Министерство образования республики Беларусь

Учреждение образования
«Могилёвский государственный университет продовольствия»

Кафедра высшей математики

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ. СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

Практикум по решению задач
для студентов всех форм получения высшего образования и специальностей

Могилёв
МГУП
2018

УДК 519.21
ББК 22.1

Рассмотрено и рекомендовано к изданию на заседании кафедры высшей математики
Протокол № 11от 30. 05. 2018 г.

Составители:
ст. преподаватель Гребенцов Ю. М.
ст. преподаватель Юрченко И.В.
ст. преподаватель Лох С.В.

Рецензент
к.ф.-м. н., доцент Подолян С.В.

Учебное издание предназначено для проведения практических занятий по теме «Теория вероятностей. Случайные величины», а также могут быть использованы как методические материалы студентами при самостоятельном изучении данной темы и в приобретении навыков по решению задач.

УДК51
ББК22.1

Содержание

1 ДИСКРЕТНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ. ЧИСЛОВЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ. ЗАКОНЫ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Краткие теоретические сведения

Определение 1.1. Переменная величина X, которая в результате опыта может принимать одно и только одно свое возможное значение, заранее неизвестно которое, называется *случайной величиной* (СВ). В дальнейшем рассмотрим два типа СВ – *дискретные* и *непрерывные*.

Определение 1.2. *Дискретной* (ДСВ) называется такая случайная величина X, возможные значения которой образуют конечную или бесконечную последовательность чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$

Определение 1.3. *Законом распределения вероятностей случайной величины X* (*или кратко, законом распределения*) называется всякое правило, согласно которому каждому возможному значению x_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ случайной величины ставится в соответствие вероятность p_i, с которой случайная величина принимает это значение.

Закон распределения можно задать таблично, графически, аналитически (в виде формулы).

Табличное задание закона распределения. Если возможные значения ДСВ X образуют конечную последовательность чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$, то закон распределения задают в виде следующей таблицы:

X	x_1	x_2	...	x_n
p	p_1	p_2	...	p_n

В верхней строке таблицы перечисляют возможные значения СВ X упорядоченно, во второй – соответствующие им вероятности.

Такую таблицу называют *рядом распределения* СВ X.

Поскольку в результате опыта случайная величина может принять одно и только одно из возможных значений, то события, заключающиеся в том, что случайная величина X примет значения $x_1, x_2, \ldots x_n$, попарно несовместны и в сумме образуют достоверное событие. Отсюда следует, что вероятность суммы этих событий равна 1, т.е.

$$\sum_{i=1}^{n} p(X = x_i) = \sum_{i=1}^{n} p_i = 1. \qquad (1.1)$$

Графическое задание закона распределения. Наглядно ряд распределения можно изобразить графически. Если на оси абсцисс отложить возможные значения случайной величины, а на оси ординат – вероятности этих значений и последовательно соединить отрезками точки с координатами (x_i, p_i), $(i = 1, 2, \ldots, n)$, то получим ломаную, которую называют *многоугольником* (или *полигоном*) *распределения* (см. рисунок 1.1).

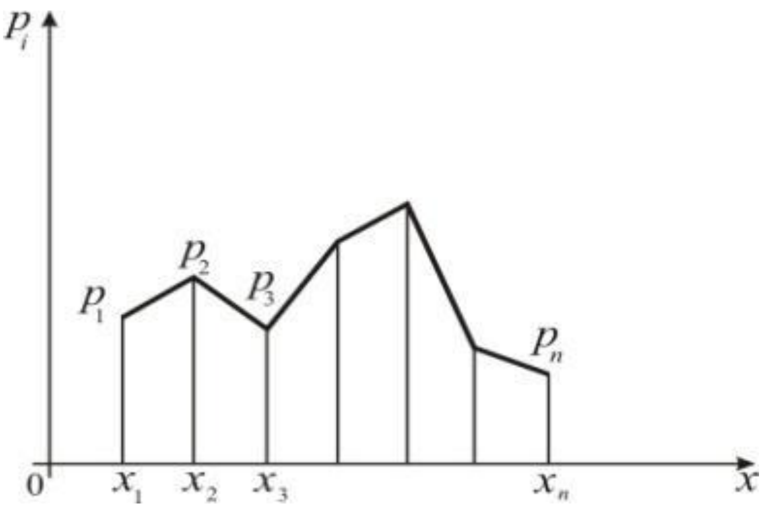

Рисунок 1.1 – Многоугольник распределения

Аналитический способ задания закона распределения СВ X будет рассмотрен ниже.

Для описания случайной величины часто используют ее числовые характеристики, которые в компактной форме дают представление о случайной величине.

Числовой характеристикой среднего значения случайной величины служит математическое ожидание.

Определение 1.4. *Математическим ожиданием* $M(X)$ дискретной случайной величины X называют сумму произведений всех ее возможных значений x_i на соответствующие им вероятности p_i:

$$M(X) = x_1p_1 + x_2p_2 + \ldots + x_np_n = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i . \quad (1.2)$$

Математическое ожидание – это центр распределения.

Числовыми характеристиками степени разброса (рассеяния) значений случайной величины по отношению к ее центру, служат, в частности, дисперсия и среднее квадратическое отклонение.

Определение 1.5. *Дисперсией* случайной величины X называют математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины от ее математического ожидания:

$$D(X) = M[X - M(X)]^2. \quad (1.3)$$

Дисперсию удобно вычислять по формуле

$$D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2. \quad (1.4)$$

Дисперсия дискретной случайной величины X вычисляется по формуле

$$D(X)=õ_1^2ð_1+õ_2^2ð_2+\ldots+õ_i^2ð_i-(M(X))^2=\sum_{i=1}^{ï}õ_i^2ð_i-(M(X))^2 \qquad (1.5)$$

Определение 1.6. *Средним квадратическим отклонением* случайной величины называют квадратный корень из дисперсии:

$$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}. \qquad (1.6)$$

Среднее квадратическое отклонение $\sigma(X)$ СВ X имеет ту же размерность, что и СВ X.

Свойства

математического ожидания $M(X)$:	***дисперсии*** $D(X)$:
1. $M(C)=C$, где C – *const*;	1. $D(C)=0$, где C – *const*;
2. $M(CX)=CM(X)$;	2. $D(CX)=C^2D(X)$;
3. $M(XY)=M(X)M(Y)$, где X,Y – независимые случайные величины;	3. $D(X+Y)=D(X)+D(Y)$, где X,Y – независимые случайные величины;
4. $M(X+Y)=M(X)+M(Y)$.	4. $D(X-Y)=D(X)+D(Y)$, где X,Y – независимые случайные величины;

Для задания случайной величины можно использовать также *функцию распределения вероятностей* $F(x)$ (*интегральную функцию распределения*), которая равна вероятности того, что случайная величина X примет значение, меньшее x. При известном законе распределения дискретной случайной величины X функция распределения имеет вид:

$$F(X)=p(X<x)=\sum_{(x_i<x)}p_i, \qquad (1.7)$$

где $(x_i<x)$ означает, что суммирование ведется по всем значениям i, для которых это неравенство выполняется.

***Основные свойства функции распределения вероятностей*:**

1. $0\le F(x)\le 1$.
2. Функция $F(x)$ – неубывающая функция своего аргумента.
3. $F(-\infty)=0,\ F(+\infty)=1$.
4. $Ð(\alpha\le Õ\le\beta)=Ð(\alpha\le Õ<\beta)=Ð(\alpha<Õ\le\beta)=Ð(\alpha<Õ<\beta)=F(\beta)-F(\alpha)$

Пример 1.1. Вероятность безотказной работы в течение гарантийного срока для телевизора первого типа равна 0,9, второго типа – 0,85. Составить закон распределения дискретной случайной величины X – числа телевизоров, проработавших гарантийный срок, среди двух телевизоров разных типов.

Решение. Случайная величина X – число телевизоров, проработавших гарантийный срок, среди двух телевизоров разных типов, имеет следующие возможные значения: $x_1 = 0$ (ни один телевизор не проработает гарантийный срок), $x_2 = 1$ (один из двух телевизоров проработает гарантийный срок), $x_3 = 2$ (два телевизора проработают гарантийный срок). Найдем вероятности этих возможных значений.

Пусть A_i, $i = 1, 2$ – события, означающие безотказную работу в течение гарантийного срока каждого из двух телевизоров соответственно, которые являются независимыми в совокупности. Тогда $P(A_1) = 0,9$, $P(A_2) = 0,85$. Обозначим $\overline{A_i}$, $i = 1, 2$ – события, означающие, что i-й телевизор не проработает безотказно гарантийный срок.

$$P(\overline{A_1}) = 1 - 0,9 = 0,1; P(\overline{A_2}) = 1 - 0,85 = 0,15.$$

Тогда

$P(X = 0) = p_1 = P(\overline{A_1} \cdot \overline{A_2}) = P(\overline{A_1}) \cdot P(\overline{A_2}) = 0,1 \cdot 0,15 = 0,015,$

$P(X = 1) = p_2 = P(A_1 \overline{A_2} + \overline{A_1} A_2) = P(A_1)P(\overline{A_2}) + P(\overline{A_1})P(A_2) = 0,9 \cdot 0,15 + 0,1 \cdot 0,85 =$
$= 0,135 + 0,085 = 0,22,$

$P(X = 2) = p_3 = P(A_1 \cdot A_2) = P(A_1) \cdot P(A_2) = 0,9 \cdot 0,85 = 0,765.$

Контроль: $0,015 + 0,22 + 0,765 = 1$.

Запишем закон распределения случайной величины X:

X	0	1	2
p	0,015	0,22	0,765

Пример 1.2. Дискретная случайная величина X задана рядом распределения

X	–1	0	1	2
p	0,2	0,3	0,1	p_4

Найти:

а) p_4; б) $M(X)$;

в) $D(X)$; г) $F(X)$ и построить ее график.

Решение. Так как для закона распределения дискретной случайной величины должно выполняться условие $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$, то в данном случае имеем:

$$\sum_{i=1}^{4} p_i = 0{,}2 + 0{,}3 + 0{,}1 + p_4 = 1, \text{ то есть } 0{,}6 + p_4 = 1.$$

Следовательно, $p_4 = 0{,}4$.

а) Найдём математическое ожидание $M(X)$.

$$M(X) = \sum_{i=1}^{4} x_i p_i = -1 \cdot 0{,}2 + 0 \cdot 0{,}3 + 1 \cdot 0{,}1 + 2 \cdot 0{,}4 = 0{,}7.$$

б) Найдём дисперсию $D(X)$.

$$D(X) = \sum_{i=1}^{4} x_i^2 p_i - (M(X))^2 = (-1)^2 \cdot 0{,}2 + (0)^2 \cdot 0{,}3 + (1)^2 \cdot 0{,}1 + (2)^2 \cdot 0{,}4 - (0{,}7)^2 = 1{,}41.$$

Найдём функцию распределения $F(x)$.

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \le -1, \\ 0{,}2, & \text{если } -1 < x \le 0, \\ 0{,}2 + 0{,}3, & \text{если } 0 < x \le 1, \\ 0{,}2 + 0{,}3 + 0{,}1, & \text{если } 1 < x \le 2, \\ 0{,}2 + 0{,}3 + 0{,}1 + 0{,}4, & \text{если } x > 2, \end{cases}$$

или

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \le -1, \\ 0{,}2, & \text{если } -1 < x \le 0, \\ 0{,}5, & \text{если } 0 < x \le 1, \\ 0{,}6, & \text{если } 1 < x \le 2, \\ 1, & \text{если } x > 2. \end{cases}$$

Построим график функции $F(x)$.

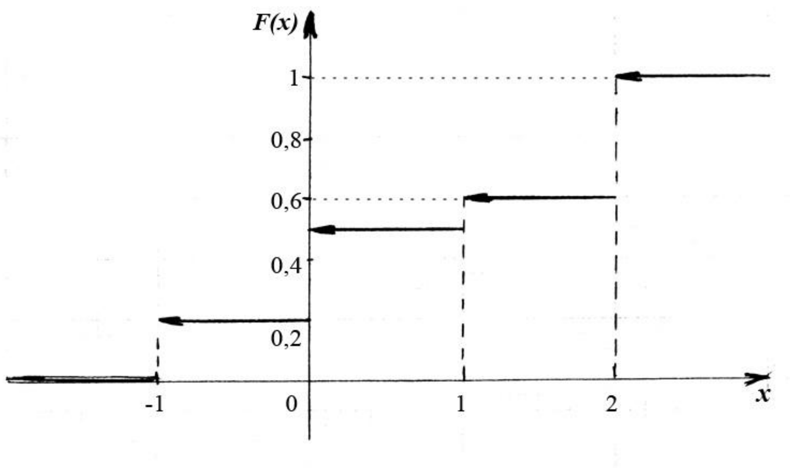

Рисунок 1.2 – График функции $F(x)$.

Ответ: а) $p_4 = 0{,}4$; б) $M(X) = 0{,}7$; в) $D(X) = 1{,}41$, г) рисунок 1.2.

Основные законы распределения

Рассмотрим аналитические способы задания закона распределения ДСВ X.

Биномиальное распределение

Определение 1.7. Дискретная случайная величина X имеет *биномиальное распределение* (или *распределена по биномиальному закону*), если она принимает значения 0, 1, 2, 3, …, n с вероятностями, определяемыми по формуле Бернулли

$$p_m = P(X = m) = C_n^m p^m q^{n-m}, \tag{1.8}$$

где $0 < p < 1$, $q = 1 - p$, $m = 0, 1, \ldots, n$.

Формула Бернулли – это аналитическое выражение биномиального закона распределения вероятностей.

Ряд распределения дискретной случайной величины X, имеющей биномиальное распределение, имеет вид:

X	0	1	2	…	m	…	n
p	q^n	npq^{n-1}	$\frac{n(n-1)}{2!}p^2q^{n-2}$	…	$C_n^m p^m q^{n-m}$	…	p^n

Для нахождения числовых характеристик биномиального распределения полезно знать формулы:

$$M(X) = np,\ D(X) = npq. \tag{1.9}$$

Пример 1.3. При автоматической прессовке заготовок 70 % от общего их числа не имеют зазубрин. Записать ряд распределения дискретной СВ X – числа заготовок из трех, не имеющих зазубрин. Вычислить математическое ожидание $M(X)$ и дисперсию $D(X)$.

Решение. Случайная величина X – число заготовок из трех, не имеющих зазубрин, имеет следующие возможные значения: $x_1 = 0$ (ни одна заготовка не имеет зазубрин), $x_2 = 1$ (одна заготовка имеет зазубрины), $x_3 = 2$ (две заготовки имеют зазубрины), $x_4 = 3$ (три заготовки имеют зазубрины).

Прессовка заготовок – испытания независимые друг от друга, вероятности того, что заготовки не имеют зазубрин, в каждом отдельном испытании равны между собой, поэтому применима формула Бернулли. Учитывая, что по условию $n = 3$, $p = \frac{70}{100} = 0{,}7$, $q = 1 - 0{,}7 = 0{,}3$, получим

$P_3(0) = q^3 = 0{,}3^3 = 0{,}027$,

$P_3(1) = C_3^1 pq^2 = 3\cdot 0{,}7\cdot 0{,}3^2 = 0{,}189$,

$P_3(2) = C_3^2 p^2 q = 3\cdot 0{,}7^2\cdot 0{,}3 = 0{,}441$,

$P_3(3) = p^3 = 0{,}7^3 = 0{,}343.$

Контроль: 0,027 + 0,189 + 0,441 + 0,343 = 1.

Запишем закон распределения случайной величины X:

X	0	1	2	3
p	0,027	0,189	0,441	0,343

Для определения математического ожидания и дисперсии случайной величины X воспользуемся формулами (1.2) и (1.4):

$M(X) = 0\cdot 0{,}027 + 1\cdot 0{,}189 + 2\cdot 0{,}441 + 3\cdot 0{,}343 = 2{,}1,$

$D(X) = 1^2\cdot 0{,}189 + 2^2\cdot 0{,}441 + 3^2\cdot 0{,}343 - (2{,}1)^2 = 0{,}63.$

Ответ: $M(X) = 2{,}1$; $D(X) = 0{,}63$.

Геометрическое распределение

Определение 1.8. Дискретная случайная величина X имеет *геометрическое распределение*, если ее возможные значения: 1, 2, 3, 4, …, а вероятности этих значений вычисляются по формуле

$$p_m = P\{X = m\} = q^{m-1} p, \qquad (1.10)$$

где $m = 1, 2, 3, \ldots$

Ряд распределения дискретной случайной величины X, имеющей геометрическое распределение, имеет вид:

X	1	2	3	…	k	…
p_m	p	qp	q^2p	…	$q^{k-1}p$	…

Для нахождения числовых характеристик геометрического распределения полезно знать формулы:

$$M(X) = \frac{1}{p},\ D(X) = \frac{q}{p^2}. \qquad (1.11)$$

Пример 1.4. Вероятность того, что стрелок попадет в мишень при одном выстреле, равна 0,7. Стрелку выдаются патроны до тех пор, пока он не промахнется. Составить закон распределения дискретной случайной величины X – числа патронов, выданных стрелку.

Решение. Дискретная случайная величина X – число выданных стрелку патронов – имеет следующие возможные значения $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$, …, $x_k = k$,… Найдем вероятности этих возможных значений.

Величина X примет возможное значение $x_1 = 1$ (стрелку выдадут только один патрон), если стрелок промахнется при первом выстреле. Вероятность этого возможного значения равна $p_1 = P(X = 1) = 1 - 0{,}7 = 0{,}3$.

Величина X примет возможное значение $x_2 = 2$ (стрелку выдадут только два патрона), если стрелок попадет в мишень при первом выстреле (вероятность этого события равна 0,7) и промахнется при втором выстреле (вероятность этого события равна 0,3). Тогда, $p_2 = P(X = 2) = 0{,}7\cdot 0{,}3 = 0{,}21$.

Аналогично найдём

$p_3 = P(X = 3) = 0{,}7\cdot 0{,}7\cdot 0{,}3 = 0{,}147,\ \ldots,\ p_k = P(X = k) = 0{,}7^{k-1}\cdot 0{,}3,\ \ldots$

Напишем искомый закон распределения

X	1	2	3	…	k	…
p	0,3	0,21	0,147	…	$0{,}7^{k-1}\cdot 0{,}3$	…

Задачи для самостоятельного решения

1.1 В зерне, предназначенном для очистки, 10 % сорняков. Наудачу отобраны 5 зерен. Написать закон распределения СВ X – числа сорняков среди 5 отобранных. Составить функцию распределения $F(x)$, построить ее график. Найти $M(X)$, $D(X)$ и $\sigma(X)$.

1.2 В денежной лотерее на 100 билетов разыгрывается один выигрыш в 20 руб., два выигрыша по 10 руб. и 10 выигрышей по 1 руб. Составить закон распределения СВ X – возможного выигрыша на один билет. Составить функцию распределения $F(x)$, построить ее график. Найти $M(X)$, $D(X)$ и $\sigma(X)$.

1.3 Партия из 8 изделий содержит 5 стандартных. Наудачу отбирают 4 изделия. Составить закон распределения СВ X – числа стандартных изделий среди отобранных. Составить функцию распределения $F(x)$, построить ее график. Найти $M(X)$, $D(X)$ и $\sigma(X)$.

1.4 Банк выдает пять кредитов. Вероятность невозврата кредита равна 0,2 для каждого из заемщиков. Составить закон распределения СВ X – количества заемщиков, не вернувших кредит по окончании срока. Составить функцию распределения $F(x)$, построить ее график. Найти $M(X)$, $D(X)$ и $\sigma(X)$.

1.5 Производится четыре независимых испытания, в каждом из которых вероятность появления события A равна 0,6. Составить закон распределения СВ X– числа появлений события A в указанных испытаниях. Составить функцию распределения $F(x)$, построить ее график. Найти $M(X)$, $D(X)$ и $\sigma(X)$.

1.6 На пути движения автомобиля четыре светофора. Каждый из них с вероятностью 0,5 либо разрешает, либо запрещает автомашине дальнейшее движение. Составить закон распределения СВ X – числа светофоров, пройденных автомашиной без остановки. Составить функцию распределения $F(x)$, построить ее график. Найти $M(X)$, $D(X)$ и $\sigma(X)$.

1.7 Две игральные кости одновременно бросают два раза. Написать закон распределения СВ X – числа выпадений нечетного числа очков на двух игральных костях. Составить функцию распределения $F(x)$, построить ее график. Найти $M(X)$, $D(X)$ и $\sigma(X)$.

1.8 В партии из 10 деталей имеется 7 стандартных. Наудачу отобраны три детали. Составить закон распределения СВ X – числа стандартных деталей среди отобранных. Составить функцию распределения $F(x)$, построить ее график. Найти $M(X)$, $D(X)$ и $\sigma(X)$.

1.9 В партии из шести деталей имеется четыре стандартных. Наудачу отобраны три детали. Составить закон распределения СВ X – числа стандартных деталей среди отобранных. Составить функцию распределения $F(x)$, построить ее график. Найти $M(X)$, $D(X)$ и $\sigma(X)$.

1.10 В партии деталей 10 % нестандартных. Наудачу отобраны 4 детали. Написать закон распределения СВ X – числа нестандартных деталей среди четырех отобранных. Составить функцию распределения $F(x)$, построить ее график. Найти $M(X)$, $D(X)$ и $\sigma(X)$.

1.11 Баскетболист производит четыре броска по корзине. Вероятность попадания при каждом броске равна 0,6. Написать закон распределения СВ X– числа попаданий мячом в корзину. Составить функцию распределения $F(x)$, построить ее график. Найти $M(X)$, $D(X)$ и $\sigma(X)$.

1.12 Из партии в 25 изделий, среди которых имеются 6 бракованных, выбраны случайном образом 3 изделия для проверки их качества. Написать закон распределения СВ X – числа бракованных изделий среди отобранных. Составить функцию распределения $F(x)$, построить ее график. Найти $M(X)$, $D(X)$ и $\sigma(X)$.

1.13. Вероятность сдачи данного экзамена для каждого из пяти студентов равна 0,9. Написать закон распределения СВ X – числа студентов, сдавших экзамен. Составить функцию распределения $F(x)$, построить ее график. Найти $M(X)$, $D(X)$ и $\sigma(X)$.

1.14 Вероятность успешной сдачи первого экзамена для данного студента равна 0,9, второго экзамена – 0,8, третьего – 0,75. Написать закон распределения СВ X – числа экзаменов, сданных данным студентом. Составить функцию распределения $F(x)$, построить ее график. Найти $M(X)$, $D(X)$ и $\sigma(X)$.

1.15 Некоторое предприятие выпускает $\frac{1}{3}$ своих изделий высшим сортом, остальные – первым сортом. Наугад взято четыре изделия. Написать закон распределения СВ X – числа изделий высшего сорта из взятых четырех. Составить функцию распределения $F(x)$, построить ее график. Найти $M(X)$, $D(X)$ и $\sigma(X)$.

1.16 Батарея состоит из трех орудий. Вероятности попадания в цель при одном выстреле из первого, второго и третьего орудий батареи равны соответственного 0,5; 0,7; 0,8. Написать закон распределения СВ X – числа попаданий в мишень при одном залпе. Составить функцию распределения $F(x)$, построить ее график. Найти $M(X)$, $D(X)$ и $\sigma(X)$.

1.17 Два стрелка производят выстрелы по мишени. Первый стрелок производит два выстрела, второй – три. Вероятности попадания в мишень при одном выстреле соответственно равны 0,9 и 0,8. Написать закон распределения СВ X – числа попаданий в мишень. Составить функцию распределения $F(x)$, построить ее график. Найти $M(X)$, $D(X)$ и $\sigma(X)$.

1.18 Из 20 приборов, испытываемых на надежность, 5 высшей категории. Наугад взяли 4 прибора. Написать закон распределения СВ X – числа приборов высшей категории среди отобранных. Составить функцию распределения $F(x)$, построить ее график. Найти $M(X)$, $D(X)$ и $\sigma(X)$.

1.19 Среди панелей, изготовленных на заводе железобетонных изделий, 90 % высшего сорта. Наудачу взято пять панелей. Написать закон распределения СВ X – числа панелей высшего сорта среди отобранных. Составить функцию распределения $F(x)$, построить ее график. Найти $M(X)$, $D(X)$ и $\sigma(X)$.

1.20 Рабочий обслуживает три станка. Вероятность выхода из строя в течение смены для первого станка 0,1, для второго – 0,3, для третьего – 0,2. Написать закон распределения СВ X – числа станков, вышедших из строя в течение смены. Составить функцию распределения $F(x)$, построить ее график. Найти $M(X)$, $D(X)$ и $\sigma(X)$.

1.21 СВ X – сумма очков при двух бросаниях игральной кости. Написать закон распределения СВ X. Составить функцию распределения $F(x)$, построить ее график. Найти $M(X)$, $D(X)$ и $\sigma(X)$.

1.22 В магазине имеются 10 телевизоров, из которых 4 дефектные. Пусть случайная величина X – число исправных телевизоров среди трех отобранных. Написать закон распределения СВ X. Составить функцию распределения $F(x)$, построить ее график. Найти $M(X)$, $D(X)$ и $\sigma(X)$.

1.23 В магазин поступила обувь из двух фабрик в соотношении 2 : 3. Куплено четыре пары обуви. Найти закон распределения СВ X – числа купленных пар обуви, изготовленных первой фабрикой. Составить функцию распределения $F(x)$, построить ее график. Найти $M(X)$, $D(X)$ и $\sigma(X)$.

1.24 Для рекламы фирма вкладывает в каждую 10-ю единицу продукции приз в 1000 руб. Пусть X – случайная величина – размер выигрыша при пяти сделанных покупках. Написать закон распределения СВ X. Составить функцию распределения $F(x)$, построить ее график. Найти $M(X)$, $D(X)$ и $\sigma(X)$.

1.25 В экзаменационном билете три задачи. Вероятность правильного решения студентом первой задачи равна 0,8, второй – 0,6, третьей – 0,4. Написать закон распределения СВ X – числа правильно решенных студентом задач. Составить функцию распределения $F(x)$, построить ее график. Найти $M(X)$, $D(X)$ и $\sigma(X)$.

1.26 В урне три белых и пять черных шаров. Из урны извлекают три шара. Пусть СВ X – число черных шаров среди вынутых. Написать закон распределения СВ X. Составить функцию распределения $F(x)$, построить ее график. Найти $M(X)$, $D(X)$ и $\sigma(X)$.

1.27 Всхожесть семян ржи составляет 90 %. Посажено 4 зерна. Написать закон распределения СВ X – числа семян, давших всходы. Составить функцию распределения $F(x)$, построить ее график. Найти $M(X)$, $D(X)$ и $\sigma(X)$.

1.28 Охотник, имеющий пять патронов, стреляет в цель до первого попадания (или пока не израсходует все патроны). Написать закон распределения СВ X – числа израсходованных патронов. Составить функцию распределения $F(x)$, построить ее график. Найти $M(X)$, $D(X)$ и $\sigma(X)$.

1.29 Партия, насчитывающая 50 изделий, содержит 6 бракованных. Из всей партии случайным образом выбрано пять изделий. Написать закон распределения СВ X – числа бракованных изделий среди отобранных. Составить функцию распределения $F(x)$, построить ее график. Найти $M(X)$, $D(X)$ и $\sigma(X)$.

1.30 В цехе работают 7 мужчин и 5 женщин. По табельным номерам наудачу отобраны четыре человека. Написать закон распределения СВ X – числа женщин среди случайно отобранных. Составить функцию распределения $F(X)$, построить ее график. Найти $M(X)$, $D(X)$ и $\sigma(X)$.

1.31 На пути движения автомобиля шесть светофоров, каждый из них либо разрешает, либо запрещает дальнейшее движение автомобиля с вероятностью 0,5. Написать закон распределения СВ X – числа светофоров, пройденных автомобилем до первой остановки. Составить функцию распределения $F(x)$, построить ее график. Найти $M(X)$, $D(X)$ и $\sigma(X)$.

1.32 Два орудия ведут стрельбу по цели, делая по два выстрела. Вероятности попадания в цель при одном выстреле для первого орудия 0,6, для второго – 0,8. Написать закон распределения СВ X – общего числа попаданий в цель. Составить функцию распределения $F(x)$, построить ее график. Найти $M(X)$, $D(X)$ и $\sigma(X)$.

Дополнительные задачи

1.33 В урне четыре шара с номерами 1, 2, 3, 4. Вынимают два шара. Изучают СВ X – сумма номеров шаров. Написать закон распределения СВ X. Составить функцию распределения $F(x)$, построить ее график. Найти $M(X)$, $D(X)$ и $\sigma(X)$.

1.34 Известно, что некто купил две акции предприятия A и три акции предприятия B. Вероятность того, что за текущий месяц владелец акций получит дивиденды по каждой акции, равна 0,5 и 0,6 соответственно для предприятий A и B. Написать закон распределения СВ X – числа акций, по которым владелец получит дивиденды. Составить функцию распределения $F(x)$, построить ее график. Найти $M(X)$, $D(X)$ и $\sigma(X)$.

1.35 Бросают три монеты. Написать закон распределения СВ X– числа выпадений герба. Составить функцию распределения $F(x)$, построить ее график. Найти $M(X)$, $D(X)$ и $\sigma(X)$.

1.36 Из урны, содержащей пять белых и три черных шара, последовательно вынимают шары, причем операция извлечения продолжается до появления белого шара. Написать закон распределения СВ X – числа извлеченных черных шаров. Составить функцию распределения $F(x)$ и построить ее график. Найти $M(X)$, $D(X)$ и $\sigma(X)$. Рассмотреть два случая:

а)вынутые шары в урну не возвращаются;

б) вынутые шары возвращаются в урну.

1.37 Монету бросают шесть раз. Изучают СВ X – отношение числа появлений герба к числу появлений цифры. Написать закон распределения СВ X. Составить функцию распределения $F(x)$, построить ее график. Найти $M(X)$, $D(X)$ и $\sigma(X)$.

2 НЕПРЕРЫВНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ. ЧИСЛОВЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ. ЗАКОНЫ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Краткие теоретические сведения

Определение 2.1. Случайная величина, которая может принять любое значение из некоторого конечного или бесконечного промежутка числовой оси, называется *непрерывной случайной величиной* (НСВ). *Число ее возможных значений бесконечно*.

Непрерывную случайную величину X можно задать либо с помощью функции распределения вероятностей$F(x) = P(X < x)$ (интегральной функцией распределения), либо с помощью функции плотности распределения вероятностей (дифференциальной функцией распределения).

Определение 2.2. *Плотностью распределения вероятностей* непрерывной случайной величины X называется функция

$$f((x) = p(x) = F'(x), \tag{2.1}$$

где $F(x)$ – функция распределения.

Свойства плотности распределения вероятностей

1. $f(x) \geq 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$.
2. $P(a \leq X \leq b) = \int\limits_a^b f(x)dx$.

Геометрически это свойство означает, что вероятность попадания случайной величины в интервал $(a; b)$ равна площади криволинейной трапеции, ограниченной осью OX, кривой распределения $f(x)$ и прямыми $x = a$, $x = b$.

3. $F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(t)dt$.
4. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$.

Для непрерывной случайной величины X с функцией плотности распределения $f(x)$ справедливы формулы:

$$M(X) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx, \tag{2.2}$$

$$D(X) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (x - M(X))^2 f(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx - (M(X))^2, \tag{2.3}$$

Пример 2.1. Дана функция распределения случайной величины X:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ ax^5, & 0 < x \le 1, \\ 1, & x > 1. \end{cases}$$

Найти:
а) коэффициент a; б) $M(X)$; в) $P(0{,}5 < X \le 2)$.

Решение. Предварительно найдём вид функции плотности распределения вероятностей

$$f(x) = F'(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ 5ax^4, & 0 < x \le 1, \\ 0, & x > 1. \end{cases}$$

а) Коэффициент a найдем, используя свойство нормированности функции плотности распределения вероятностей: $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$.

В нашем случае $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{0} 0dx + \int_{0}^{1} 5ax^4dx + \int_{1}^{+\infty} 0dx = ax^5\Big|_0^1 = a - 0 = 1$.

Итак, $a = 1$. Следовательно,

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ x^5, & 0 < x \le 1, \\ 1, & x > 1. \end{cases} \quad f(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ 5x^4, & 0 < x \le 1, \\ 0, & x > 1. \end{cases}$$

б) Математическое ожидание $M(X)$ найдём по формуле:

$$M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x)dx.$$

В нашем случае

$$M(X) = \int_{0}^{1} x \cdot 5x^4dx = 5\frac{x^6}{6}\Big|_0^1 = \frac{5}{6}.$$

в) Для нахождения вероятности попадания случайной величины X в интервал (0,5; 2) воспользуемся формулой: $P(\alpha < X < \beta) = F(\beta) - F(\alpha)$.

В нашем случае:

$P(0{,}5 < X < 2) = F(2) - F(0{,}5) = 1 - 0{,}5^5 = 1 - 0{,}0312 = 0{,}96875 \approx 0{,}969$.

Ответ: а) $a = 1$; б) $M(X) = \frac{5}{6}$; в) $P(0{,}5 < X < 2) \approx 0{,}969$.

Основные законы распределения

Равномерное распределение

Определение 2.3. Непрерывная случайная величина X имеет *равномерное распределение* на отрезке $[a; b]$, если ее плотность вероятности $f(x)$ постоянна на этом отрезке, а вне его равна нулю:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, & x \in [a;b], \\ 0, & x \notin [a;b]. \end{cases} \tag{2.4}$$

Функция распределения $F(x)$ равномерного распределения имеет вид

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le a, \\ \dfrac{x-a}{b-a}, & a < x \le b, \\ 1, & x > b. \end{cases} \tag{2.5}$$

Равномерное распределение СВ X на отрезке $[a; b]$ обозначают $X \sim R[a; b]$.

Для нахождения числовых характеристик равномерного распределения полезно знать формулы:

$$M(X) = \frac{a+b}{2},\ D(X) = \frac{(b-a)^2}{12}. \tag{2.6}$$

Показательное (экспоненциальное) распределение

Определение 2.4. Непрерывная случайная величина X имеет *показательный (экспоненциальный) закон распределения*, если ее плотность вероятностей имеет вид

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \lambda e^{-\lambda x}, & x \ge 0, \end{cases} \tag{2.7}$$

где $\lambda > 0$ – параметр распределения.

Функция распределения показательного распределения имеет вид

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1 - e^{-\lambda x}, & x \ge 0. \end{cases} \tag{2.8}$$

Для нахождения числовых характеристик показательного распределения полезно знать формулы:

$$M(X) = \frac{1}{\lambda},\ D(X) = \frac{1}{\lambda^2}. \tag{2.9}$$

Нормальное распределение

Определение 2.5. Непрерывная случайная величина X распределена по *нормальному закону* с параметрами a и $\sigma > 0$, если ее плотность распределения имеет вид

$$f(x) = \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}} e^{\frac{-(x-a)^2}{2\sigma^2}}, \; x \in R. \qquad (2.10)$$

Факт, что СВ X имеет нормальное (гауссовское) распределение с параметрами a и σ, сокращенно записывают так: $X \sim N(a; \sigma)$

Функция распределения СВ $X \sim N(a; \sigma)$ имеет вид

$$F(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{\frac{-(z-a)^2}{2\sigma^2}} dz. \qquad (2.11)$$

Вероятностный смысл параметров нормального распределения: a – математическое ожидание, σ – среднее квадратическое отклонение, т.е.

$$M(X) = a, D(X) = \sigma^2, \sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{\sigma^2} = \sigma.$$

Для нормально распределенной случайной величины X справедливы формулы:

1) вероятность того, что СВ $X \sim N(a; \sigma)$ примет значение, принадлежащее интервалу (α; β), находится по формуле

$$P(\alpha < X < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right), \qquad (2.12)$$

где $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{x} e^{\frac{-z^2}{2}} dz$ – функция Лапласа;

2) вероятность того, что абсолютная величина отклонения меньше положительного числа δ, равна

$$P(|X - a| < \delta) = 2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right). \qquad (2.13)$$

В частности, при $a = 0$ справедливо равенство

$$P(|X| < \delta) = 2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right). \qquad (2.14)$$

Пример 2. 1. Текущая цена ценной бумаги представляет собой нормально распределенную случайную величину X со средним равным 100 усл. ед. и дисперсией равной 9. Найти:

1) вероятность того, что цена актива будет находиться в пределах от 90 до 110 усл. ед.;

2) вероятность того, что абсолютная величина отклонения $|X - a|$ окажется меньше 2.

Решение. 1) Так как α = 100, σ = $\sqrt{9}$ = 3, то

$$P(90 < X < 110) = \Phi\left(\frac{110-100}{3}\right) - \Phi\left(\frac{90-100}{3}\right) = \Phi(3{,}33) - \Phi(-3{,}33) =$$

$$= 2\cdot\Phi(3{,}33) = 2\cdot 0{,}4996 = 0{,}9992.$$

2) По формуле

$$P(|X-a| < \delta) = 2\cdot\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right)$$

имеем

$$P(|X-\alpha| < 2) = 2\cdot\Phi\left(\frac{2}{3}\right) = 2\cdot\Phi(0{,}67) = 2\cdot 0{,}2486 = 0{,}4972.$$

Ответ: 1) p = 0,9992; 2) p = 0,4972.

Задачи для самостоятельного решения

Непрерывная случайная величина X задана функцией распределения $F(x)$. В задачах 2.1 – 2.10 требуется:

1) найти плотность распределения вероятностей;
2) найти математическое ожидание $M(X)$ и дисперсию $D(X)$;
3) построить графики функций $F(x)$ и $f(x)$;
4) найти вероятность попадания СВ X в интервал $(a; b)$.

2.1 $$F(x) = \begin{cases} 0, x < \frac{3\pi}{4}, \\ \cos 2x, \frac{3\pi}{4} \le x \le \pi, \\ 1, x > \pi, \end{cases}$$

$a = \frac{3\pi}{4}$, $b = \frac{5\pi}{6}$.

2.2 $$F(x) = \begin{cases} 0, x < 0, \\ \frac{1}{24}(x^2 + 2x), 0 \le x \le 4, \\ 1, x > 4, \end{cases}$$

$a = 0$, $b = 1$.

2.3 $$F(x) = \begin{cases} 0, x < -1, \\ \frac{1}{9}(x+1)^2, -1 \le x \le 2, \\ 1, x > 2, \end{cases}$$

$a = 1$, $b = 2$.

2.4 $$F(x) = \begin{cases} 0, x < 0, \\ \frac{x^2}{100}, 0 \le x \le 10, \\ 1, x > 10, \end{cases}$$

$a = 5$, $b = 10$.

2.5 $F(x) = \begin{cases} 0, x<1, \\ \frac{1}{2}(x-1), 1 \le x \le 3, \\ 1, x>3, \end{cases}$

$a = 0$, $b = 2$.

2.6 $F(x) = \begin{cases} 0, x<\frac{\pi}{2}, \\ 1-\sin x, \frac{\pi}{2} \le x \le \pi, \\ 1, x>\pi, \end{cases}$

$a = \frac{\pi}{2}$, $b = \frac{3\pi}{4}$.

2.7 $F(x) = \begin{cases} 0, x<0, \\ \frac{x^2}{9}, 0 \le x \le 3, \\ 1, x>3, \end{cases}$

$a = 0$, $b = 1$.

2.8 $F(x) = \begin{cases} 0, x<0, \\ \frac{1}{33}(3x^2+2x), 0 \le x \le 3, \\ 1, x>3, \end{cases}$

$a = 0$, $b = 2$.

2.9 $F(x) = \begin{cases} 0, x<1, \\ \frac{1}{9}(x-1)^2, 1 \le x \le 4, \\ 1, x>4, \end{cases}$

$a = 3$, $b = 5$.

2.10 $F(x) = \begin{cases} 0, x<0, \\ \frac{1}{12}(x^3+2x), 0 \le x \le 2, \\ 1, x>2, \end{cases}$

$a = 0$, $b = 1$.

Непрерывная случайная величина X задана функцией плотности распределения $f(x)$. В задачах 2.11 – 2.20 требуется:

1) найти значение константы C;
2) найти функцию распределения вероятностей $F(x)$;
3) найти математическое ожидание $M(X)$ и дисперсию $D(X)$;
4) построить графики функций $F(x)$ и $f(x)$;
5) найти вероятность попадания СВ X в интервал $(a; b)$.

2.11 $f(x) = \begin{cases} 0, x<0, \\ Cx^2, 0 \le x \le 5, \\ 0, x>5, \end{cases}$

$a = 1$, $b = 4$.

2.12 $f(x) = \begin{cases} 0, x<1, \\ Cx, 1 \le x \le 7, \\ 0, x>7, \end{cases}$

$a = 2$, $b = 5$.

2.13 $f(x) = \begin{cases} 0, x<0, \\ C\cos x, 0 \le x \le \frac{\pi}{2}, \\ 0, x>\frac{\pi}{2}, \end{cases}$

$a = 0$, $b = \frac{\pi}{4}$.

2.14 $f(x) = \begin{cases} 0, x<0, \\ C(2x+1), 0 \le x \le \frac{1}{3}, \\ 0, x>\frac{1}{3}, \end{cases}$

$a = 0$, $b = 0{,}2$.

2.15 $f(x) = \begin{cases} 0, x < \dfrac{\pi}{6}, \\ -3C \cdot \sin 3x, \dfrac{\pi}{6} \le x \le \dfrac{\pi}{3}, \\ 0, x > \dfrac{\pi}{3}, \end{cases}$

$a = \dfrac{\pi}{4}$, $b = \dfrac{\pi}{2}$.

2.16 $f(x) = \begin{cases} 0, x < 0, \\ 4Cx, 0 \le x \le 2, \\ 0, x > 2, \end{cases}$

$a = 0$, $b = 1$.

2.17 $f(x) = \begin{cases} 0, x < 1, \\ \dfrac{(4-x)^2}{C}, 1 \le x \le 3, \\ 0, x > 3, \end{cases}$

$a = 2$, $b = 3$.

2.18 $f(x) = \begin{cases} 0, x < -1, \\ C, -1 \le x \le 4, \\ 0, x > 4, \end{cases}$

$a = 0$, $b = 2$.

2.19 $f(x) = \begin{cases} 0, x < 0, \\ C(3x^2 + 3), 0 \le x \le 2, \\ 0, x > 2, \end{cases}$

$a = 1$, $b = 3$.

2.20 $F(x) = \begin{cases} 4C, \ |x-2| \le 3, \\ 0, \ |x-2| > 3, \end{cases}$

$a = -1$, $b = 2$.

Непрерывная случайная величина X задана функцией распределения $F(x)$. В задачах 2.21 – 2.30 требуется:

1) найти значение константы C;
2) найти плотность распределения вероятностей;
3) найти математическое ожидание $M(X)$ и дисперсию $D(X)$;
4) построить графики функций $F(x)$ и $f(x)$;
5) найти вероятность попадания СВ X в интервал $(a; b)$.

2.21 $F(x) = \begin{cases} 0, x < 0, \\ C(x^3 + 2x), 0 \le x \le 2, \\ 1, x > 2, \end{cases}$

$a = 1{,}2$; $b = 1{,}5$.

2.22 $F(x) = \begin{cases} 0, x < 0, \\ C(x^2 + 2x), 0 \le x \le 3, \\ 1, x > 3, \end{cases}$

$a = 0$, $b = 1$.

2.23 $F(x) = \begin{cases} 0, x < 3, \\ C(x^2 - 9), 3 \le x \le 4, \\ 1, x > 4, \end{cases}$

$a = 2$, $b = 4$.

2.24 $F(x) = \begin{cases} 0, x < 0, \\ C(x^2 + x), 0 \le x \le 4, \\ 1, x > 4, \end{cases}$

$a = 0$, $b = 3$.

2.25 $F(x) = \begin{cases} 0, x < 2, \\ Cx - 1, 2 \le x \le 6, \\ 1, x > 6, \end{cases}$

$a = 2$, $b = 5$.

2.26 $F(x) = \begin{cases} 0, x < 0, \\ Cx, 0 \le x \le 6, \\ 1, x > 6, \end{cases}$

$a = 2$, $b = 5$.

2.27 $F(x) = \begin{cases} 0, x < 0, \\ \dfrac{x^4}{C}, 0 \le x \le 2, \\ 1, x > 2, \end{cases}$

$a = 0{,}5$; $b = 1.5$.

2.28 $F(x) = \begin{cases} 0, x < -\dfrac{\pi}{2}, \\ C \cdot \sin x, -\dfrac{\pi}{2} \le x \le \dfrac{\pi}{2}, \\ 1, x > \dfrac{\pi}{2}, \end{cases}$

$a = 0$, $b = 2$.

2.29 $F(x) = \begin{cases} 0, x < 1, \\ C(x-1)^3, 1 \le x \le 3, \\ 1, x > 3, \end{cases}$

$a = 2$, $b = 4$.

2.30 $F(x) = \begin{cases} 0, x < 0, \\ C(x^4 + 3x), 0 \le x \le 2, \\ 1, x > 2, \end{cases}$

$a = 0$, $b = 1$.

2.31 При изготовлении некоторого изделия его вес X подвержен случайным колебаниям. Стандартный вес изделия равен 30 г, его среднее квадратическое отклонение равно 0,7, а случайная величина X распределена по нормальному закону. Найти: 1) вероятность того, что вес наудачу выбранного изделия находится в пределах от 28 до 31 г; 2) величину, которую не превысит вес наудачу взятого изделия с вероятностью 0,95.

2.32 На станке изготавливают втулки. Длина втулки представляет собой случайную величину, распределенную по нормальному закону, имеющую среднее значение 20 см и дисперсию 0,04 см^2. Найти: 1) процент втулок, длина которых заключена между 19,7 и 20,3 см; 2) величину, которую не превысит длина наудачу взятой втулки с вероятностью 0,95.

2.33 Из некоторого пункта ведется стрельба из орудия вдоль некоторой прямой по цели. Дальность полета снаряда имеет нормальное распределение с математическим ожиданием 1000 м и средним квадратическим отклонением 50 м. Найти: 1) процент снарядов, которые дадут перелет от 40 до 60 м; 2) процент снарядов, которые пролетят расстояние, меньшее средней дальности.

2.34 Считается, что отклонение длины изготавливаемых деталей от стандартных является случайной величиной, распределенной по нормальному закону. Зная, что длина стандартной детали 40 см, а среднее квадратическое отклонение 0,4 см, найти: 1) процент деталей, длина которых заключена от 39,8 до 40,2 см; 2) величину, которую не превысит длина наудачу взятой детали с вероятностью 0,9.

2.35 Случайные отклонения размера детали от номинала распределены нормально. Математическое ожидание размера детали равно 260 мм, среднее квадратическое отклонение 0,8 мм. Годными считаются детали, размер которых заключен между 259 и 262 мм. Определить: 1) процент изготовления годных деталей; 2) процент бракованных деталей, если точность изготовления ухудшится, и будет характеризоваться средним квадратическим отклонением 1 мм.

2.36 Средний диаметр стволов деревьев на некоторой делянке равен 30 см, среднее квадратическое отклонение 5 см. Считая, что диаметр ствола есть случайная величина, распределенная нормально, определить: 1) процент стволов, имеющих диаметр свыше 25 см; 2) величину, которую не превысит диаметр ствола случайно отобранного дерева с вероятностью 0,95.

2.37 Срок службы прибора представляет собой случайную величину, распределенную нормально с математическим ожиданием 15 лет и средним квадратическим отклонением 2 года. Определить: 1) вероятность того, что прибор прослужит от 10 до 20 лет; 2) величину, которую не превзойдет срок службы прибора с вероятностью 0,99.

2.38 Распределение пакетов по весу расфасованного товара подчинено нормальному закону с математическим ожиданием 1 кг и средним квадратическим отклонением 0,12 кг. Определить: 1) вероятность того, что вес наудачу взятого пакета будет не меньше 997 г; 2) наибольшее значение, которое не превзойдет вес наудачу взятого пакета с вероятностью 0,95.

2.39 Средний вес одного яблока равен 130 г. Отклонения в весе характеризуются средним квадратическим отклонением 25 г. Отбирается подряд, без выбора, 100 яблок. Определить: 1) вероятность того, что вес 100 яблок окажется не менее 12,5 кг; 2) наибольшее значение, которое не превзойдет вес 100 яблок с вероятностью 0,95.

2.40 Распределение деталей по затратам времени на одну операцию подчиняется нормальному закону с математическим ожиданием 55 с и средним квадратическим отклонением 4 с. Определить: 1) вероятность того, что продолжительность обработки взятой наудачу детали не превысит 65 с; 2) величину, которую не превзойдет продолжительность обработки детали с вероятностью 0,99.

2.41 Случайные отклонения размера детали от номинала распределены нормально. Математическое ожидание размера детали равно 250 мм, среднее квадратическое отклонение 0,7 мм. Годными считаются детали, размер которых заключен между 249 и 251 мм. Определить: 1) вероятность изготовления годной детали; 2) процент бракованных деталей, если точность изготовления улучшится и будет характеризоваться средним квадратическим отклонением 0,6 мм.

2.42 Масса вагона есть случайная величина, распределенная нормально с математическим ожиданием 65 т и средним квадратическим отклонением 0,9 т. Определить: 1) вероятность того, что очередной вагон имеет массу от 60 до 70 т; 2) величину, которую не превышает масса наудачу взятого вагона с вероятностью 0,99.

2.43 Диаметр детали, изготавливаемой на станке, есть случайная величина, распределенная нормально с математическим ожиданием 25 см и средним квадратическим отклонением 0,4 см. Определить: 1) процент деталей, имеющих диаметр от 24,8 до 25,6 см; 2) величину, которую не превзойдет диаметр наудачу взятой детали с вероятностью 0,99.

2.44 Диаметр подшипников, изготовленных на заводе, представляет собой случайную величину, распределенную нормально, с математическим ожиданием 1,5 см и средним квадратическим отклонением 0,04 см. Определить: 1) вероятность того, что размер наугад взятого подшипника колеблется от 1,4 до 2 см; 2) величину, которую не превысит диаметр наудачу взятого подшипника с вероятностью 0,99.

2.45 Длина рыбы является случайной величиной, распределенной нормально с математическим ожиданием 30 см и средним квадратическим отклонением 5 см. Определить: 1) вероятность того, что длина наудачу выловленной рыбы заключена между 26 и 30 см; 2) процент рыб, имеющих длину свыше 35 см.

2.46 В партии яиц средний вес яйца равен 59 г, среднее квадратическое отклонение 6 г. Вес яиц является случайной величиной, распределенной нормально. В заготовку принимают яйцо весом от 50 до 65 г. Определить: 1) процент яиц, идущих в заготовку; 2) величину, которую не превысит вес наудачу взятого яйца с вероятностью 0,95.

2.47 Средний вес плодов в одном ящике равен 10 кг, а среднее квадратическое отклонение в весе плодов одного ящика 1,5 кг. Вес плодов является случайной величиной, распределенной нормально. Определить: 1) вероятность того, что в 100 ящиках окажется не менее 970 кг; 2) наибольшее значение, которое не превысит вес плодов в 100 ящиках с вероятностью 0,95.

2.48 Диаметр валиков, обработанных на токарном станке, подчинен нормальному закону с математическим ожиданием 23 мм и средним квадратическим отклонением 0,5 мм. Годными считаются те валики, диаметр которых заключен между 22 и 24 мм. Определить: 1) вероятность изготовления годного валика; 2) процент бракованных валиков, если точность изготовления улучшится и будет характеризоваться средним квадратическим отклонением 0,4 мм.

2.49 За один рейс автомашина перевозит груз весом в среднем 4 т. Фактический вес в каждом рейсе отклоняется от среднего и характеризуется средним квадратическим отклонением 0,5 т. Определить: 1) вероятность того, что за 100 рейсов будет перевезено не менее 390 т груза; 2) величину, которую не превзойдет вес перевезенного груза за 100 рейсов с вероятностью 0,98.

2.50 Рост взрослых мужчин является случайной величиной, распределенной нормально с математическим ожиданием 170 см и средним квадратическим отклонением 5 см. Определить: 1) процент мужчин, имеющих рост не выше 180 см; 2) величину, которую не превзойдет рост одного случайным образом выбранного мужчины с вероятностью 0,95.

Список использованных источников

1 Гмурман В. Е. Теория вероятностей и математическая статистика: учебное пособие для бакалавров / В. Е. Гмурман. – 12-е изд. – М.: Юрайт, 2012. – 479 с.

2 Гмурман В. Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике: учебное пособие для вузов / В. Е. Гмурман – М.:1975–2011 – 404 с.

3 Гусак А. А. Теория вероятностей: справ. пособие к решению задач / А. А. Гусак, Е. А. Бричикова. – 7-е изд. – Минск: Тетрасистем, 2006 –2009. – 287 с.

4 Кремер Н. Ш. Теория вероятностей и математическая статистика: учебник / Н. Ш. Кремер. – 3-е изд. перераб. и доп. – М.: ЮНИТИ, 2007 – 2009. – 550 с.

5 Письменный Д. Т. Конспект лекций по теории вероятностей, математической статистике и случайным процессам / Д. Т. Письменный. – 6-е изд. – М.: Айрис-пресс, 2008 – 2013. – 287 с.

6 Рябушко А. П. Индивидуальные задания по высшей математике: учебное пособие для студентов вузов. В 4ч. Ч. 4. Операционное исчисление. Элементы теории устойчивости. Теория вероятностей. Математическая статистика / А. П. Рябушко. – 4-е изд. – Минск: Вышэйшая школа, 2013. – 336 с.

Учебное издание

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

Методические указания

Составители:
Гребенцов Юрий Михайлович
Юрченко Ирина Викторовна
Лох Светлана Владимировна

Редактор *А.А. Щербакова*
Технический редактор *Н.Г. Тверская*

Подписано в печать 22.06.2018. Формат 60×84 1/16.
Бумага офсетная. Гарнитура TimesNewRoman. Ризография.
Уч.-изд. л. 1,75. Усл.печ.л. 1,63.
Тираж 56 экз. Заказ 99.

Учреждение образования
«Могилёвский государственный университет продовольствия».
Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя,
распространителя печатных изданий № 1/272 от 04.04.2014 г.
Пр-т Шмидта, 3, 212027, Могилёв.

Отпечатано в учреждении образования
«Могилёвский государственный университет продовольствия».
Пр-т Шмидта, 3, 212027, Могилёв.