагаемого $2\pi k$ $(k = 0, -1, 1, -2, 2 \ldots)$:

Arg$z$ = $a$rg$z$ + $2\pi k$, где $a$rg$z$ – главное значение аргумента, заключенное в промежутке $(-\pi; \pi]$, то есть $-\pi < \arg z \le \pi$ (иногда в качестве главного значения аргумента берут величину, принадлежащую промежутку $[0; 2\pi)$). Аргумент φ определяется из формулы $tg\varphi = \frac{y}{x}$. Так как $-\pi < \arg z \le \pi$, то получаем, что

$$\arg z = \begin{cases} \operatorname{arctg}\frac{y}{x} & \text{для внутренних точек I, IV четвертей,} \\ \operatorname{arctg}\frac{y}{x} + \pi & \text{для внутренних точек II четверти,} \\ \operatorname{arctg}\frac{y}{x} - \pi & \text{для внутренних точек III четверти.} \end{cases}$$

Тогда модуль комплексного числа $z = -4\sqrt{3} - 4\cdot i$:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(-4\sqrt{3})^2 + (-4)^2} = \sqrt{48+16} = \sqrt{64} = 8,$$

а так как точка M находится в III четверти, то аргумент

$$\varphi = \operatorname{arctg}\frac{y}{x} - \pi = \operatorname{arctg}\frac{-4}{-4\sqrt{3}} - \pi = \operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{3}} - \pi = \frac{\pi}{6} - \pi = -\frac{5\pi}{6}.$$

Тогда $z = 8\left(\cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right)\right)$ – тригонометрическая форма комплексного числа z.

3) Для нахождения $\sqrt[n]{z}$ воспользуемся формулой

$$w_k = \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\,(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}),\ \text{где } k = 0, 1, 2, \ldots, n-1.$$

В нашем случае имеем $n = 3$ и

$$w_k = \sqrt[3]{-4\sqrt{3} - 4\cdot i} = \sqrt[3]{8}\,(\cos\frac{-\frac{5\pi}{6} + 2\pi k}{3} + i\sin\frac{-\frac{5\pi}{6} + 2\pi k}{3}),\ \text{где } k = 0, 1, 2.$$

Придавая k последовательно значения 0, 1, 2, находим все три значения корней:

$$w_0 = \sqrt[3]{8}\,(\cos(-\frac{5\pi}{18}) + i\sin(-\frac{5\pi}{18})) \approx 2\cdot(0{,}643 - 0{,}766i) = 1{,}286 - 1{,}532i,$$

$$w_1 = \sqrt[3]{8}\,(\cos\frac{7\pi}{18} + i\sin\frac{7\pi}{18}) \approx 2\cdot(0{,}342 + 0{,}94i) = 0{,}684 + 1{,}88i,$$

$$w_2 = \sqrt[3]{2}\,(\cos\frac{19\pi}{18} + i\sin\frac{19\pi}{18}) = \sqrt[3]{2}\,(-\cos\frac{\pi}{18} - i\sin\frac{\pi}{18}) \approx 2\cdot(-0{,}985 - 0{,}174i) =$$

$$= -1{,}97 - 0{,}348i.$$

Тема 6. Первообразная и неопределенный интеграл, определенный интеграл

1 Знать определение первообразной и неопределенного интеграла.

2 Знать и применять основные свойства неопределенного интеграла.

3 Применять таблицу неопределенных интегралов.

4 Проверять результаты интегрирования дифференцированием.

5 Применять формулу замены переменной в неопределенном интеграле.

6 Применять формулу интегрирования по частям для неопределенного интеграла.

7 Знать определение определенного интеграла.

8 Применять формулу Ньютона-Лейбница для вычисления определенных интегралов.

9 Знать и применять основные свойства определенного интеграла.

10 Применять формулу замены переменной в определенном интеграле.

11 Применять формулу интегрирования по частям для определенного интеграла.

12 Вычислять площадь простейших геометрических фигур с помощью определенного интеграла.

13 Применять понятие определенного интеграла для вычисления длин дуг плоских кривых, заданных параметрическими уравнениями и уравнениями в полярной системе координат.

Задачи для самостоятельного решения

1 Если $F(x)$ – одна из первообразных функции $f(x)$,то $\int f(x)dx = \ldots$

2 Производная от интеграла $\left(\int f(x)dx\right)'$ равна …

3 Дифференциал от интеграла $d\left(\int f(x)dx\right)$ равен …

4 Интеграл $\int dF(x)$ равен …

5 Если $\int f(x)dx = F(x) + C$, то $\int f(ax+b)dx = \ldots$

6 Если функция $F(x) = \frac{1}{a} arctg \frac{x}{a}$ первообразная функции $f(x)$, то функция $f(x)$ равна …

7 Если $f(x) = \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}$, то ее первообразная $F(x)$ равна …

8 Найти интеграл $\int (3x^2 - 2x + 5)dx$.

9 Найти интеграл $\int \frac{2x^3 - 4x + 6}{x^4} dx$.

10 $\int 3\sin(2x-1)dx = k\cos(2x-1) + C$. Тогда $k = \ldots$

11 $\int 2e^{5x+3}dx = ke^{5x+3} + C$. Тогда $k = \ldots$

12 Найдите интегралы:

а) $\int \cos x\, d(\cos x)$; б) $\int \mathrm{tg}^2 x\, d(\mathrm{tg} x)$; в) $\int \frac{d(1+\ln x)}{\sin^2(1+\ln x)}$;

г) $\int \frac{d(1+x^2)}{1+x^2}$; д) $\int e^{\arcsin x} d(\arcsin x)$.

13 Какую из подстановок целесообразно использовать для замены переменной в интеграле:

а) $\int \frac{\mathrm{e}^x}{3+4\mathrm{e}^x}dx$; б) $\int \frac{x^2}{\sqrt{x^3+1}}dx$; в) $\int x(2x^2+1)^5 dx$;

г) $\int \frac{x}{2x^2+5}dx$; д) $\int x\cdot(x-2)^7 dx$.

14 Какое из выражений целесообразно принять за U при интегрировании по частям интеграла:

а) $\int x^2 e^{3x}dx$; б) $\int x\ln x dx$; в) $\int (2x-3)\cos x dx$;

г) $\int x \mathrm{arctg} x dx$.

15 Какое из выражений целесообразно принять за dV при интегрировании по частям интеграла:

а) $\int x \mathrm{arctg} x dx$; б) $\int (3x-2)\cos 5x dx$;

в) $\int \mathrm{e}^{-x}(x-1)dx$; г) $\int \ln(x-5)dx$.

16 Если *F(x)* является первообразной функции *f(x)*, то справедлива формула Ньютона-Лейбница …

17 Вычислить определенные интегралы:

а) $\int_1^2 \left(2x^2+\frac{2}{x}\right)dx$; б) $\int_0^{\pi} \cos x dx$;

в) $\int_1^4 \sqrt{x}dx$; г) $\int_0^1 \mathrm{e}^{x+1}dx$.

18 Вычислить определенные интегралы методом замены переменной:

а) $\int_1^2 x\sqrt{2-x}dx$; б) $\int_3^8 \frac{x}{\sqrt{x+1}}dx$; в) $\int_0^4 \frac{dx}{1+\sqrt{2x+1}}$.

19 Вычислить определенные интегралы интегрированием по частям:

а) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin x dx$; б) $\int_1^e \ln x dx$; в) $\int_0^1 x\mathrm{e}^x dx$.

20 Найти площадь фигуры, ограниченной линиями:

а) $y = x^3$, $y = 0$, $x = 1$;
б) $y = x^2$, $y = 1$, $x = 0$.

Образцы решений

Задание 1. В пунктах а, б найти неопределенные интегралы, а в пункте в вычислить определенный интеграл.

а) $\int\left(\frac{3}{\sqrt[3]{x^2}}-\frac{2x+9}{x^2}\right)dx$.

РЕШЕНИЕ

$$\int\left(\frac{3}{\sqrt[3]{x^2}}-\frac{2x+9}{x^2}\right)dx = \int\left(3\cdot x^{-\frac{2}{3}}-\frac{2x}{x^2}-\frac{9}{x^2}\right)dx = \int 3\cdot x^{-\frac{2}{3}}dx-\int\frac{2}{x}dx-\int 9\cdot x^{-2}dx =$$

$$= 3\cdot\frac{x^{-\frac{2}{3}+1}}{-\frac{2}{3}+1}-2\ln|x|-9\cdot\frac{x^{-2+1}}{-2+1}+C = 3\cdot\frac{x^{\frac{1}{3}}}{\frac{1}{3}}-2\ln|x|-9\cdot\frac{x^{-1}}{-1}+C=$$

$$= 9\sqrt[3]{x}-2\ln|x|+\frac{9}{x}+C.$$

б) $\int\frac{5-tg2x}{\cos^2 2x}dx$.

РЕШЕНИЕ

$$\int\frac{5-tg2x}{\cos^2 2x}dx = \int\frac{5}{\cos^2 2x}dx-\int\frac{tg2x}{\cos^2 2x}dx = I_1 + I_2.$$

$$I_1 = \int\frac{5}{\cos^2 2x}dx = 5\cdot\int\frac{dx}{\cos^2 2x} = [\text{так как } \int f(ax+b)dx=\frac{1}{a}F(ax+b)+C\,] =$$

$$= 5\cdot\frac{1}{2}\cdot\mathrm{tg}2x + \mathrm{C};$$

$$I_2 = \int\frac{tg2x}{\cos^2 2x}dx = \left[\begin{array}{l}\text{применим подстановку } tg2x=t,\\ \text{тогда } dt=\dfrac{2}{\cos^2 2x}dx,\ \text{откуда } dx=\dfrac{\cos^2 2x}{2}dt\end{array}\right] =$$

$$= \int\frac{t}{\cos^2 2x}\cdot\frac{\cos^2 2x}{2}dt = \frac{1}{2}\cdot\int tdt = \frac{1}{4}t^2 + \mathrm{C} = \frac{1}{4}tg^2 2x+C.$$

Таким образом,

$$\int\frac{5-tg2x}{\cos^2 2x}dx = \frac{5}{2}tg2x-\frac{1}{4}tg^2 2x+C.$$

в) $\int_0^{\pi}(2x+1)\sin 2xdx$.

РЕШЕНИЕ

Найдём данный интеграл, используя формулу интегрирования по частям:

$$\int_a^b UdV = UV\Big|_a^b - \int_a^b VdU.$$

$$\int_0^{\pi}(2x+1)\sin 2xdx = \left[\begin{array}{ll} U = 2x+1, & dV = \sin 2xdx \\ dU = (2x+1)'dx = 2dx, & V = \int \sin 2xdx = -\frac{1}{2}\cos 2x \end{array}\right] =$$

$$= (2x+1)\left(-\frac{1}{2}\cos 2x\right)\Bigg|_0^{\pi} - \int_0^{\pi}\left(-\frac{1}{2}\cos 2x\right)\cdot 2dx =$$

$$= -\frac{1}{2}(2\pi+1)\cos 2\pi + \frac{1}{2}\cdot 1\cos 0 + \int_0^{\pi}\cos 2xdx = -\frac{1}{2}(2\pi+1) + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sin 2x\Big|_0^{\pi} =$$

$$= -\frac{1}{2}(2\pi+1) + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sin 2\pi - \frac{1}{2}\sin 0 = -\pi.$$

Задание 2. Изобразить фигуру, ограниченную указанными линиями:

$$y = -x,\ y = 2x - x^2$$

и вычислить ее площадь.

РЕШЕНИЕ

Нарисуем чертеж фигуры, ограниченной линиями:

$$y = -x,\ y = 2x - x^2.$$

Методом выделения полных квадратов преобразуем уравнение параболы $y = 2x - x^2$:

$y = -(x^2 - 2x)$, $y = -(x^2 - 2x + 1 - 1)$, $y = -[(x-1)^2 - 1]$,

$y = -(x-1)^2 + 1$ или $y - 1 = -(x-1)^2$.

Из уравнения видно, что вершина параболы находится в точке (1;1), а ее ветви направлены вниз.

Прямая $y = -x$ – это биссектриса второго и четвертого координатных углов (рисунок 3).

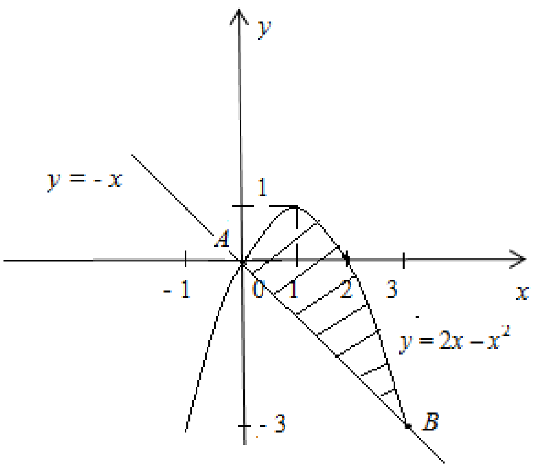


Рисунок 3

Определим абсциссы точек A и B – точек пересечения параболы и прямой. Для этого решим систему уравнений:

$$\begin{cases} y = 2x - x^2, \\ y = -x. \end{cases}$$

Получим: $x_A = 0$, $x_B = 3$.

Тогда по формуле $S = \int\limits_a^b (f_2(x) - f_1(x))dx$ вычислим искомую площадь.

Для нашего случая $f_1(x) = -x$, $f_2(x) = 2x - x^2$, $a = 0, b = 3.$

$$S = \int\limits_0^3 (2x - x^2 - (-x))dx = \int\limits_0^3 (3x - x^2)dx = \left(\frac{3x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^3 = \frac{27}{2} - \frac{27}{3} = \frac{9}{2} \text{ (ед.кв.).}$$

Тема 7. Обыкновенные дифференциальные уравнения

1 Уметь определять порядок дифференциального уравнения.

2 Знать определение общего и частного решения дифференциального уравнения.

3 Знать определение дифференциального уравнения 1-го порядка с разделяющимися переменными, однородного, линейного и уметь решать их.

4 Уметь решать дифференциальные уравнения 2-го порядка, допускающие понижение порядка.

5 Знать определение общего решения линейного однородного дифференциального уравнения 2-го порядка с постоянными коэффициентами.

6 Определять вид частного решения линейного неоднородного дифференциального уравнения 2-го порядка с постоянными коэффициентами и правой частью специального вида.

Задачи для самостоятельного решения

1 Определить порядок дифференциального уравнения:

а) $y' + yx^2 = \dfrac{1}{x}$;

б) $y'' + y'\cos x + y\sin x = 0$;

в) $y''' - 5y'' + 6y = 0$.

2 Показать, что функция $y = Cx^3$ есть общее решение дифференциального уравнения $xy' - 3y = 0$. Найти частное решение, удовлетворяющее условию $y(1) = 1$.

3 Решить дифференциальные уравнения:

а) $y' = y^2\cos x$;

б) $y' = \dfrac{y}{x} + \sin\dfrac{y}{x}$;

в) $y' + \mathrm{tg}x = \dfrac{1}{\cos x}$.

4 Найти общее решение линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами:

а) $y'' + 4y' + 3y = 0$;

б) $y'' + 4y' + 4y = 0$;

в) $y'' + 4y' + 13y = 0$.

5 Указать вид частного решения данного линейного неоднородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами и специальной правой частью:

а) $y'' + 8y' + 16y = (1 - x)\mathrm{e}^{-4x}$; б) $y'' - 5y' + 6y = 13\sin 2x$;

в) $y'' - y = \mathrm{e}^{-x}$; г) $y'' + 3y' = x^2 - 3$.

Образцы решений

Задание 1. Найти общий интеграл дифференциального уравнения первого порядка

$$3x\,dx - y\,dy = 5xy\,dy - 2xy\,dx$$

РЕШЕНИЕ

Преобразуем данное уравнение. Слагаемые с множителем dx перенесем в левую часть равенства, а слагаемые с dy – в правую часть. Имеем:

$$3x\,dx + 2xydx = 5xydy + ydy.$$

Вынесем общие множители за скобки:

$$x(3 + 2y)dx = y(5x + 1)dy.$$

Это уравнение с разделяющимися переменными. Разделим переменные:

$$\frac{x\,dx}{5x+1} = \frac{y\,dy}{3+2y}.$$

Интегрируем обе части последнего равенства:

$$\int \frac{xdx}{5x+1} = \int \frac{ydy}{3+2y},$$

$$\frac{1}{5}\int \frac{(5x+1)-1}{5x+1}dx = \frac{1}{2}\int \frac{(3+2y)-3}{3+2y}dy,$$

$$\frac{1}{5}\int\left(1 - \frac{1}{5x+1}\right)dx = \frac{1}{2}\int\left(1 - \frac{3}{3+2y}\right)dy,$$

$$\frac{1}{5}\left(x - \frac{1}{5}\ln|5x+1|\right) + C = \frac{1}{2}\left(y - \frac{3}{2}\ln|3+2y|\right).$$

Следовательно, общим интегралом исходного уравнения является

$$\frac{1}{5}\left(x-\frac{1}{5}\ln|5x+1|\right)+C=\frac{1}{2}\left(y-\frac{3}{2}\ln|3+2y|\right).$$

Задание 2. Найти общее решение линейного дифференциального уравнения первого порядка

$$y'+\frac{y}{x}=\frac{\sin x}{x}.$$

РЕШЕНИЕ

Так как уравнение линейное, то решаем его с помощью подстановки Бернулли:

$$y=u\cdot v,\text{ где } u=u(x),\ v=v(x).$$

Имеем: $y'=u'v+uv'$. Подставив в исходное уравнение выражения для y и y', получим уравнение

$$u'v+uv'+\frac{uv}{x}=\frac{\sin x}{x},$$

которое преобразуем к виду

$$\left(v'+\frac{v}{x}\right)u+u'v=\frac{\sin x}{x}.$$

Так как произведение $u\cdot v$ должно удовлетворять исходному уравнению, то одну из неизвестных функций, например v, можно выбрать произвольно. Выбираем в качестве v любое частное решение $v=v(x)$ уравнения $v'+\frac{v}{x}=0$.

Тогда $\frac{dv}{dx}=-\frac{v}{x}$. Разделим переменные, имеем

$$\frac{dv}{v}=-\frac{dx}{x}.$$

Интегрируя, получим:

$$\int\frac{dv}{v}=-\int\frac{dx}{x},\ \ln|v|=-\ln|x|+\ln C_1.$$

Полагая $C_1=1$, выбираем частное решение $v=\frac{1}{x}$. Далее найдем общее решение из уравнения $u'v=\frac{\sin x}{x}$, где $v=\frac{1}{x}$. Имеем:

$$u'=\sin x,\ \frac{du}{dx}=\sin x,\ u=\int\sin x\,dx+C=-\cos x+C.$$

Общее решение исходного уравнения

$$y = uv = \frac{1}{x}(-\sin x + C).$$

Задание 3. Найти общее решение уравнения

$$xy'' = y' \ln \frac{y'}{x}$$

РЕШЕНИЕ

Данное уравнение относится к уравнениям вида $F(x, y', y'')=0$. Понизим его порядок с помощью подстановки $y'=P,$ где $P=P(x)$. Тогда $y''=\dfrac{dP}{dx}$. Подставив в уравнение вместо y' и y'' их выражения, получим

$$x\frac{dP}{dx}=P\ln\frac{P}{x}.$$

Это однородное уравнение первого порядка относительно функции $P(x)$. Полученное уравнение решим с помощью подстановки $P=Ux, \quad P'=U'x+U$.

$$U'x+U=U\ln U$$

$$x\frac{dU}{dx}=U(\ln U-1)$$

Разделив переменные и проинтегрировав, получим

$$\int\frac{dU}{U(\ln U-1)}=\int\frac{dx}{x}$$

$$\ln\left|\ln U-1\right|=\ln x+\ln C,$$

$$\ln U-1=C_1x, \qquad \ln U=C_1x+1,$$

$$U=e^{C_1x+1}, \qquad P=xe^{C_1x+1},$$

$$\frac{dy}{dx}=xe^{C_1x+1}, \qquad dy=xe^{C_1x+1}dx.$$

Проинтегрировав, получим

$$\int dy=\int x\,e^{C_1x+1},$$

$$y=\frac{1}{C_1}x\,e^{C_1x+1}-\frac{1}{C_1^{\,2}}x\,e^{C_1x+1}+C_2.$$

Задание 4. Найти общее решение уравнения

$$yy''-(y')^2=y^2y'.$$

РЕШЕНИЕ

Данное дифференциальное уравнение второго порядка, допускающее понижение порядка, относится к уравнениям вида $F(y, y', y'')=0$. Порядок такого уравнения понижается подстановкой $y'=P$, где $P=P(y)$. Тогда

$$y''=\frac{dP}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}=P\frac{dP}{dy}.$$

Подставляя вместо y' и y'' их выражения в исходное уравнение, получим

$$yP\frac{dP}{dy}-P^{2}=y^{2}P$$

или

$$y\frac{dP}{dy}-P=y^{2}.$$

Получили линейное дифференциальное уравнение первого порядка относительно искомой функции $P(y)$.

Решаем подстановкой $P=U\cdot V,\quad P'=U'V+V'U.$

$$y(U'V+V'U)-UV=y^{2},$$

$$y\,U'V+U(V'y-V)=y^{2}.$$

Функцию V выберем так, чтобы коэффициент при U был равен нулю.

$$y\frac{dV}{dy}-V=0 \quad \text{или} \quad \frac{dV}{V}=\frac{dy}{y}$$

$$\int\frac{dV}{V}=\int\frac{dy}{y};\qquad \ln V=\ln y,\qquad V=y.$$

Подставляя $V=y$ в уравнение, получим

$$y^{2}\frac{dU}{dy}=y^{2},\quad (y\neq 0)$$

$$\int dU=\int dy,\qquad U=y+C_1.$$

Тогда

$$P=(y+C_1)y$$

или

$$\frac{dy}{dx}=y(y+C_1).$$

Разделив переменные и проинтегрировав, получим

$$\int\frac{dy}{y(y+C_1)}=\int dx,\qquad \frac{1}{C_1}\ln\left|\frac{y}{y+C_1}\right|=x+C_2$$

$\ln\dfrac{y}{y+C_1}=C_1(x+C_2)$ – общий интеграл данного уравнения при $P\neq 0$.

Если $P=0$, т.е. $\frac{dy}{dx}=0$, то $y=C$.

Задание 5. Найти частное решение дифференциального уравнения $y''+4y'+3y=0$, удовлетворяющее начальным условиям $y(0)=1,\ \ y'(0)=0$.

РЕШЕНИЕ

Составим и решим характеристическое уравнение

$$\kappa^2+4\kappa+3=0$$

$$\kappa_1=-1, \quad \kappa_2=-3.$$

Так как корни характеристического уравнения действительные и разные, то общее решение y имеет вид

$$y=C_1e^{-x}+C_2e^{-3x}.$$

Найдем теперь частное решение, удовлетворяющее начальным условиям $y(0)=1,\ \ y'(0)=0.$ В нашем случае

$$y'=-C_1e^{-x}-3C_2e^{-3x},$$

$$y'(0)=-C_1e^0-3C_2e^0$$

или

$$-C_1-3C_2=0.$$

$$y(0)=C_1e^0+C_2e^0 \text{ или } C_1+C_2=1.$$

Теперь решаем систему уравнений

$$\begin{cases} -C_1-3C_2=0, \\ C_1+C_2=1. \end{cases}$$

Откуда $C_1=\frac{3}{2};\ \ C_2=-\frac{1}{2}.$

Следовательно, $y=\frac{3}{2}e^{-x}-\frac{1}{2}e^{-3x}$ – искомое частное решение.

Задание 6. Найти общее решение соответствующего однородного уравнения $y''-5y'-6y=3xe^{-x}$ и указать вид частного решения неоднородного уравнения.

РЕШЕНИЕ

Сначала найдем общее решение соответствующего однородного уравнения $y''-5y'-6y=0$. Составим характеристическое уравнение

$$k^2-5k-6=0.$$

Это квадратное уравнение имеет корни $k_1=-1,\ k_2=6$. По теореме о структуре общего решения линейного однородного дифференциального уравнения решение запишем в виде

$$y^*(x) = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}.$$

Следовательно, $y^*(x) = C_1 e^{-x} + C_2 e^{6x}$.

Теперь укажем вид частного решения заданного в условии неоднородного уравнения.

Правая часть уравнения – функция $f(x) = 3xe^{-x} = P_1(x)e^{\alpha x}$ имеет специальный вид, что позволяет установить вид частного решения. Частное решение для такой правой части ищем в виде $\bar{y}(x) = x^r e^{\alpha x} Q_n(x)$, где по условию $\alpha = -1, n = 1$; r – число корней характеристического уравнения совпадающих с числом $\alpha = -1$. Так как один из корней характеристического уравнения $k_1 = -1$ и совпадает с числом $\alpha = -1$, то частное решение $\bar{y}(x)$ ищем в виде

$$\bar{y}(x) = (Ax + B)e^{-x}x = (Ax^2 + Bx)e^{-x}.$$

Тема 8. Кратные и криволинейные интегралы

1 Знать определения двойного и тройного интегралов и их свойства.
2 Уметь вычислять повторный интеграл.
3 Уметь расставлять пределы интегрирования в двойном интеграле.
4 Уметь вычислять площадь фигур с помощью двойного интеграла.
5 Знать определение криволинейного интеграла первого рода и его свойства.
6 Уметь вычислять криволинейный интеграл первого рода.
7 Знать определение криволинейного интеграла второго рода и его свойства.
8 Уметь вычислять криволинейный интеграл второго рода.
9 Знать и уметь применять формулу Грина.

Задачи для самостоятельного решения

1 Вычислить повторный интеграл:

а) $\int_2^4 dx \int_1^2 xy dy$;

б) $\int_1^e dx \int_4^6 \frac{y}{x} dy$;

в) $\int_3^4 dx \int_0^2 (x + y) dy$.

2 Расставить пределы интегрирования в том и другом порядке в повторном интеграле, к которому сводится двойной интеграл $\iint\limits_{(s)} f(x,y)dxdy$, где S ограничена линиями $y = x^2$, $y = 4$.

3 Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями:

$$xy = 4,\ x + y - 5 = 0.$$

4 Вычислить $\int\limits_{AB} \frac{yds}{\sqrt{x}}$, если AB – дуга полукубической параболы $y^2 = \frac{4}{9}x^3$ от $A(3,\ 2\sqrt{3})$ до $B(4;\ 2)$.

5 Вычислить криволинейный интеграл $\int\limits_{AB}(x^2 - y^2)dx + xydy$, если путь от $A(1;\ 1)$ до $B(3;\ 4)$ – отрезок прямой AB.

Образцы решений

Задание 1. Сделать чертёж области интегрирования. Изменить порядок интегрирования в двойном интеграле $I = \int\limits_0^1 dy \int\limits_{8y^3}^{2y+6} f(x,y)dx$.

РЕШЕНИЕ

Зная пределы интегрирования, найдем границы области интегрирования D: $y = 0$, $y = 1$, $x = 8y^3$, $x = 2y + 6$ и построим их. Область D располагается в полосе $0 \le y \le 1$ и ограничена слева кубической параболой $x = 8y^3$, справа – прямой $x = 2y + 6$ (рисунок 4).

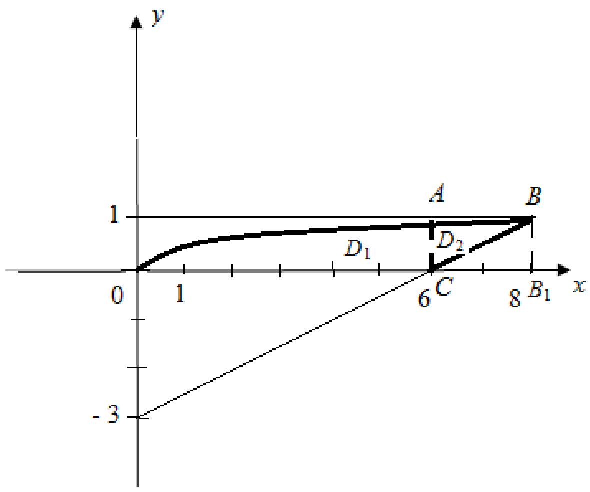


Рисунок 4

Спроектируем область D на ось Ox. Проекцией является отрезок OB_1, внутри которого находятся проекция точки A и точка C. Поэтому при изменении порядка интегрирования область D необходимо разбить прямой $x = 6$ на две: часть D_1 и D_2, в каждой из которых любая граница задается только одним уравнением.

Определим теперь новые пределы интегрирования. В области D_1 переменная x изменяется от 0 до 6. Уравнение нижней границы OC задается уравнением $y = 0$. Уравнение верхней границы OA находим, решая уравнение кубической параболы $x = 8y^3$ относительно y: $y = \frac{1}{2}\sqrt[3]{x}$.

В области D_2 переменная x изменяется от 6 до 8. Уравнение нижней границы CB $y = \frac{x-6}{2}$ (разрешили относительно y уравнение прямой $x = 2y + 6$); уравнение верхней границы AB: $y = \frac{1}{2}\sqrt[3]{x}$.

Таким образом, двойной интеграл I при изменении порядка интегрирования равен сумме двух интегралов:

$$I = \int_0^6 dx \int_0^{\frac{\sqrt[3]{x}}{2}} f(x;y)dy + \int_6^8 dx \int_{\frac{x-6}{2}}^{\frac{\sqrt[3]{x}}{2}} f(x;y)dy.$$

Задание 2. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями: $x^2 + y^2 = 9$, $z = y^2$, $z = 0$.

РЕШЕНИЕ

По уравнениям заданных поверхностей изобразим схематично тело. Поверхность $x^2 + y^2 = 9$– цилиндр с образующими параллельными оси Oz; $z = y^2$ – параболический цилиндр с образующими параллельными оси Ox; $z = 0$ – плоскость XOY.

Тело, ограниченное данными поверхностями, представляет собой правильную область V, ограниченную снизу плоскостью $z = 0$, сверху – поверхностью $z = y^2$ (рисунок 5) и проектируется на плоскость XOY в плоскую область D, представляющую собой круг, ограниченный окружностью $x^2 + y^2 = 9$ (рисунок 6).

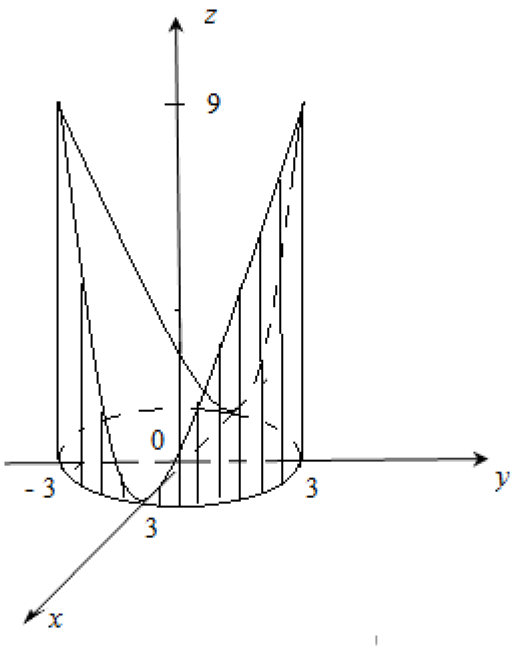


Рисунок 5

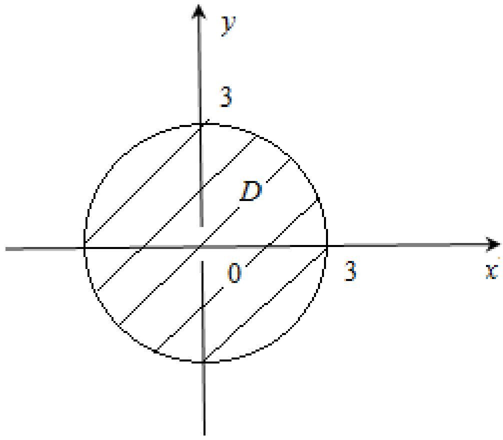


Рисунок 6

Объем тела найдем с помощью тройного интеграла по формуле:

$$V = \iiint_V dxdydz\,.$$

Так как проекцией тела на плоскость XOY является круг, то для данной области V этот интеграл проще вычисляется в цилиндрических координатах, связанных с декартовыми координатами формулами:

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi, \\ y = r\sin\varphi, \\ z = z, \end{cases}$$ где r – полярный радиус, φ – полярный угол.

Для данной области V: $0 \le \varphi \le 2\pi,\ 0 \le r \le 3,\ 0 \le z \le y^2,\ y^2 = r^2\sin^2\varphi$.

Следовательно,

$$V = \iiint_V r dr d\varphi dz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^3 r dr \int_0^{r^2\sin^2\varphi} dz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^3 r dr \cdot z\Big|_0^{r^2\sin^2\varphi} = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^3 r^3 \sin^2\varphi dr =$$

$$= \int_0^{2\pi} \sin^2\varphi d\varphi \cdot \frac{r^4}{4}\Bigg|_0^3 = \frac{81}{4}\cdot\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(1-\cos 2\varphi)d\varphi = \frac{81}{8}\left(\varphi - \frac{1}{2}\sin 2\varphi\right)\Bigg|_0^{2\pi} =$$

$$= \frac{81}{8}\left(2\pi - \frac{1}{2}\sin 4\pi + \frac{1}{2}\sin 0\right) = \frac{81}{8}\cdot 2\pi = \frac{81}{4}\pi \quad \text{(ед.куб.)}$$

Задание 3. Вычислить $\int\limits_L (x-y)ds,$ *где* L – отрезок прямой от $A(0;\ 0)$ до $B(4;\ 3)$.

РЕШЕНИЕ

Уравнение прямой AB имеет вид $y = \frac{3}{4}x.$ Находим $\acute{o}' = \frac{3}{4}$ и, следовательно,

$$\int\limits_L (x-y)ds = \int\limits_0^4 (x - \frac{3}{4}x)\sqrt{1+\frac{9}{16}}dx = \frac{5}{16}\int\limits_0^4 xdx = \frac{5}{32}x^2\Big|_0^4 = \frac{5}{2}.$$

Задание 4. Вычислить криволинейный интеграл $\int\limits_{AB} (x-y)dx + dy$,

где AB – дуга параболы $y = 2x^2$ от точки $A(1;\ 2)$ до точки $B\ (2;\ 8)$.

РЕШЕНИЕ

Изобразим кривую, вдоль которой ведется интегрирование:

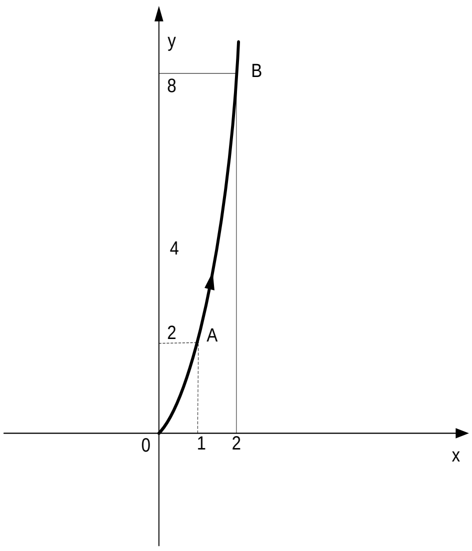


Рисунок 7

Вычисление криволинейного интеграла $\int\limits_{AB} (x-y)dx + dy$ сведем к вычислению определенного интеграла по формуле

$$\int\limits_{AB} P(x;y)dx + Q(x;y)dy \ = \ \int\limits_{x_A}^{x_B} (P(x;y(x)) + Q(x;y(x)) \cdot y^{/}(x))dx.$$

Так как AB–дуга параболы, заданной уравнением $y=2x^2$ от точки $A(1;\,2)$ до точки $B(2;8)$, то $dy=y'dx=(2x^2)'dx=4xdx$, а переменная x меняется в пределах от 1 до 2. Следовательно,

$$\int\limits_{AB}(x-y)dx+dy=\int\limits_1^2((x-2x^2)dx+4xdx)=\int\limits_1^2(5x-2x^2)dx=\left(\frac{5x^2}{2}-\frac{2x^3}{3}\right)\Bigg|_1^2=$$

$$=(10-\frac{16}{3})-(\frac{5}{2}-\frac{2}{3})=10-\frac{16}{3}-\frac{5}{2}+\frac{2}{3}=\frac{15}{2}-\frac{14}{3}=\frac{45-28}{6}=\frac{17}{6}.$$

Вопросы для подготовки к экзамену

Тема 1. Элементы линейной и векторной алгебры, аналитической геометрии

1 Определители второго и третьего порядков. Основные свойства.

2 Минор и алгебраическое дополнение. Понятие определителя n-го порядка и его вычисление.

3 Матрицы, действия над матрицами. Обратная матрица. Ранг матрицы.

4 Системы линейных алгебраических уравнений. Теорема Кронекера-Капелли (формулировка).

5 Правило Крамера.

6 Решение систем линейных алгебраических уравнений матричным методом.

7 Метод Гаусса.

8 Однородные системы линейных алгебраических уравнений и их решение.

9 Векторы. Линейные операции над векторами и их свойства. Проекция вектора на ось.

10 Линейная зависимость векторов. Разложение вектора по базису. Понятие векторного пространства.

11 Декартова система координат. Координаты вектора. Направляющие косинусы, длина вектора. Деление отрезка в данном отношении.

12 Скалярное произведение векторов, его свойства, вычисление и применение.

13 Векторное и смешанное произведения векторов, их свойства, вычисление и применение.

14 Прямая линия на плоскости. Различные способы задания. Взаимное расположение прямых на плоскости. Расстояние от точки до прямой на плоскости.

15 Плоскость в пространстве. Различные способы задания. Взаимное расположение плоскостей. Расстояние от точки до плоскости.

16 Прямая в пространстве. Взаимное расположение прямых в пространстве.

17 Взаимное расположение прямой и плоскости в пространстве.

18 Полярная система координат.

19 Кривые второго порядка: эллипс, гипербола, парабола. Определение и канонические уравнения. Исследование формы кривых по их каноническим уравнениям.

20 Поверхности второго порядка. Цилиндрические поверхности и поверхности вращения. Исследование поверхностей методом сечений.

Тема 2. Введение в математический анализ

21 Функция, область ее определения и способы задания. Сложные и обратные функции.

22 Свойства (четность, периодичность, монотонность, ограниченность) и графики функций. Гиперболические функции, их свойства и графики.

23 Числовые последовательности. Предел числовой последовательности. Число е. Натуральные логарифмы.

24 Предел функции в точке, односторонние пределы. Предел функции в бесконечности.

25 Бесконечно малые функции и их свойства.

26 Бесконечно большие функции. Связь между бесконечно малыми и бесконечно большими функциями.

27 Основные теоремы о пределах.

28 Первый и второй замечательные пределы.

29 Сравнение бесконечно малых функций.

30 Непрерывность функций в точке и на отрезке. Точки разрыва функции и их классификация. Свойства функций непрерывных в точке.

31 Свойства функций непрерывных на отрезке (теоремы Вейерштрасса, Коши, о промежуточных значениях и их геометрический смысл).

Тема 3. Дифференциальное исчисление функции одной переменной

32 Задачи, приводящие к определению производной. Производная функции, ее геометрический и механический смыслы. Односторонние производные. Производная сложной и обратной функции.

33 Дифференциал функции и его геометрический смысл. Свойства дифференциала и инвариантность его формы. Применение дифференциала к приближенным вычислениям.

34 Основные правила дифференцирования. Основные формулы дифференцирования.

35 Логарифмическое дифференцирование. Дифференцирование функций, заданных параметрически и неявно.

36 Производные и дифференциалы высших порядков.

37 Основные теоремы дифференциального исчисления (Ферма, Роля, Лагранжа, Коши).

38 Правило Лопиталя.

39 Применение дифференциального исчисления к исследованию функций и построению их графиков.

Тема 4. Функции нескольких переменных

40 Функции нескольких переменных. Область определения. Предел и непрерывность. Частные приращения и частные производные. Дифференцирование сложной и неявной функции.

41 Полный дифференциал функции нескольких переменных. Применение дифференциала к приближенным вычислениям. Касательная плоскость и нормаль к поверхности. Производные высших порядков.

42 Экстремум функции нескольких переменных. Необходимые и достаточные условия экстремума функции двух переменных. Исследование функции двух переменных на экстремум.

Тема 5. Комплексные числа

43 Комплексные числа и действия над ними. Изображение комплексных чисел на комплексной плоскости.

44 Тригонометрическая форма комплексного числа. Действия над комплексными числами в тригонометрической форме.

45 Формула Эйлера. Показательная форма комплексного числа.

Тема 6. Первообразная и неопределенный интеграл, определенный интеграл

46 Первообразная функция и неопределенный интеграл. Основные свойства неопределенного интеграла. Таблица основных формул и правил интегрирования.

47 Основные методы интегрирования: непосредственное, замена переменной, по частям.

48 Задачи, приводящие к понятию определенного интеграла. Определенный интеграл и его основные свойства.

49 Определенный интеграл с переменным верхним пределом. Производная интеграла по его переменному верхнему пределу.

50 Формула Ньютона-Лейбница.

51 Замена переменной и интегрирование по частям в определенном интеграле.

52 Несобственные интегралы с бесконечными пределами интегрирования и от неограниченных функций.

53 Приложения определенных интегралов к решению задач геометрии, физики, механики.

Тема 7. Обыкновенные дифференциальные уравнения

54 Задачи, приводящие к дифференциальным уравнениям.

55 Дифференциальные уравнения первого порядка. Теорема Коши существования и единственности решения дифференциального уравнения первого порядка. Задача Коши, ее геометрический и физический смыслы.

56 Дифференциальные уравнения первого порядка: с разделяющимися переменными, однородные, линейные.

57 Дифференциальные уравнения высших порядков. Теорема Коши существования и единственности решения дифференциального уравнения 2-го порядка (без доказательства). Задача Коши.

58 Уравнения 2-го порядка, допускающие понижения порядка.

59 Линейные дифференциальные уравнения второго порядка, однородные и неоднородные.

60 Линейные однородные дифференциальные уравнения второго порядка и их решение. Свойства решений. Теорема о структуре общего решения линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка.

61 Линейные неоднородные дифференциальные уравнения 2-го порядка. Теорема о структуре общего решения.

62 Метод вариации произвольных постоянных (метод Лагранжа).

63 Линейные однородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами.

64 Линейные неоднородные дифференциальные уравнения 2-го порядка с постоянными коэффициентами и правой частью специального вида.

Тема 8. Кратные и криволинейные интегралы

65 Двойные интегралы, их свойства и вычисление в декартовых координатах.

66 Тройные интегралы, их свойства и вычисление в декартовых координатах.

67 Понятие о криволинейных координатах, якобиане преобразования. Замена переменных в двойном и тройном интегралах. Двойной интеграл в полярной системе координат. Вычисление тройных интегралов в цилиндрической и сферической системах координат.

68 Применение двойных и тройных интегралов к решению задач геометрии, физики, механики.

69 Криволинейные интегралы I-го и II-го рода: определения, свойства, взаимосвязь и вычисление.

Список используемых источников

1 Гурский Е.И. Основы линейной алгебры и аналитической геометрии / – 2-е изд. доп. – Минск: Выш. шк., 1982. – 272 с.

2 Гусак, А.А. Высшая математика: в 2 т / А.А. Гусак. – Минск: Выш.шк.,1976. – 2003. – Т.2 – 327 с.

3 Жевняк Р.М. Высшая математика / Р.М. Жевняк, А.А. Карпук / в 5 ч. – Минск: Выш. шк., 1984-1988

4 Пискунов, Н. С. Дифференциальное и интегральное исчисление. – М.: Наука, 1985 – Т. 1 – 456 с.

5 Письменный Д.Т. Конспект лекций по высшей математике: полный курс / – 9-е изд. – М.: Айрис-пресс, 2009.

6 Сборник индивидуальных заданий по высшей математике: в 3 ч. / под ред. А.П. Рябушко. – Минск: Выш. шк., 1990-1991.

Учебное издание

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

Методические указания
для подготовки к аудиторной контрольной работе
студентов заочной формы получения высшего образования
по учебной дисциплине «Высшая математика»

Часть I

Составители:
Гальмак Александр Михайлович
Подолян Светлана Владимировна
Шендрикова Ольга Александровна
Юрченко Ирина Викторовна

Редактор *А.А. Щербакова*
Технический редактор *Н.Г.Тверская*

Подписано в печать Формат 60×84 1/16.
Бумага офсетная. Гарнитура Таймс. Ризография.
Усл.печ.л. Уч.-изд.
Тираж 30 экз. Заказ .

Учреждение образования
«Могилевский государственный университет продовольствия».
Свидетельство о государственной регистрации издателя,изготовителя,
распространителя печатных изданий № 1/272 от 04.04.2014 г.
Пр-т Шмидта, 3, 212027, Могилев.

Отпечатано в учреждении образования
«Могилевский государственный университет продовольствия».
Пр-т Шмидта, 3, 212027, Могилев.